

# 分数阶电报方程的各种精确解析解及动力学性质\*

张琴, 吴春

(重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331)

**摘要:**【目的】研究3类经典的分数阶电报方程的精确求解问题。【方法】利用分离变量法与齐次平衡原理相结合的方法, 并利用特殊的变换。【结果】获得了空间分数阶电报方程、时间分数阶电报方程以及时间-空间分数阶电报方程的各种精确解, 进一步分析讨论了这些解的动力学性质和演化现象, 并给出了部分精确解随时间和空间发展演化的坐标图。【结论】与文献中的结果相比, 获得的精确解大部分都是新结果, 而且求解方法和技巧较之前文献中的要简便许多。

**关键词:**分数阶电报方程; 分离变量法; 齐次平衡原理; 精确解

**中图分类号:** O221.6

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1672-6693(2019)06-0064-07

随着分数阶微积分理论的发展, 分数阶偏微分方程的求解越来越受到人们的广泛关注和研究, 因为这类方程可以用来精准地描述许多科学研究领域中的一些奇特现象, 如记忆现象、反常扩散现象等。事实上, 随着研究的深入, 人们逐渐发现了自然科学以及工程应用领域中的一些复杂问题和特殊现象都可以通过分数阶微分模型来加以刻画, 并用它们的解来解释一些现象。如今, 分数阶微分方程已经被成功地应用于反常扩散和热传导<sup>[1]</sup>、黏弹性流体力学<sup>[2]</sup>、信号处理与控制<sup>[3]</sup>、图像处理、电力分形网络等诸多科学领域, 因而此类方程应用的广泛性和重要性不言而喻。

由于精确解能够更加精准地解释和揭示分数阶微分方程模型所蕴含的相关动力学性质、动力学行为以及事物发展变化现象的内在规律性, 因此对分数阶微分方程的精确求解及求解方法进行研究显得十分重要。随着计算技术的快速发展, 许多有效的分数阶微分方程的求解方法也在不断地被提出, 例如积分分支法<sup>[4]</sup>、格林函数法<sup>[5]</sup>、Adomian 解法<sup>[6]</sup>、同伦函数法<sup>[7]</sup>、分离变量法<sup>[8]</sup>、首次积分法<sup>[9]</sup>、齐次平衡法<sup>[10]</sup>、李群理论方法<sup>[11]</sup>等。然而, 上述方法既具有某些优点, 又具有某些局限性。对于更加复杂的分数阶微分模型, 并不存在哪一种方法具有普遍的适用性。因此, 学者们还在不断地探究分数阶微分方程的各种新解方法。最近, 芮伟国<sup>[12-13]</sup>提出了求解分数阶偏微分方程的精确解的一种新方法, 他称之为分离变量法与齐次平衡原理相结合的方法, 该方法有效地解决了一系列复杂的分数阶偏微分方程的精确求解问题。

由于分数阶微分方程具有复杂性, 因此它们的解析解往往需要通过一些特殊函数来表达, 例如: Wyss<sup>[14]</sup>给出了时间分数阶扩散波方程的解析解, 这些解含有 Fox-H 函数; Gorenflo 等人<sup>[15]</sup>获得了时间分数阶扩散波方程的解析解, 这些解含有 Wright 函数; Agrawal<sup>[16]</sup>研究了具有 Caputo 导数的时间分数阶扩散波方程并给出了在有界区域上带有 Mittag-Leffler 函数的解析解; 黄潇和芮伟国<sup>[17]</sup>利用 Laplace 变换法获得了分数阶广义 Bagley-Torvik 方程的各种精确解, 其中一部分解亦含有 Mittag-Leffler 函数。

本文在文献[12-13]中提出的分离变量法与齐次平衡原理相结合方法的基础上, 利用新的运算技巧, 研究了3类分数阶电报方程求精确解的问题。

## 1 分数阶电报模型的背景

在整数阶微积分领域, 经典的电报方程表示为:

\* 收稿日期: 2019-03-31 修回日期: 2019-09-04 网络出版时间: 2019-11-25 10:35

资助项目: 国家自然科学基金(No. 11361023; No. 61673078); 重庆市科学技术委员会科学研究项目(No. cstc2018jcyjAX0766); 重庆市教育委员会科学技术研究项目(No. KJ1703060)

第一作者简介: 张琴, 女, 研究方向为偏微分方程, E-mail: 1154919573@qq.com; 通信作者: 吴春, 男, 副教授, 博士, E-mail: wuchun1997@163.com

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20191125.1034.038.html>

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}V(x,t) - LC \frac{\partial^2}{\partial t^2}V(x,t) - (RC+GL) \frac{\partial}{\partial t}V(x,t) - GRV(x,t) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}I(x,t) - LC \frac{\partial^2}{\partial t^2}I(x,t) - (RC+GL) \frac{\partial}{\partial t}I(x,t) - GRI(x,t) = 0, \quad (2)$$

其中:  $V$  表示电压,  $I$  表示电流,  $x$  表示线路长度,  $t$  表示时间, 均为变量;  $R$  表示电阻,  $L$  表示电感,  $C$  表示电容,  $G$  表示分隔导体介质材料的电导率(绝缘材料的电导率为零), 均为常量。显然, 从数学的角度来看, 方程(1)式和(2)式是同一个方程, 因此, 这里只对方程(1)式作推广讨论。由于某些电器元件具有记忆性, 需要在分数阶情况下进行讨论, 还有一些导电材料是一些特殊合金材料做成的, 具有反常扩散的特性, 也需要在分数阶模型下进行求解研究。为此, 文献[18]把整数阶的模型(1)推广到分数阶领域进行了系统的研究, 即作以下尺度变换:

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{1}{\sigma_x^{1-\alpha}} \cdot \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}, \quad n-1 < \alpha \leq n,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{1}{\sigma_t^{1-\beta}} \cdot \frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta}, \quad n-1 < \beta \leq n,$$

从而将方程(1)式转化为下列形式的分数阶电报方程:

$$\frac{1}{\sigma_x^{2(1-\alpha)}} \cdot D_x^\alpha [D_x^\alpha V(x,t)] - \frac{LC}{\sigma_t^{2(1-\beta)}} \cdot D_t^\beta [D_t^\beta V(x,t)] - \frac{RC+GL}{\sigma_t^{1-\beta}} \cdot D_t^\beta V(x,t) - GRV(x,t) = 0, \quad (3)$$

其中:  $D_x^\alpha = \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}$ ,  $D_t^\beta = \frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta}$  均为 Riemann-Liouville 型分数阶微分算子或 Caputo 型分数阶微分算子; 参数  $\sigma_x, \sigma_t$  表示从整数阶空间到分数阶空间的尺度换算量纲(换算率), 均为常量。

如果用  $\frac{\partial^{2\alpha}}{\partial x^{2\alpha}}$  去代替  $D_x^\alpha \cdot D_x^\alpha$ , 用  $\frac{\partial^{2\beta}}{\partial t^{2\beta}}$  去代替  $D_t^\beta \cdot D_t^\beta$ , 则方程(3)式就变成文献[18]中的下列分数阶电报方程:

$$\frac{1}{\sigma_x^{2(1-\alpha)}} \cdot \frac{\partial^{2\alpha} V(x,t)}{\partial x^{2\alpha}} - \frac{LC}{\sigma_t^{2(1-\beta)}} \cdot \frac{\partial^{2\beta} V(x,t)}{\partial t^{2\beta}} - \frac{RC+GL}{\sigma_t^{1-\beta}} \cdot \frac{\partial^\beta V(x,t)}{\partial t^\beta} - GRV(x,t) = 0. \quad (4)$$

特别地, 如果电路中没有电感线圈, 并且介质材料的绝缘效果很好, 那么在方程(4)式中可视为  $L=G=0$ ; 类似地, 如果电路中没有电阻器, 并且介质材料的绝缘效果很好, 那么在方程(4)式中可视为  $R=G=0$ 。在这两种特殊情况下, 方程(4)式分别变为下列两类子方程, 即经典的分数阶扩散方程和分数阶波方程:

$$\frac{1}{\sigma_x^{2(1-\alpha)}} \cdot \frac{\partial^{2\alpha} V(x,t)}{\partial x^{2\alpha}} - \frac{RC}{\sigma_t^{1-\beta}} \cdot \frac{\partial^\beta V(x,t)}{\partial t^\beta} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{1}{\sigma_x^{2(1-\alpha)}} \cdot \frac{\partial^{2\alpha} V(x,t)}{\partial x^{2\alpha}} - \frac{LC}{\sigma_t^{2(1-\beta)}} \cdot \frac{\partial^{2\beta} V(x,t)}{\partial t^{2\beta}} = 0. \quad (6)$$

其中  $0 < \alpha \leq 1, 0 < \beta \leq 1$ 。本文将利用文献[12-13]中提出的方法求解方程(3)式、(5)式和(6)式的各类精确解。

## 2 分数电报方程的精确解与动力学性质

在方程(3)式中, 如果空间部分的导数是分数阶导数, 时间部分的导数是整数阶导数, 即当  $0 < \alpha < 1, \beta = 1$  时, 方程(3)式可化为:

$$PD_x^\alpha [D_x^\alpha V(x,t)] - M \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2} - N \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} - QV(x,t) = 0, \quad (7)$$

其中  $P = \frac{1}{\sigma_x^{2(1-\alpha)}}, M = LC, N = RC + GL, Q = GR$ , 均为常量, 这是一个空间分数阶电报方程。

求解分数阶偏微分方程(7)式的传统方法是将方程两边对时间变量  $t$  作 Laplace 变换, 再对空间变量  $x$  做 Fourier 变换, 然后分别做它们的反演逆变换, 理论上可以获得方程(7)式的精确解。然而, 由于方程的项数太多, 要想通过此方法获得它的精确解十分困难。如果利用文献[12-13]中的方法, 那么将会很容易得获得方程(7)式的精确解, 即假设方程(7)式有如下形式的解:

$$V = [h_0 + h_1 u(t)] E_\alpha(\lambda x^\alpha), \quad (8)$$

其中:  $h_0, h_1, \lambda$  是待定常数, 且  $h_1 \neq 0, \lambda \neq 0, u = u(t)$  是关于  $t$  的待定函数。单参数 Mittag-Leffler 函数定义为

$E_\alpha(\lambda x^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$  且  $D_x^\alpha E_\alpha(\lambda x^\alpha) = \lambda E_\alpha(\lambda x^\alpha)$ 。将(8)式代入(7)式后整理得:

$$\left[ Mu_u + Nu_t + (Q - P\lambda^2)u - (P\lambda^2 - Q)\frac{h_0}{h_1} \right] E_\alpha(\lambda x^\alpha) = 0. \quad (9)$$

在方程(9)式中, 让  $E_\alpha(\lambda x^\alpha)$  的系数等于 0, 从而得:

$$Mu_u + Nu_t + (Q - P\lambda^2)u - (P\lambda^2 - Q)\frac{h_0}{h_1} = 0.$$

求解这个线性微分方程得:

$$u_1 = c_1 \exp\left(\frac{-N + \sqrt{N^2 - 4M(Q - P\lambda^2)}}{2M}t\right) + c_2 \exp\left(\frac{-N - \sqrt{N^2 - 4M(Q - P\lambda^2)}}{2M}t\right) - \frac{h_0}{h_1}, \quad (10)$$

$$u_2 = e^{-\frac{N}{2M}t} \left[ c_3 \cos\left(\frac{\sqrt{4M(Q - P\lambda^2) - N^2}}{2M}t\right) + c_4 \sin\left(\frac{\sqrt{4M(Q - P\lambda^2) - N^2}}{2M}t\right) \right] - \frac{h_0}{h_1}. \quad (11)$$

再将(10)式和(11)式分别代入(8)式可得方程(7)式的两个精确解:

$$V_1 = \left( h_1 c_1 \exp\left(\frac{-N + \sqrt{N^2 - 4M(Q - P\lambda^2)}}{2M}t\right) + h_1 c_2 \exp\left(\frac{-N - \sqrt{N^2 - 4M(Q - P\lambda^2)}}{2M}t\right) \right) E_\alpha(\lambda x^\alpha), \quad (12)$$

$$V_2 = h_1 e^{-\frac{N}{2M}t} \left[ c_3 \cos\left(\frac{\sqrt{4M(Q - P\lambda^2) - N^2}}{2M}t\right) + c_4 \sin\left(\frac{\sqrt{4M(Q - P\lambda^2) - N^2}}{2M}t\right) \right] E_\alpha(\lambda x^\alpha). \quad (13)$$

其中  $c_1, c_2, c_3, c_4$  为任意非零常数。解(12)式整体上是一个无界的解, 即  $V \rightarrow \infty (x \rightarrow +\infty)$ , 解(13)式随着时间的增加而衰减, 即  $V \rightarrow 0 (t \rightarrow +\infty)$ 。

类似地, 假设时间部分的导数是分数阶导数, 空间部分的导数是整数阶导数, 即当  $0 < \beta < 1, \alpha = 1$  时, 方程(3)式可化为如下的时间分数阶电报方程

$$\frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} - \frac{M}{P_1} \cdot D_t^\beta [D_t^\beta V(x, t)] - \frac{N}{P_2} \cdot D_t^\beta V(x, t) - QV(x, t) = 0, \quad (14)$$

其中  $P_1 = \sigma_t^{2(1-\beta)}, P_2 = \sigma_t^{1-\beta}, M = LC, N = RC + GL, Q = GR$ , 均为常量。

同样假设方程(14)式有如下形式的解:

$$V = [h_0 + h_1 u(x)] E_\beta(\lambda t^\beta), \quad (15)$$

其中  $h_0, h_1, \lambda$  是待定常数且  $h_1 \neq 0, \lambda \neq 0, u = u(x)$  是关于  $x$  的待定函数。将(15)式代入(14)式后整理得:

$$\left[ u_{xx} - \left( \frac{M\lambda^2}{P_1} + \frac{N\lambda}{P_2} + Q \right) u - \left( \frac{M\lambda^2}{P_1} + \frac{N\lambda}{P_2} + Q \right) \frac{h_0}{h_1} \right] E_\beta(\lambda t^\beta) = 0. \quad (16)$$

在方程(16)式中, 让  $E_\beta(\lambda t^\beta)$  的系数等于 0 可得:

$$u_{xx} - \left( \frac{M\lambda^2}{P_1} + \frac{N\lambda}{P_2} + Q \right) u - \left( \frac{M\lambda^2}{P_1} + \frac{N\lambda}{P_2} + Q \right) \frac{h_0}{h_1} = 0.$$

求解这个线性微分方程得:

$$u_1 = c_1 \exp\left(\sqrt{\frac{M\lambda^2}{P_1} + \frac{N\lambda}{P_2} + Q} \cdot x\right) + c_2 \exp\left(-\sqrt{\frac{M\lambda^2}{P_1} + \frac{N\lambda}{P_2} + Q} \cdot x\right) - \frac{h_0}{h_1}, \quad (17)$$

$$u_2 = c_3 \cos\left(\sqrt{-\frac{M\lambda^2}{P_1} - \frac{N\lambda}{P_2} - Q} \cdot x\right) + c_4 \sin\left(\sqrt{-\frac{M\lambda^2}{P_1} - \frac{N\lambda}{P_2} - Q} \cdot x\right) - \frac{h_0}{h_1}. \quad (18)$$

再将(17)式和(18)式分别代入(15)式可得方程(14)式的两个精确解:

$$V_1 = \left[ h_1 c_1 \exp\left(\sqrt{\frac{M\lambda^2}{P_1} + \frac{N\lambda}{P_2} + Q} \cdot x\right) + h_1 c_2 \exp\left(-\sqrt{\frac{M\lambda^2}{P_1} + \frac{N\lambda}{P_2} + Q} \cdot x\right) \right] E_\beta(\lambda t^\beta), \quad (19)$$

$$V_2 = \left[ h_1 c_3 \cos\left(\sqrt{-\frac{M\lambda^2}{P_1} - \frac{N\lambda}{P_2} - Q} \cdot x\right) + h_1 c_4 \sin\left(\sqrt{-\frac{M\lambda^2}{P_1} - \frac{N\lambda}{P_2} - Q} \cdot x\right) \right] E_\beta(\lambda t^\beta). \quad (20)$$

其中  $c_1, c_2, c_3, c_4$  为任意非零常数。解(19)式整体上是一个无界的解, 即  $V \rightarrow \infty (t \rightarrow +\infty)$ 。解(20)式整体上是一个具有周期性解的衰减解。为了更好地体现上述解的动力学性质, 图 1 给出了解(19)式以及解(20)式的三维坐标图形。在图 1a 中, 解(19)式坐标图的各参数取值为  $\lambda = 0.5, M = 0.5, N = 0.5, Q = 0.75, P_1 = 1, P_2 = 0.7, h_1 = 0.5, c_1 = 0.5, c_2 = 1, \beta = 0.75$ 。在图 1b 中, 解(20)式坐标图的各参数取值为  $\lambda = -0.2, M = 1, N = 0.5, Q = 0.02, P_1 = 1, P_2 = 0.6, h_1 = 0.5, c_3 = 0.5, c_4 = 1, \beta = 0.75$ 。

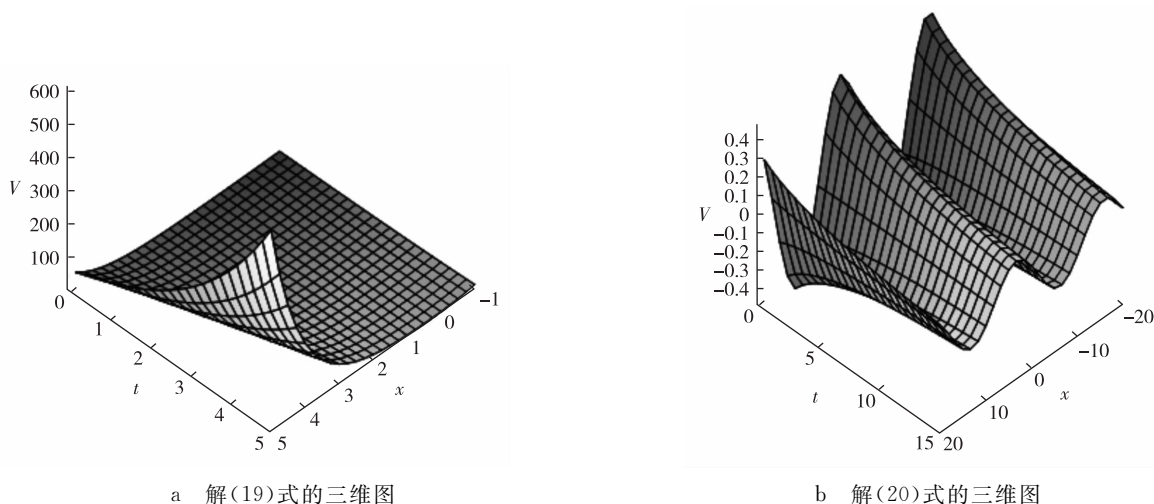


图 1 解(19)式和解(20)式的动力学行为演化图

Fig. 1 Graphs of dynamical behavior evolution of solution (19) and solution (20)

如果空间部分和时间部分的导数都是分数阶导数,即当  $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1$  时,方程(3)式可化为时间-空间分数阶电报方程:

$$PD_x^\alpha [D_x^\alpha V(x, t)] - \frac{M}{P_1} \cdot D_t^\beta [D_t^\beta V(x, t)] - \frac{N}{P_2} \cdot D_t^\beta V(x, t) - QV(x, t) = 0, \tag{21}$$

其中:  $P = \frac{1}{\sigma_x^{2(1-\alpha)}}$ ,  $M = LC$ ,  $N = RC + GL$ ,  $P_1 = \sigma_t^{2(1-\beta)}$ ,  $P_2 = \sigma_t^{1-\beta}$ ,  $Q = GR$  均为常量。

这里假定方程(21)式有如下形式的解:

$$V = hE_\alpha(\lambda_1 x^\alpha)E_\beta(\lambda_2 t^\beta), \tag{22}$$

其中  $h, \lambda_1, \lambda_2$  是待定常数且  $h \neq 0, \lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$ 。将(22)式代入(21)式后整理得:

$$\left(P\lambda_1^2 - \frac{M\lambda_2^2}{P_1} - \frac{N\lambda_2}{P_2} - Q\right)hE_\alpha(\lambda_1 x^\alpha)E_\beta(\lambda_2 t^\beta) = 0. \tag{23}$$

在方程(23)式中,令  $E_\alpha(\lambda_1 x^\alpha)E_\beta(\lambda_2 t^\beta)$  的系数为 0,可得:

$$\lambda_1 = \pm \sqrt{\frac{1}{P} \left( \frac{M\lambda_2^2}{P_1} + \frac{N\lambda_2}{P_2} + Q \right)}. \tag{24}$$

再将(24)式代入(22)式可得方程(21)式的两个精确解:

$$V = hE_\alpha \left( \sqrt{\frac{1}{P} \left( \frac{M\lambda_2^2}{P_1} + \frac{N\lambda_2}{P_2} + Q \right)} \cdot x^\alpha \right) E_\beta(\lambda_2 t^\beta), \tag{25}$$

$$V = hE_\alpha \left( -\sqrt{\frac{1}{P} \left( \frac{M\lambda_2^2}{P_1} + \frac{N\lambda_2}{P_2} + Q \right)} \cdot x^\alpha \right) E_\beta(\lambda_2 t^\beta). \tag{26}$$

解(25)式整体上是一个无界的解,即  $V \rightarrow \infty (t \rightarrow +\infty)$ ,解(26)式整体上随空间的扩展而衰减,即  $V \rightarrow 0 (x \rightarrow +\infty)$ 。

### 3 分数阶电报方程的一些特殊情况

对于分数阶电报方程(4)式,文献[18]只讨论了  $\alpha = 1$  或者  $\beta = 1$  两种特殊情况,即分数阶扩散方程(5)式和分数阶波方程(6)式。这里同样可以用文献[12-13]中的方法来研究方程(4)式在这两种特殊情况下的精确解。

特别地,当  $0 < \alpha < 1, \beta = 1$  时,方程(5)式可化为如下空间分数阶扩散方程

$$\frac{\partial^{2\alpha} V}{\partial x^{2\alpha}} - \kappa^2 \frac{\partial V}{\partial t} = 0, \tag{27}$$

其中:  $V = V(x, t)$ ;  $\kappa^2 = \sigma_x^{2(1-\alpha)} RC$ , 均为常数。又当  $0 < \beta < 1, \alpha = 1$  时,方程(5)式可化为时间分数阶扩散方程:

$$\frac{\partial^\beta V}{\partial t^\beta} - \omega^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0, \tag{28}$$

其中:  $V=V(x, t)$ ;  $\omega^2=\sigma_i^{-\beta}/RC$ , 为常数。当  $0<\alpha<1, \beta=1$  时, 方程(6)式可化为空间分数阶波方程:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - p^2 \frac{\partial^{2\alpha} V}{\partial x^{2\alpha}} = 0, \quad (29)$$

其中:  $V=V(x, t)$ ;  $p^2=1/\sigma_x^{2(1-\alpha)}LC$ , 为常数。当  $0<\beta<1, \alpha=1$  时, 方程(6)式可化为时间分数阶波方程:

$$\frac{\partial^{2\beta} V}{\partial t^{2\beta}} - q^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0, \quad (30)$$

其中:  $V=V(x, t)$ ;  $q^2=\frac{\sigma_r^{2(1-\beta)}}{LC}$ , 为常数。下面利用文献[12-13]的方法, 通过一系列的运算来获得上述子方程的各类精确解。

假设方程(27)式具有形如  $V=[a_0+a_1 u(t)]E_{2\alpha}(\lambda x^{2\alpha})$  的解, 将它代入(27)式后通过一系列计算后整理可得方程(27)式的一个精确解:

$$V=a_1 c \exp\left(\frac{\lambda}{\kappa} t\right) E_{2\alpha}(\lambda x^{2\alpha}), \quad (31)$$

其中  $c$  为任意非零常数。当  $\lambda>0$  时, 解(31)式整体上是一个无界的解, 即  $V\rightarrow\infty(x\rightarrow+\infty)$ 。而当  $\lambda<0$  时, 解(31)式随着空间的扩展而衰减, 即  $V\rightarrow 0(x\rightarrow+\infty)$ 。

类似地, 假设方程(28)式具有形如  $V=[a_0+a_1 u(x)]E_{\beta}(\lambda t^{\beta})$  的解, 代入方程(28)式, 便可得到方程(28)式的两个精确解:

$$V_1=\left(a_1 c_1 \exp\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\omega^2}} x\right)+a_1 c_2 \exp\left(-\sqrt{\frac{\lambda}{\omega^2}} x\right)\right) E_{\beta}(\lambda t^{\beta}), \quad (32)$$

$$V_2=\left(a_1 c_3 \cos\left(\sqrt{\frac{-\lambda}{\omega^2}} x\right)+a_1 c_4 \sin\left(\sqrt{\frac{-\lambda}{\omega^2}} x\right)\right) E_{\beta}(\lambda t^{\beta}), \quad (33)$$

其中  $c_1, c_2, c_3, c_4$  为任意非零常数。解(32)式整体上是一个无界的解, 即  $V\rightarrow\infty(t\rightarrow+\infty)$ 。解(33)式整体上是一个具有周期解性的衰减解。为了更好地体现解(32)式和解(33)式的动力学性质, 图 2 给出了这两个解的三维坐标演化图形。在图 2a 中, 解(32)式坐标图的各参数取值为  $\lambda=0.1, \omega=1, a_1=0.5, c_1=1.5, c_2=1, \alpha=0.25$ 。在图 2b 中, 解(33)式坐标图的各参数取值为  $\lambda=-1, \omega=1, a_1=1, c_3=1.5, c_4=1, \alpha=0.75$ 。

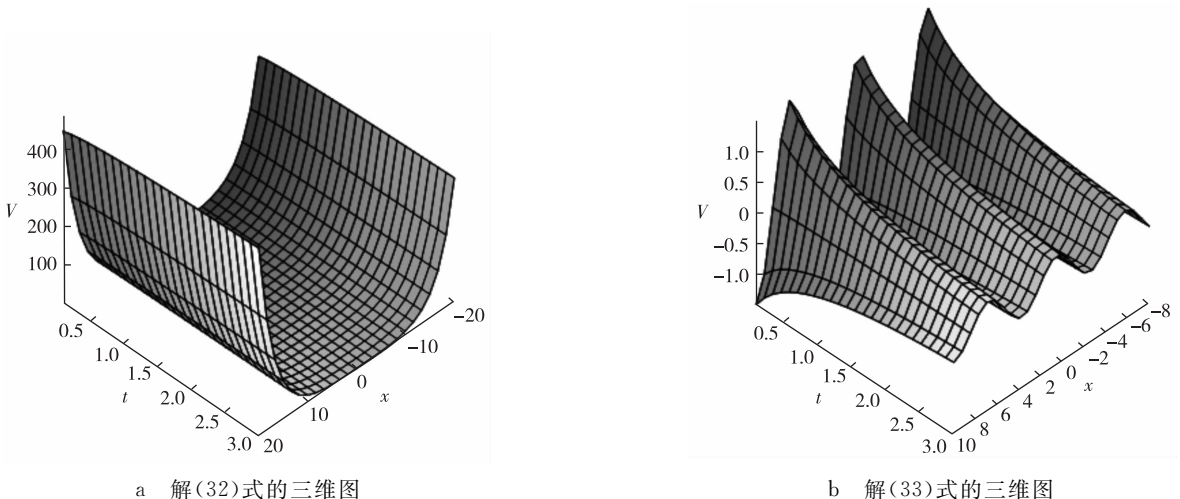


图 2 解(32)式和解(33)式的动力学行为演化图

Fig. 2 Graphs of dynamical behavior evolution of solution (32) and solution (33)

设方程(29)式具有形如  $V=[d_0+d_1 u(t)]E_{2\alpha}(\lambda x^{2\alpha})$  的解, 代入方程(29)式后, 通过一系列计算可得方程(29)式的两个精确解:

$$V_1=(d_1 l_1 \exp(\sqrt{p^2 \lambda} t)+d_1 l_2 \exp(-\sqrt{p^2 \lambda} t)) E_{2\alpha}(\lambda x^{2\alpha}), \quad (34)$$

$$V_2=(d_1 l_3 \cos(\sqrt{-\lambda p^2} t)+d_1 l_4 \sin(\sqrt{-\lambda p^2} t)) E_{2\alpha}(\lambda x^{2\alpha}), \quad (35)$$

其中  $l_1, l_2, l_3, l_4$  为任意非零常数。当  $\lambda>0$  时, 解(34)式整体是一个无界的解, 即  $V\rightarrow\infty(x\rightarrow+\infty)$ 。解(35)式整体是一个具有周期解性且随时间增加而衰减的解。为了更好地体现解(34)式和(35)式的动力学性质, 图 3 给

出了这两个解的三维坐标图形。图 3a 中解(34)式坐标图的各参数取值为  $\lambda=0.1, p=2, d_1=0.5, l_1=1.5, l_2=1, \alpha=0.5$ 。在图 3b 中,解(35)式坐标图的各参数取值为  $p=2, d_1=0.5, l_3=1.5, l_4=1, \alpha=0.75$ 。

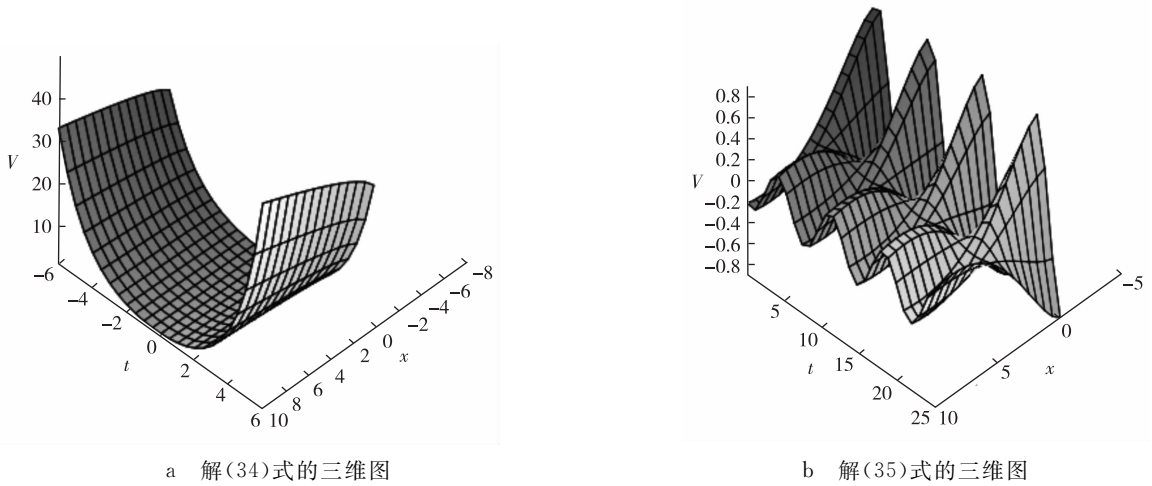


图 3 解(34)式和解(35)式的动力学行为演化图

Fig. 3 Graphs of dynamical behavior evolution of solution (34) and solution (35)

类似地,假定方程(30)式具有形如  $V=[d_0+d_1u(x)]E_{2\beta}(\lambda t^{2\beta})$  的解,代入方程(30)式后,可得方程(30)式的两个精确解:

$$V = \left( d_1 l_1 \exp\left(\sqrt{\frac{\lambda}{q^2}} x\right) + d_1 l_2 \exp\left(-\sqrt{\frac{\lambda}{q^2}} x\right) \right) E_{2\beta}(\lambda t^{2\beta}), \tag{36}$$

$$V = \left( d_1 l_3 \cos\left(\sqrt{\frac{-\lambda}{q^2}} x\right) + d_1 l_4 \sin\left(\sqrt{\frac{-\lambda}{q^2}} x\right) \right) E_{2\beta}(\lambda t^{2\beta}). \tag{37}$$

其中  $l_1, l_2, l_3, l_4$  为任意非零常数。当  $\lambda > 0$  时,解(36)式整体是一个无界的解,即  $V \rightarrow \infty (t \rightarrow +\infty)$ 。当  $\lambda < 0$  时,解(37)式整体是一个具有周期解性衰减的解。

### 4 结论

本文利用变量分离法与齐次平衡原理相结合的方法,获得了分数阶电报方程及其子方程的各种精确解析解。这些精确解的空间变量部分或者时间变量部分含有指数函数和三角函数。就解的类型而言,解(12)式、解(19)式、解(25)式、解(31)式( $\lambda > 0$ )、解(32)式、解(34)式和解(36)式都是无界形式的解;解(13)式、解(26)式和解(31)式( $\lambda < 0$ )都具有随着时间变量或者空间变量的增加而衰减的性质,因此它们大部分是渐进稳定的解;解(20)式、解(33)式、解(35)式和解(37)式是同时具有周期解性质和衰减性质的解。就研究的一般性而言,在文献[18]中,作者只研究了分数阶电报方程的特殊情形,而本文研究了分数阶电报方程更一般的情况。就研究方法而言,通过本文中的方法获得的精确解与以往文献中通过其他方法获得的精确解的类型是大不相同的,而且相比于其他文献中使用的方法而言,本文提供的计算方法更为简便。由此可见变量分离法与齐次平衡原理相结合的方法不但能够有效地获得许多线性和非线性偏微分方程的各种精确解,而且在计算方面也更为简洁且便于操作。

### 参考文献:

[1] ANH V V, LEONENKO N N. Scaling laws for fractional diffusion-wave equations with singular data[J]. Statistics & Probability Letters, 2000, 48(3): 239-252.

[2] HAYAT T, NADEEM S, ASGHAR S. Periodic unidirectional flows of a viscoelastic fluid with the fractional Maxwell model [J]. Applied Mathematics and Computation, 2004, 151(1): 153-161.

[3] LOHMANN A W, MENDLOVIC D, ZALEVSKY Z, et al. Some important fractional transformations for signal processing[J]. Optics Communications, 1996, 125(1-3): 18-20.

[4] RUI W. The integral bifurcation method combined with factoring technique for investigating exact solutions and their dynamical properties of a generalized Gardner equation[J]. Nonlinear Dynamics, 2014, 76(2): 1529-1542.

- [5] PODLUBNY I. Fractional differential equations [M]. San Diego: Academic Press, 1999.
- [6] DAFTARDAR-GEJJI V, JAFARI H. Adomian decomposition, a tool for solving a system of fractional differential equations[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2005, 301(2): 508-518.
- [7] BAKKYARAJ T, SAHADEVAN R. Approximate analytical solution of two coupled time fractional nonlinear Schrödinger equations[J]. International Journal of Applied and Computational Mathematics, 2016, 2(1): 113-135.
- [8] CHEN J, LIU F, ANH V. Analytical solution for the time-fractional telegraph equation by the method of separating variables[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2008, 338(2): 1364-1377.
- [9] ESLAMI M, FATHI V B, MIRZAZADEH M, et al. Applications of first integral method to fractional partial differential equations [J]. Indian Journal of Physics, 2014, 88(2): 177-184.
- [10] FAN E. Two new applications of the homogeneous balance method[J]. Physics Letters A, 2000, 265(5-6): 353-357.
- [11] SAHADEVAN R, BAKKYARAJ T. Invariant analysis of time fractional generalized Burgers and Korteweg-de Vries equations[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2012, 393(2): 341-347.
- [12] RUI W G. Applications of homogenous balanced principle on investigating exact solutions to a series of time fractional nonlinear PDEs [J]. Communication in Nonlinear Science & Numerical Simulation, 2017, 47: 253-266.
- [13] RUI W G. Applications of integral bifurcation method together with homogeneous balanced principle on investigating exact solutions of time fractional nonlinear PDEs[J]. Nonlinear Dynamics, 2018, 91(1): 697-712.
- [14] WYSS W. The fractional diffusion equation[J]. Journal of Mathematical Physics, 1986, 27(11): 2782-2785.
- [15] GORENFLO R, LUCHKO Y, MAINARDI F. Wright functions as scale-invariant solutions of the diffusion-wave equation[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2000, 118(1/2): 175-191.
- [16] AGRAWAL O P. Solution for a fractional diffusion-wave equation defined in a bounded domain[J]. Nonlinear Dynamics, 2002, 29(1/2/3/4): 145-155.
- [17] 黄潇, 芮伟国. 分数阶广义 Bagley-Torvik 方程的各种精确解及其动力学性质[J]. 云南大学学报(自然科学版), 2018, 40(1): 12-21.
- HUANG X, RUI W G. Various exact solutions of the fractional generalized Bagley-Torvik equation and their dynamical properties[J]. Journal of Yunnan University(Natural Science), 2018, 40(1): 12-21.
- [18] GÓMEZ-AGUILAR J F, MIRANDA-HERNÁNDEZ M, LÓPEZ-LÓPEZ M G, et al. Modeling and simulation of the fractional space-time diffusion equation[J]. Communication in Nonlinear Science Numerical Simulation, 2016, 30(1/2/3): 115-127.

## Exact-Analytic Solutions and Their Dynamical Properties of the Fractional-Order Telegraph Equation

ZHANG Qin, WU Chun

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

**Abstract:** [Purposes] In order to study the exact solutions of three classes of classical fractional-order telegraph equations. [Methods] The method of the combination of the separation variable method and the homogeneous balance principle are used here. [Findings] The exact solutions of the space-fractional telegraph equation, the time-fractional telegraph equation and the time-space fractional telegraph equation are obtained by special transformation. The mechanical properties and the evolution of these solutions are further analyzed, and the graphs of partial exact solutions with time and evolution of space development is given. [Conclusions] Compared with the results in the existing literature, the exact solutions obtained here are new results, and the solving method and technique are much simpler than those in the previous literature.

**Keywords:** fractional telegraph equation; method of separation of variables; homogeneous balance method; exact solutions

(责任编辑 许 甲)