DOI:10.11721/cqnuj20190618

一类具有弱射影 Ricci 曲率的 Spray 及其可度量化问题*

程新跃[1]，龚妍廿[2]，李　明[2]

(1. 重庆师范大学 数学科学学院，重庆 401331；2. 重庆理工大学 理学院，重庆 400054)

摘要:【目的】Spray 的曲率性质及其可度量化问题在 Spray 几何中是很重要的，因此对一类由 Funk 度量 Θ 构造的射影平坦的 Spray $\widetilde{G}$(其测地系数为$\widetilde{G}^i=\tau\Theta y^i$，其中 τ 是常数)进行研究。【方法】计算$\widetilde{G}$的射影 Ricci 曲率，进而在一定射影 Ricci 曲率条件下研究这类 Spray 的可度量化问题。【结果】1) 在$\widetilde{G}$是射影 Ricci-平坦的条件下，确定了流形的体积形式；2) 在$\widetilde{G}$可由芬斯勒度量$\widetilde{F}$诱导的前提下，若$\widetilde{F}$具有弱射影 Ricci 曲率且是非射影 Ricci-平坦的，则$\widetilde{F}$的结构可被确定。【结论】初步分类了具有弱射影 Ricci 曲率的芬斯勒度量$\widetilde{F}$。

关键词:射影 Ricci 曲率;Funk 度量;Spray;Spray 可度量化

中图分类号:O186.15　　　　**文献标志码:**A　　　　**文章编号:**1672-6693(2019)06-0058-06

为了利用 S-曲率与 Ricci 曲率进一步深入研究和刻画芬斯勒度量的结构与性质，Shen[1]定义了芬斯勒流形上的一个重要几何量，即射影 Ricci 曲率。程新跃等人[2]最先对射影 Ricci 曲率的相关性质进行了研究，刻画了两个射影相关的芬斯勒度量的射影 Ricci 曲率关系，证明了在给定体积形式的流形上的射影 Ricci 曲率是射影不变量;Cheng 等人[3]还研究和刻画了射影 Ricci-平坦的 Randers 度量。上述研究成果为后续进一步研究射影 Ricci 曲率的性质奠定了重要基础。Zhu 等人[4]研究了球对称度量的射影 Ricci 曲率，并刻画了射影 Ricci-平坦的球对称度量。

由此，一个很自然的问题是，如何刻画射影 Ricci-平坦的 Spray。这是一个值得深入探讨的问题。Yang[5]利用一类射影平坦且具有常数旗曲率 λ 的芬斯勒度量 F 构造了一类新的 Spray $\widetilde{G}$，测地系数为$\widetilde{G}^i=G^i+\delta F y^i$，这里 δ 是一个常数，他给出了这类 Spray 是 R-平坦的等价刻画。现在，取 $F=\Theta$ 是一个 Funk 度量，测地系数为 $G^i=\dfrac{\Theta}{2}y^i$。从而$\widetilde{G}$的测地系数为$\widetilde{G}^i=\left(\dfrac{1}{2}+\delta\right)\Theta y^i$，不妨记$\widetilde{G}^i=\tau\Theta y^i$，$\tau$ 是常数。本文对这类 Spray 的射影 Ricci 曲率性质进行研究，首先得到了如下定理。

定理 1　设$\widetilde{G}=y^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}-2\widetilde{G}^i\dfrac{\partial}{\partial y^i}$是 n 维光滑流形 M 上由 Funk 度量 Θ 构造的 Spray，其中$\widetilde{G}^i=\tau\Theta y^i$，$\tau$ 是常数，设 σ 是 M 上的一个体积元，那么$\widetilde{G}$是射影 Ricci-平坦的当且仅当:

$$\sigma(\boldsymbol{x})=\frac{1}{[c+\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}\rangle]^{n+1}},\tag{1}$$

这里，c 是一个常数，$\boldsymbol{a}$ 是一个常向量。

定理 1 表明由 Funk 度量 Θ 构造的这类 Spray 的射影 Ricci 性质曲率与度量无关，仅仅取决于如上所示的体积测度函数。

在 Spray 几何中，另一个很重要的问题是 Spray 结构的可度量化问题。关于这类问题已有一系列成果。在文献[1,6]中，许多例子表明不是每一个 Spray 结构都可由芬斯勒度量诱导。

文献[7]给出了一个射影平坦的 Spray 可由一族芬斯勒度量诱导的充要条件。由文献[5]可知当 $\tau=0,\dfrac{1}{2},1$

* **收稿日期:**2019-05-26　　**修回日期:**2019-11-05　　**网络出版时间:**2019-11-25 10:34

资助项目:国家自然科学基金(No. 11871126;No. 11571184);重庆师范大学科学研究基金(No. 17XLB022)

第一作者简介:程新跃，男，教授，博士，研究方向为微分几何及其应用，E-mail:chengxy@cqnu.edu.cn;**通信作者:**龚妍廿，女，E-mail:gyn@2017.cqut.edu.cn

网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20191125.1033.008.html

时，定理 1 中的 Spray $\widetilde{G}$可由芬斯勒度量$\widetilde{F}$所诱导。在此情形下，若$\widetilde{F}$是非射影 Ricci-平坦的，本文考虑分类具有弱射影 Ricci 曲率的$\widetilde{F}$，得到了如下定理。

定理 2　设$\widetilde{G}=y^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}-2\widetilde{G}^i\dfrac{\partial}{\partial y^i}$是 n 维光滑流形 M 上由 Funk 度量 Θ 构造的 Spray，其中$\widetilde{G}^i=\tau\Theta y^i$，$\tau$ 是常数。那么$\widetilde{G}$可由芬斯勒度量$\widetilde{F}$诱导当且仅当 $\tau=0,\dfrac{1}{2},1$。进一步，$\widetilde{F}$具有弱射影 Ricci 曲率当且仅当：

$$(n+1)^2k\widetilde{F}^2+3(n+1)^2\xi\widetilde{F}+(n+1)\varphi_{00}-\varphi_0^2=0, \tag{2}$$

这里 $\varphi=\ln\sigma(\boldsymbol{x})$，$\varphi_0=\varphi_{x^i}y^i$，$\varphi_{00}=\varphi_{x^ix^j}y^iy^j$，$\xi=\xi_i(\boldsymbol{x})y^i$ 是一个 1-形式，$k=k(\boldsymbol{x})$是 M 上一个标量函数。具体地，如果$\widetilde{F}$不是射影 Ricci-平坦的，有以下分类结果：

1）当 $k=0$ 且 $\xi\neq0$ 时，$\widetilde{F}$可表示为：

$$\widetilde{F}=\frac{\varphi_0^2-(n+1)\varphi_{00}}{3\xi(n+1)^2}, \tag{3}$$

此时，$\widetilde{F}$是一个 Kropina 度量。

2）当 $k\neq0$ 且 $\xi\neq0$ 时，$\widetilde{F}$可表示为：

$$\widetilde{F}=\frac{-3\xi(n+1)+\sqrt{9\xi^2(n+1)^2+4k[\varphi_0^2-(n+1)\varphi_{00}]}}{2k(n+1)}, \tag{4}$$

此时，$\widetilde{F}$是一个 Randers 度量。特别地，当 $\xi=0$ 时，$\widetilde{F}$是一个如下形式的黎曼度量：

$$\widetilde{F}=\frac{\sqrt{k[\varphi_0^2-(n+1)\varphi_{00}]}}{(n+1)k}。 \tag{5}$$

1 预备知识

设 M 是 n 维光滑流形，M 上的一个 Spray 是定义在切丛 TM_0 上的一个光滑向量场 G，在 TM 的局部坐标系 $\{x^i,y^i\}$下表示为 $G=y^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}-2G^i\dfrac{\partial}{\partial y^i}$，这里，$G^i=G^i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$是 TM_0 上的函数且满足对任意常数 $\lambda>0$，有 $G^i(\boldsymbol{x},\lambda\boldsymbol{y})=\lambda^2G^i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$，$G^i$ 称作测地系数。一个赋予 Spray 结构的光滑流形 M 称为一个 Spray 空间(M,G)。在局部坐标下，一个 Spray 的测地线可由二阶微分方程$\dfrac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}t^2}+2G^i\left(\boldsymbol{x},\dfrac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\right)=0$ 确定。

黎曼曲率张量 $\boldsymbol{R}:=R^i_k\dfrac{\partial}{\partial x^i}\otimes\mathrm{d}x^i$ 可由 Spray 确定：

$$R^i_k=2\frac{\partial G^i}{\partial x^k}-\frac{\partial^2G^i}{\partial x^j\partial y^k}y^j+2G^j\frac{\partial^2G^i}{\partial y^j\partial y^k}-\frac{\partial G^i}{\partial y^j}\frac{\partial G^j}{\partial y^k}, \tag{6}$$

当 $R^i_k=0$ 时，称 G 是 R-平坦的。Spray 的另一个黎曼几何量——Ricci 曲率定义如下：

$$\mathrm{Ric}:=R^m_m。 \tag{7}$$

S-曲率是沈忠民在推广 Bishop-Gromov 比较定理时引出的一个十分重要的非黎曼几何量，在芬斯勒几何中反映的是畸变沿测地线的变化率。设(M,G)是一个 Spray 空间，$\sigma=\sigma(\boldsymbol{x})$是 M 上的一个测度，Spray G 的 S-曲率定义为：

$$S(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}):=\frac{\partial G^m}{\partial y^m}-y^m\frac{\partial}{\partial x^m}[\ln\sigma(\boldsymbol{x})]。 \tag{8}$$

利用 Ricci 曲率以及 S-曲率，定义 Spray 的射影 Ricci 曲率如下：

$$\mathrm{PRic}:=\mathrm{Ric}+\frac{n-1}{n+1}S_{|m}y^m+\frac{n-1}{(n+1)^2}S^2, \tag{9}$$

本文中“|”表示关于 Berwald 连络的水平协变导数。可以验证，射影 Ricci 曲率是固定体积形式下的一个射影不变量[2]。

特别地，给定一个芬斯勒度量 F，令 $G^i:=\dfrac{1}{4}g^{il}\{y^kF^2_{x^ky^l}-F^2_{x^l}\}$，此时由 G^i 定义的 Spray $G=y^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}-2G^i\dfrac{\partial}{\partial y^i}$

称作是由芬斯勒度量 F 所诱导的 Spray。易见,每一个芬斯勒度量都可诱导一个 Spray 结构,反之则不然。Spray 的可度量化问题一直备受关注,当一个 Spray G 可由一个芬斯勒度量 F 所诱导时,有如下的一些相关概念。

定义 1 设 F 是 n 维光滑流形 M 上的一个芬斯勒度量,则:

1) 若 $\mathrm{PRic}=(n-1)\left[\frac{3\xi}{F}+k\right]F^2$,其中 $\xi=\xi_i(\boldsymbol{x})y^i$ 是一个1-形式,$k=k(\boldsymbol{x})$ 是 M 上的一个标量函数,则称 F 具有弱射影 Ricci 曲率;

2) 若上式中 $\xi=0$,即 $\mathrm{PRic}=(n-1)k(\boldsymbol{x})F^2$,则称 F 具有迷向射影 Ricci 曲率;

3) 若 $\mathrm{PRic}=(n-1)cF^2$,其中 c 为常数,则称 F 具有常射影 Ricci 曲率;

4) 若 $\mathrm{PRic}=0$,则称 F 是射影 Ricci-平坦的。

芬斯勒度量中一类非常重要的度量是 Funk 度量。具体地,设 $\varphi=\varphi(\boldsymbol{y})$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的一个 Minkowski 范数,$U:=\{y\in\mathbf{R}^n\mid\varphi(\boldsymbol{y})<1\}$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 中的一个强凸邻域。对任意 $\boldsymbol{x}\in U$,$\boldsymbol{y}\in T_xU\cong\mathbf{R}^n$,若存在函数 $\Theta=\Theta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 满足 $\frac{\boldsymbol{y}}{\Theta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}+\boldsymbol{x}\in\partial U$,则称 $\Theta=\Theta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 是 U 上的一个 Funk 度量。由定义有 $\varphi\left(\frac{\boldsymbol{y}}{\Theta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}+\boldsymbol{x}\right)=1$,此式等价于 $\Theta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\varphi[\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}\Theta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})]$,从而有:

$$\Theta_{x^k}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\Theta\Theta_{y^k}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\tag{10}$$

这是 Funk 度量一个非常重要的性质[8]。此外,容易验证 Θ 满足 $\Theta_{x^l}-\Theta_{x^ky^l}y^k=0$,这表明 Θ 是射影平坦的芬斯勒度量,射影因子为 $P=\frac{\Theta}{2}$ 且旗曲率为 $\lambda=-\frac{1}{4}$。

2 定理的证明

本节将得到由 Funk 度量 Θ 构造的 Spray $\widetilde{G}$(其测地系数为 $\widetilde{G}^i=\tau\Theta y^i$,$\tau$ 是常数)的射影 Ricci 曲率,并给出定理1以及定理2的证明。为后文证明定理的需要,首先给出如下引理。

引理 1 设 φ 是连通开集 $\Omega\subset\boldsymbol{R}^n$ 上的一个光滑函数,对 $\forall\,\boldsymbol{x}\in\Omega$,若 φ 满足:

$$\varphi_i\varphi_j-(n+1)\varphi_{ij}=0,\tag{11}$$

其中 $\varphi_i=\varphi_{x^i}$,$\varphi_{ij}=\varphi_{x^ix^j}$,则:

$$\varphi(\boldsymbol{x})=\ln\frac{1}{[c+\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}\rangle]^{n+1}},\tag{12}$$

这里,c 是一个常数,$\boldsymbol{a}$ 是一个常向量。

证明 首先给出满足(11)式的 φ 的梯度 $\nabla\varphi$ 的分量 φ_i 在 Ω 上的一些局部性质($i=1,\cdots,n$)。对 $\forall\,\varepsilon>0$,记 $U_x(\varepsilon)$ 为 $\boldsymbol{x}$ 在 Ω 中的一个 ε-邻域。若对于某个 $i=1,\cdots,n$,$\varphi_i(\boldsymbol{x})\neq0$,可以断言 $\exists\,\varepsilon>0$,s.t. $\varphi_i(p)\neq0$,$\forall\,p\in U_x(\varepsilon)$。

事实上,由(11)式知 $\varphi_i^2-(n+1)\varphi_{ii}=0$,令 $\varphi_i(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})$,那么有:

$$f^2(\boldsymbol{x})-(n+1)f_i'(\boldsymbol{x})=0,\tag{13}$$

这里,$f_i'(\boldsymbol{x})$ 表示 $f(\boldsymbol{x})$ 关于 x^i 的偏导数。从而(13)式的解为:

$$\varphi_i(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})=-\frac{n+1}{c_i(\hat{x}^i)+x^i},\tag{14}$$

其中,$c_i(\hat{x}^i):=c_i(x^1,\cdots,x^{i-1},x^{i+1},\cdots,x^n)$ 是 $(x^1,\cdots,x^{i-1},x^{i+1},\cdots,x^n)$ 的光滑函数。

由假设知 $\varphi_i(\boldsymbol{x})=-\frac{n+1}{c_i(\hat{x}^i)+x^i}\neq0$,因此由连续函数的局部保号性知,$\exists\,U_x(\varepsilon)$,使得 $\varphi_i(p)\neq0$,$\forall\,p\in U_x(\varepsilon)$。根据 Ω 的连通性可知,φ_i 在 Ω 上没有零点。因此,若 φ_i 在 Ω 上有零点,则 $\varphi_i\equiv0$,$i=1,\cdots,n$。下面对方程(11)进行求解。

1) 若对 $\forall\,i\in\{1,2,\cdots,n\}$,$\varphi_i(\boldsymbol{x})\neq0$,$\boldsymbol{x}\in\Omega$。由上述讨论知 $\varphi_i(\boldsymbol{x})$ 满足(14)式,将该式两边关于 x^i 积分得:

$$\varphi(\boldsymbol{x})=-(n+1)\ln(c_i(\hat{x}^i)+x^i),\tag{15}$$

进一步,可以证明 $c_i(\hat{x}^i):=c_i(x^1,\cdots,x^{i-1},x^{i+1},\cdots,x^n)$ 是关于 $(x^1,\cdots,x^{i-1},x^{i+1},\cdots,x^n)$ 的一个线性函数。

下面对 n 进行归纳,证明上述结论成立。

(a) 当 $n=1$ 时，$c_1(\hat{x}^1):=c_1$（常数），结论显然成立；当 $n=2$ 时，由(14)式可知$\begin{cases}\varphi_1(x^1,x^2)=\dfrac{-3}{x^1+c_1(x^2)}\\ \varphi_2(x^1,x^2)=\dfrac{-3}{x^2+c_2(x^1)}\end{cases}$，进一步有$\begin{cases}\varphi_{12}(x^1,x^2)=\dfrac{3c_{12}(x^2)}{[x^1+c_1(x^2)]^2}\\ \varphi_{21}(x^1,x^2)=\dfrac{3c_{21}(x^1)}{[x^2+c_2(x^1)]^2}\end{cases}$，其中 $c_{12}(x^2)$ 表示 $c_1(x^2)$ 关于 x^2 求导，$c_{21}(x^1)$ 表示 $c_2(x^1)$ 关于 x^1 求导。由(11)式可知 $\varphi_{12}=\varphi_{21}$ 且 $\varphi_1\varphi_2=3\varphi_{12}$，从而有 $c_{12}(x^2)c_{21}(x^1)=1$，这表明存在 2^2 个非零常数 $t_{1,2},t_{2,1},t_1,t_2$ 使得$\begin{cases}c_1(x^2)=t_{1,2}x^2+t_1\\ c_2(x^1)=t_{2,1}x^1+t_2\end{cases}$，且 $t_{1,2}$ 与 $t_{2,1}$ 满足 $t_{1,2}\cdot t_{2,1}=1$。由此可知 $n=2$ 时结论成立。

(b) 假设 $n=k-1$ 时，结论成立。即 $\exists(k-1)^2$ 个常数 $t_{i,j}(t_{i,j}\neq 0)$ 和 $t_l(i,j,l=1,2,\cdots,k-1$ 且 $i\neq j)$，s. t.

$$\begin{cases}c_1(x^2,x^3,\cdots,x^{k-1})=t_{1,2}x^2+t_{1,3}x^3+\cdots+t_{1,k-1}x^{k-1}+t_1,\\ c_2(x^1,x^3,\cdots,x^{k-1})=t_{2,1}x^1+t_{2,3}x^3+\cdots+t_{2,k-1}x^{k-1}+t_2,\\ \qquad\vdots\\ c_{k-1}(x^1,x^2,\cdots,x^{k-2})=t_{k-1,1}x^1+t_{k-1,2}x^2+\cdots+t_{k-1,k-2}x^{k-2}+t_{k-1},\end{cases}$$

且 $t_{i,j}$ 与 $t_{j,i}$ 满足 $t_{i,j}\cdot t_{j,i}=1(i,j=1,2,\cdots,k-1$ 且 $i\neq j)$。

(c) 当 $n=k$ 时，由上述假设可知 $c_i(x^1,\cdots x^{i-1},x^{i+1},\cdots,x^{k-1},x^k)$ 关于 $(x^1,\cdots x^{i-1},x^{i+1},\cdots x^{k-1})$ 是线性的，但 $c_i(x^1,\cdots x^{i-1},x^{i+1},\cdots,x^{k-1},x^k)$ 关于 x^k 的是未知的，因此 $\exists(k-1)^2$ 个非零常数 $t_{i,j}$ 及 $k-1$ 个函数 $t_l(i\neq j$ 且 $i=1,2,\cdots,k;j,l=1,2,\cdots,k-1)$，s. t.

$$\begin{cases}c_1(x^2,x^3,\cdots,x^{k-1},x^k)=t_{1,2}x^2+t_{1,3}x^3+\cdots+t_{1,k-1}x^{k-1}+t_1(x^k),\\ c_2(x^1,x^3,\cdots,x^{k-1},x^k)=t_{2,1}x^1+t_{2,3}x^3+\cdots+t_{2,k-1}x^{k-1}+t_2(x^k),\\ \qquad\vdots\\ c_{k-1}(x^1,x^2,\cdots,x^{k-2},x^k)=t_{k-1,1}x^1+t_{k-1,2}x^2+\cdots+t_{k-1,k-2}x^{k-2}+t_{k-1}(x^k),\\ c_k(x^1,x^2,\cdots,x^{k-2},x^{k-1})=t_{k,1}x^1+t_{k,2}x^2+\cdots+t_{k,k-2}x^{k-2}+t_{k,k-1}x^{k-1},\end{cases}\tag{16}$$

且 $t_{i,j}$ 与 $t_{j,i}$ 满足 $t_{i,j}\cdot t_{j,i}=1(i,j=1,2,\cdots,k-1$ 且 $i\neq j)$。

下面证明(16)式中 $t_l(x^k)$ 关于 x^k 也是线性的$(l=1,2,\cdots,k-1)$。

事实上，由(11)式可知，$\varphi_{lk}=\varphi_{kl}$ 且 $\varphi_l\varphi_k=(k+1)\varphi_{lk}$，从而有 $t_{lk}(x^k)\cdot t_{k,l}=1$，其中，$t_{lk}(x^k)$ 表示 $t_l(x^k)$ 关于 x^k 求导。因为 $t_{k,l}$ 是非零常数，因此上式等价于 $t_{lk}(x^k)=\dfrac{1}{t_{k,l}}$，这表明存在非零常数 $t_{l,k}$ 及任意常数 t_l 使得 $t_l(x^k)=t_{l,k}x^k+t_l$，由此表明，当 $n=k$ 时，$c_i(x^1,\cdots,x^{i-1},x^{i+1},\cdots,x^{k-1},x^k)$ 关于 $(x^1,\cdots,x^{i-1},x^{i+1},\cdots,x^k)$ 是线性的，结论成立。

综合(a)，(b)，(c)可知，对于 $\forall n\in\mathbf{N}$，$c_i(\hat{x}^i):=c_i(x^1,\cdots,x^{i-1},x^{i+1},\cdots,x^n)$ 关于 $(x^1,\cdots,x^{i-1},x^{i+1},\cdots,x^n)$ 是线性的，因此有：

$$\varphi(\boldsymbol{x})=-(n+1)\ln(a_1x^1+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+c),\tag{17}$$

这里 c 是一个常数，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是非零常数，$\boldsymbol{x}=(x^i)\in\mathbf{R}^n$ 且 $x^i\neq 0$。上式整理后等价于：

$$\varphi(\boldsymbol{x})=\ln\frac{1}{[c+\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}\rangle]^{n+1}}。\tag{18}$$

2) 若 $\exists i\in\{1,2,\cdots,n\}$，使得 $\varphi_i(\boldsymbol{x})=0$，则 $\varphi(\boldsymbol{x})=g(\hat{x}^i)$，这表明 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 个分量为零。对于 $\varphi_j(\boldsymbol{x})\neq 0,j\in\{1,\cdots,n\}$ 且 $j\neq i$，讨论回到情形 1)，最终可得 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 的表达也形如(18)式，只是 $\boldsymbol{x}$ 的某些分量为零。

综上，引理得证。　证毕

证明(定理 1)　一般地，若 $G^i=Py^i$，则由(6)式可知：

$$R^i_k=\Xi\delta^i_k+\omega_ky^i,\tag{19}$$

这里，$\Xi:=P^2-P_{x^k}y^k$，$\omega_k:=3(P_{x^k}-PP_{y^k})+\Xi_{y^k}$[8]。现在对于 $\widetilde{G}^i=\tau\Theta y^i$，$\tau$ 是常数，结合(10)式有：

$$\widetilde{\Xi}:=\widetilde{P}^2-\widetilde{P}_{x^k}y^k=(\tau^2-\tau)\Theta^2,\ \widetilde{\omega}_k:=3(\widetilde{P}_{x^k}-\widetilde{P}\widetilde{P}_{y^k})+\widetilde{\Xi}_{y^k}=(\tau-\tau^2)\Theta\Theta_{y^k},$$

从而根据(19)式得 $\widetilde{R}^i_k=(\tau^2-\tau)(\Theta^2\delta^i_k-\Theta\Theta_{y^k}y^i)$。

进一步,由(7)式得:

$$\widetilde{\mathrm{Ric}}=\widetilde{R}^m_m=(n-1)(\tau^2-\tau)\Theta^2。\tag{20}$$

记 $\varphi=\ln\sigma(\boldsymbol{x})$,$\varphi_0=\varphi_{x^i}y^i$。由(8)式及$\widetilde{G}^i=\tau\Theta y^i$,有$\widetilde{G}$的 S-曲率为:

$$\widetilde{\mathrm{S}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(n+1)\tau\Theta-\varphi_0,\tag{21}$$

通过直接计算有$\dfrac{\partial\widetilde{\mathrm{S}}}{\partial x^m}y^m=(n+1)\tau\Theta^2-\varphi_{00}$,$2\widetilde{G}^m\dfrac{\partial\widetilde{\mathrm{S}}}{\partial y^m}=2(n+1)\tau^2\Theta^2-2\tau\Theta\varphi_0$,从而有:

$$\widetilde{\mathrm{S}}_{|m}y^m=\frac{\partial\widetilde{\mathrm{S}}}{\partial x^m}y^m-2\widetilde{G}^m\frac{\partial\widetilde{\mathrm{S}}}{\partial y^m}=(n+1)(\tau-2\tau^2)\Theta^2+2\tau\Theta\varphi_0-\varphi_{00},\tag{22}$$

这里,$\varphi_{00}=\varphi_{x^ix^j}y^iy^j$。进一步则有:

$$\frac{n-1}{n+1}\widetilde{\mathrm{S}}_{|m}y^m=(n-1)\left[(\tau-2\tau^2)\Theta^2+\frac{1}{n+1}(2\tau\Theta\varphi_0-\varphi_{00})\right],\tag{23}$$

$$\frac{n-1}{(n+1)^2}\widetilde{\mathrm{S}}^2=(n-1)\left[\tau^2\Theta^2+\frac{\varphi_0^2}{(n+1)^2}-\frac{2\tau\Theta\varphi_0}{n+1}\right],\tag{24}$$

因此,将(20),(23),(24)代入(9)式得:

$$\widetilde{\mathrm{PRic}}=(n-1)\left[\frac{\varphi_0^2}{(n+1)^2}-\frac{\varphi_{00}}{n+1}\right],\tag{25}$$

由此,$\widetilde{G}$是射影 Ricci-平坦的当且仅当 $\varphi_0^2-(n+1)\varphi_{00}=0$,即:

$$\varphi_i\varphi_j-(n+1)\varphi_{ij}=0,\tag{26}$$

由引理 1 可知 $\varphi(\boldsymbol{x})=\ln\dfrac{1}{[c+\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}\rangle]^{n+1}}$,这里,$c$ 是一个常数,$\boldsymbol{a}$ 是一个常向量,$\boldsymbol{x}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中任意一个向量。因为$\varphi=\ln\sigma(\boldsymbol{x})$,因此 $\sigma(\boldsymbol{x})=\dfrac{1}{[c+\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}\rangle]^{n+1}}$。 证毕

证明(定理 2) 因为$\widetilde{G}^i=\tau\Theta y^i$,$\tau=\dfrac{1}{2}+\delta$ 是常数且 Funk 度量 Θ 的旗曲率为 $\lambda=-\dfrac{1}{4}$,则由文献[5]可知$\widetilde{G}$可由一个芬斯勒度量$\widetilde{F}$诱导当且仅当 $\delta^2-\dfrac{1}{4}=0$ 或 $\delta=0$,这等价于 $\tau=0,1,\dfrac{1}{2}$。在此情形下,结合(25)式知,$\widetilde{F}$具有弱射影 Ricci 曲率,即$\widetilde{\mathrm{PRic}}=(n-1)\left[\dfrac{3\xi}{\widetilde{F}}+k\right]\widetilde{F}^2=(n-1)(3\xi\widetilde{F}+k\widetilde{F}^2)$,当且仅当:

$$(n+1)^2k\widetilde{F}^2+3(n+1)^2\xi\widetilde{F}+(n+1)\varphi_{00}-\varphi_0^2=0,\tag{27}$$

这里,$\varphi=\ln\sigma(\boldsymbol{x})$,$\varphi_0=\varphi_{x^i}y^i$,$\varphi_{00}=\varphi_{x^ix^j}y^iy^j$,$\xi=\xi_i(\boldsymbol{x})y^i$ 是一个 1-形式,$k=k(\boldsymbol{x})$是一个 M 上的标量函数。当 $k=\xi=0$ 时,即$\widetilde{F}$是射影 Ricci-平坦的,由(27)式易知,$\widetilde{G}$是射影 Ricci-平坦的,回到定理 1 的情形。下面讨论$\widetilde{F}$不是射影 Ricci-平坦的情形。

1) 当 $k=0$ 且 $\xi\neq0$ 时,(27)式等价于 $3(n+1)^2\xi\widetilde{F}+(n+1)\varphi_{00}-\varphi_0^2=0$,解得$\widetilde{F}=\dfrac{\varphi_0^2-(n+1)\varphi_{00}}{3(n+1)^2\xi}$,此时$\widetilde{F}$是一个 Kropina 度量。

2) 当 $k\neq0$ 且 $\xi\neq0$ 时,通过(27)式解得$\widetilde{F}=\dfrac{-3(n+1)\xi+\sqrt{9(n+1)^2\xi^2+4k[\varphi_0^2-(n+1)\varphi_{00}]}}{2(n+1)k}$,此时,$\widetilde{F}$是一个 Randers 度量。在此情形下,若 $\xi=0$ 时,则有$\widetilde{F}=\dfrac{\sqrt{k[\varphi_0^2-(n+1)\varphi_{00}]}}{(n+1)k}$,此时$\widetilde{F}$是一个黎曼度量。

综上,定理 2 得证。 证毕

由定理 2 可知,在$\widetilde{G}$可由一个芬斯勒度量$\widetilde{F}$诱导且$\widetilde{F}$具有弱射影 Ricci 曲率的条件下,可以初步确定$\widetilde{F}$的结构。

参考文献:

[1] SHEN Z M. Differential geometry of Spray and Finsler spaces[M]. Netherlands:Kluwer Academic Publishers, 2001.

[2] 程新跃,马小玉,沈玉玲.射影 Ricci 曲率及其射影不变[J].西南大学学报(自然科学版),2015,37(8):92-96.

CHENG X Y, MA X Y, SHEN Y L. Projective Ricci curvature and its projective invariance[J]. Journal of Southwest University (Natural Science Edition), 2015, 37(8): 92-96.

[3] CHENG X Y, SHEN Y L, MA X Y. On a class of projective Ricci flat Finsler metrics[J]. Publ Math Debrecen, 2017, 90(1/2): 169-180.

[4] ZHU H M, ZHANG H X. Projective Ricci flat spherically symmetric Finsler metrics[J]. International Journal of Mathematics, 2018, 29(11): 1850078.

[5] YANG G J. Some classes of Spray in projective geometry[J]. Differential Geom Appl, 2011, 29(4): 606-614.

[6] CHENG X Y, SHEN Z M. A comparison theorem on the Ricci curvature in projective geometry[J]. Ann Global Anal, 2003, 23(2): 141-155.

[7] LI B L, SHEN Z M. Spray of isotropic curvature[J]. International Journal of Mathematics, 2018, 29(1): 37-48.

[8] CHERN S S, SHEN Z M. Riemann-Finsler geometry[M]. Singapore: World Scientific Publishing Company, 2005.

On a Class of Spray of Weakly Projective Ricci Curvature and Its Finsler Metrizability

CHENG Xinyue[1], GONG Yannian[2], LI ming[2]

(1. School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331;

2. School of Sciences, Chongqing University of Technology, Chongqing 400054, China)

Abstract: [**Purposes**]It is important to study the curvature properties and Finsler metrizability of a Spray in Spray geometry. It makes sense to study a kind of projective flat Spray $\widetilde{G}$ constructed by Funk metric Θ, which satisfying $\widetilde{G}^i=\tau\Theta y^i$ and τ is a constant. [**Methods**]Calculating the projective Ricci curvature of $\widetilde{G}$. Furthermore, the Finsler metrizability of $\widetilde{G}$ can be studied under certain conditions of projective Ricci curvature. [**Findings**]On the one hand, under the condition that $\widetilde{G}$ is projective Ricci flat, the volume form of manifold can be determined. On the other hand, suppose $\widetilde{G}$ can be induced by Finsler metric $\widetilde{F}$ with weak projective Ricci curvature and not projective Ricci flat, then the structure of $\widetilde{F}$ can be determined. [**Conclusions**]The Finsler metric $\widetilde{F}$ with weak projective Ricci curvature is preliminarily classified here.

Keywords: projective Ricci curvature; Funk metric; Spray; Finsler metrizability

(责任编辑　黄　颖)