DOI:10.11721/cqnuj20190609

期望残差极小化方法求解一类随机混合均衡问题*

山述强，周　武，宋建成
(西南民族大学 计算机科学与技术学院，成都 610041)

摘要:【目的】研究有限维空间中的一类随机混合均衡问题。【方法】首先定义了混合均衡问题的正则化间隙函数,并研究了正则化间隙函数的一些可微性质;其次通过随机混合均衡问题的正则化间隙函数,将求解随机混合均衡问题转化为求解期望残差极小化模型。【结果】在一定条件下,通过样本平均近似方法得到了期望残差极小化模型的解。【结论】随机混合均衡问题的期望残差极小化模型的解存在并且唯一。

关键词:随机混合均衡问题;广义 f-投影;正则化间隙函数;期望残差极小化方法;样本平均近似方法

中图分类号:O177.91　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**1672-6693(2019)06-0071-08

假定 $\mathbf{R}^n$ 表示 n 维欧式空间,$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 和 $\|\cdot\|$ 分别表示内积和范数。假定 K 为 $\mathbf{R}^n$ 中一非空闭凸子集,令 $(\Omega,\mathfrak{I},P)$ 为一概率空间,$\varphi:K\times K\times\Omega\to\mathbf{R}$ 和 $f:K\times\Omega\to\mathbf{R}$ 为两实值函数。随机混合均衡问题(SMEP)可表示为:找到 $x\in K$ 满足:

$$\varphi(x,y,\omega)+f(y,\omega)-f(x,\omega)\geqslant 0,\ \forall\, y\in K,\text{a.s.}\tag{1}$$

a.s. 表示在概率 P 下几乎必然成立。

众所周知,随机混合均衡问题是非线性分析的重要组成部分,并被广泛地应用于数理经济、博弈论、最优化等问题中,为随机相补问题、随机变分不等式等提供了统一形式。

由于 ω 的存在,问题(1)一般很难求解。对于这一类问题,近来有很多学者进行了研究,例如:Chen 等人[1]用期望残差极小化方法求解了随机线性相补问题,他们的想法是将求解随机相补问题转化为找随机相补问题的间隙函数的期望极小值。Zhang 等人[2]用该方法研究了随机非线性相补问题。Luo 等人[3]用期望残差极小化方法研究了随机变分不等式并应用于交通均衡中。其他的相关工作可参见文献[4-14]。

受上述工作启发,本文用期望残差极小化方法研究随机混合均衡问题。首先,给出随机混合均衡问题和随机混合均衡问题的间隙函数的定义;其次,通过随机混合均衡问题的正则化间隙,将求解随机混合均衡问题转化为期望残差极小化模型;最后,在一定条件下,通过样本平均近似方法得到了期望残差极小函数化模型的解。

1 混合均衡的间隙函数

假定 $\mathbf{R}^n$ 表示 n 维欧式空间,$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 和 $\|\cdot\|$ 分别表示内积和范数。假定 K 为 $\mathbf{R}^n$ 中非空闭凸子集,$\varphi:K\times K\to\mathbf{R}$ 和 $f:K\to\mathbf{R}$ 为两函数。混合均衡问题(MEP)可表示为:找 $x\in K$ 满足:$\varphi(x,y)+f(y)-f(x)\geqslant 0,\ \forall\, y\in K$。

定义 1　对任意的 $x\in K$,假定 $f(\cdot)$ 和 $\varphi(x,\cdot)$ 为实值的真凸下半连续函数,定义映射:

$$P_K^{\varphi,f}(x)=\{z\in K:\psi(x,z)=\inf_{y\in K}\psi(x,y)\},\tag{2}$$

其中 $\psi(x,y)=\|x-y\|^2+2\alpha[\varphi(x,y)+f(y)]$,$\alpha$ 为一正实数,则称 z 为 x 在 K 上的广义 f-投影。

注　因为函数 $f(\cdot)$ 和 $\varphi(x,\cdot)$ 为实值的真凸下半连续函数,那么 x 在 K 上的广义 f-投影存在且唯一。

引理 1　如果对于任意的 $x\in K$,满足 $\varphi(x,x)=0$,那么 x 是混合均衡问题的解当且仅当 $x=P_K^{\varphi,f}(x)$。

---

* **收稿日期:**2019-05-21　**修回日期:**2019-11-04　**网络出版时间:**2019-11-25　10:35

资助项目:国家自然科学基金青年项目(No. 11701479;No. 11526170);中央高校基本科研项目(No. 2015NZYQN70)

第一作者简介:山述强,男,讲师,博士,研究方向为非线性分析、变分不等式,E-mail:461403287@qq.com;**通信作者:**周武,男,副教授,E-mail:465840124@qq.com.

网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20191125.1034.026.html

证明 如果 x 是混合均衡问题的解,则对于 $\forall \alpha>0, 2\alpha(\varphi(x,y)+f(y)-f(x))\geqslant 0, \forall y\in K$。

由于对于 $\forall x\in K$,满足 $\varphi(x,x)=0$,那么:

$$\|x-y\|^2+2\alpha(\varphi(x,y)+f(y))\geqslant \|x-x\|^2+2\alpha(\varphi(x,x)+f(x)), \forall y\in K,$$

即 $x=P_K^{\varphi,f}(x)$。反之,如果 $x=P_K^{\varphi,f}(x)$,那么:

$$\|x-(x+t(y-x))\|^2+2\alpha(\varphi(x,x+t(y-x))+f(x+t(y-x)))\geqslant \|x-x\|^2+2\alpha(\varphi(x,x)+f(x)), \forall y\in K,$$

从而可知:

$$t^2\|x-y\|^2+2\alpha(t\varphi(x,y)+(1-t)\varphi(x,x)+tf(y)-(1-t)f(x))\geqslant 2\alpha f(x), \forall y\in K,$$

进而可知:

$$t^2\|x-y\|^2+2\alpha(\varphi(x,y)+f(y)-f(x))\geqslant 0, \forall y\in K,$$

当 $t\to 0$ 时,可知:

$$\varphi(x,y)+f(y)-f(x)\geqslant 0, \forall y\in K。$$

即表示 x 为 MEP 的一个解。 证毕

引理2 对任意的 $x\in K$,假定 $f(\cdot)$ 和 $\varphi(x,\cdot)$ 为实值的凸连续可微函数。那么,找 x 在 K 上的广义 f-投影等价于求解下面的变分不等式:找 $z\in K$ 满足:

$$\langle z-y, z+\alpha\nabla_y\varphi(x,z)+\alpha\nabla f(z)-x\rangle\leqslant 0, \forall y\in K。\tag{3}$$

进一步,如果 $\nabla_y\varphi(x,\cdot)$, $\nabla f(\cdot)$ 满足:对于 $\forall z_1,z_2\in K$, $\langle\nabla_y\varphi(x,z_1)-\nabla_y\varphi(x,z_2), z_1-z_2\rangle\geqslant\beta\|z_1-z_2\|^2$, $\langle\nabla f(z_1)-\nabla f(z_2), z_1-z_2\rangle\geqslant\gamma\|z_1-z_2\|^2$。那么:

$$\|P_K^{\varphi,f}(x_1)-P_K^{\varphi,f}(x_2)\|\leqslant\frac{1}{1+\alpha(\beta+\gamma)}\|x_1-x_2\|, \forall x_1,x_2\in K。$$

证明 定义函数 $\Phi(\lambda):[0,1]\to\mathbf{R}$ 如下:

$$\Phi(\lambda)=\langle\lambda z+(1-\lambda)y-x, \lambda z+(1-\lambda)y-x\rangle+2\alpha[\varphi(x,\lambda z+(1-\lambda)y)+f(\lambda z+(1-\lambda)y)],$$

若 z 为 x 到 K 上的广义 f-投影,则由定义可知,$\Phi(1)$ 为 $\Phi(\lambda)$ 的极小值,且对于任意的 $y\in K$ 有:

$$\Phi'_{(1)}=2\langle z-y, z-x\rangle+2\alpha\langle\nabla_y\varphi(x,z)+\nabla f(z), z-y\rangle=$$
$$2\langle z-y, z+\alpha\nabla_y\varphi(x,z)+\alpha\nabla f(z)-x\rangle\leqslant 0,$$

反之,如果 z 是(3)式的解,那么对于任意的 $y\in K$ 有:

$$2\langle z-y, z+\alpha\nabla_y\varphi(x,z)+\alpha\nabla f(z)-x\rangle\leqslant 0,$$

从而有:

$$2\langle y-z, z-x\rangle+2\alpha\langle\nabla_y\varphi(x,z), y-z\rangle+2\alpha\langle\nabla f(z), y-z\rangle\geqslant 0,$$

因为 $f(\cdot)$ 和 $\varphi(x,\cdot)$ 为凸函数,所以:

$$2\langle z-x, y-x\rangle-2\langle z-x, z-x\rangle+2\alpha[\varphi(x,y)-\varphi(x,z)+f(y)-f(z)]\geqslant 0, \forall y\in K。$$

由 Schwarz 不等式可知:

$$\|y-x\|^2+2\alpha[\varphi(x,y)+f(y)]-\|z-x\|^2-2\alpha[\varphi(x,z)+f(z)]\geqslant 0, \forall y\in K。$$

即 z 为(2)式的一个解。

进一步,令 $z_1=P_K^{\varphi,f}(x_1)$ 和 $z_2=P_K^{\varphi,f}(x_2)$,由(3)式可知:

$$\langle z_1-y, z_1+\alpha\nabla_y\varphi(x_1,z_1)+\alpha\nabla f(z_1)-x_1\rangle\leqslant 0, \forall y\in K,\tag{4}$$

和

$$\langle z_2-y, z_2+\alpha\nabla_y\varphi(x_2,z_2)+\alpha\nabla f(z_2)-x_2\rangle\leqslant 0, \forall y\in K,\tag{5}$$

在(4),(5)式中,分别令 $y=z_2$ 和 $y=z_1$ 可知:

$$\langle z_1-z_2, z_1+\alpha\nabla_y\varphi(x_1,z_1)+\alpha\nabla f(z_1)-x_1\rangle\leqslant 0,\tag{6}$$

和

$$\langle z_2-z_1, z_2+\alpha\nabla_y\varphi(x_2,z_2)+\alpha\nabla f(z_2)-x_2\rangle\leqslant 0。\tag{7}$$

将(6),(7)式相加可得:

$$\langle z_1-z_2, z_1-z_2-(x_1-x_2)+\alpha[\nabla_y\varphi(x_1,z_1)-\nabla_y\varphi(x_2,z_2)+\nabla f(z_1)-\nabla f(z_2)]\rangle\leqslant 0,\tag{8}$$

因为 $f(\cdot)$ 和 $\varphi(x,\cdot)$ 为两凸函数,由(8)式可知:

$$\|z_1-z_2\|^2=\langle z_1-z_2,z_1-z_2\rangle\leqslant-2\alpha\langle\nabla_y\varphi(x_1,z_1)-\nabla_y\varphi(x_2,z_2),z_1-z_2\rangle-\alpha\langle\nabla f(z_1)-\nabla f(z_2),z_1-z_2\rangle+\langle z_1-z_2,x_1-x_2\rangle\leqslant-\alpha(\beta+\gamma)\|z_1-z_2\|^2+\|z_1-z_2\|\,\|x_1-x_2\|,$$

从而有：

$$\|z_1-z_2\|\leqslant\frac{1}{1+\alpha(\beta+\gamma)}\|x_1-x_2\|,$$

即：

$$\|P_K^{\varphi,f}(x_1)-P_K^{\varphi,f}(x_2)\|\leqslant\frac{1}{1+\alpha(\beta+\gamma)}\|x_1-x_2\|。$$

证毕

引理 3[18]　假定 $S\subseteq\mathbf{R}^n$ 为一非空子集，$U\subseteq\mathbf{R}^n$ 为一开子集，$f:\mathbf{R}^n\times U\to\mathbf{R}$ 为一连续可微函数，且 $\nabla_u f(\cdot,\cdot)$ 连续。如果对于任意给定的 $u\in U$，$\min\limits_{x\in S}f(x,u)$ 有唯一解 $x(u)$，则函数 $\Phi(u)=\min\limits_{x\in S}f(x,u)$ 是连续可微的，并且 $\Phi'_{(u)}=\nabla_u f(x(u),u)$。

定义 2　函数 $g:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 满足：1）$\forall x\in K$，$g(x)\geqslant0$；2）$x^*\in K$，$g(x^*)=0$ 当且仅当 x^* 是 MEP 的一个解，则称 g 为 MEP 的间隙函数。

定义 3　定义函数 g_η 如下：

$$g_\eta(x)=\max_{y\in K}\left\{-\varphi(x,y)+f(x)-f(y)-\frac{1}{2\eta}\|x-y\|^2\right\},\tag{9}$$

其中 η 为正实数，易见 g_η 是 MEP 的间隙函数，称为 MEP 的正则化间隙函数。

引理 4　假定对任意的 $x\in K$，$f(\cdot)$ 和 $\varphi(x,\cdot)$ 为连续可微凸函数，那么：

$$g_\eta(x)=-\varphi(x,P_K^{\varphi,f}(x))+f(x)-f(P_K^{\varphi,f}(x))-\frac{1}{2\eta}\|x-P_K^{\varphi,f}(x)\|^2,\ \forall x\in\mathbf{R}^n,$$

进一步，如果 $\varphi(x,x)=0$，$\forall x\in K$，则：

$$g_\eta(x)\geqslant\frac{1}{2\eta}\|x-P_K^{\varphi,f}(x)\|^2,\ \forall x\in\mathbf{R}^n,$$

如果 $\varphi(\cdot,y)$ 连续可微，那么 g_η 也连续可微，且有：

$$\nabla g_\eta(x)=-\nabla_x\varphi(x,P_K^{\varphi,f}(x))+\nabla f(x)+\frac{1}{\eta}(x-P_K^{\varphi,f}(x))。$$

证明　定义函数 $H:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 如下：

$$H(x,y)=-\varphi(x,y)+f(x)-f(y)-\frac{1}{2\eta}\|x-y\|^2,$$

由 g_η 的定义可知：

$$g_\eta=\max_{y\in K}H(x,y)。\tag{10}$$

因为 $f(\cdot)$ 和 $\varphi(x,\cdot)$ 为连续可微凸函数，则 $H(x,y)$ 关于 y 是强凸的。又因为 K 为凸子集，那么(10)式有唯一解 $z\in K$，并满足：

$$-\nabla_y\varphi(x,z)-\nabla f(z)+\frac{1}{\eta}(x-z)\in N_K(z),\tag{11}$$

其中 $N_K(z)=\{x\in\mathbf{R}^n:\langle x,y-z\rangle\geqslant0,\forall y\in K\}$ 从 K 到 z 的正规锥。由(11)式可知：

$$-\frac{1}{\eta}(z+\eta\nabla_y\varphi(x,z)+\eta\nabla f(z)-x)\in N_K(z),$$

从而有：

$$\langle z+\eta\nabla_y\varphi(x,z)+\eta\nabla f(z)-x,y-z\rangle\geqslant0,\ \forall y\in K,\tag{12}$$

即 $z=P_K^{\varphi,f}(x)$，并且 g_η 可表示为：

$$g_\eta(x)=-\varphi(x,P_K^{\varphi,f}(x))+f(x)-f(P_K^{\varphi,f}(x))-\frac{1}{2\eta}\|x-P_K^{\varphi,f}(x)\|^2。\tag{13}$$

由(12)式可知：

$$\langle P_K^{\varphi,f}(x)+\eta\nabla_y\varphi(x,P_K^{\varphi,f}(x))+\eta\nabla f(P_K^{\varphi,f}(x))-x,y-P_K^{\varphi,f}(x)\rangle\geqslant0,\ \forall y\in K,\tag{14}$$

在(14)式中，令 $y=x$，则有：

$$\eta\langle\nabla_y\varphi(x,P_K^{\varphi,f}(x)),x-P_K^{\varphi,f}(x)\rangle+\eta\langle\nabla f(P_K^{\varphi,f}(x)),x-P_K^{\varphi,f}(x)\rangle\geqslant\|x-P_K^{\varphi,f}(x)\|^2。$$

因为 $f(\cdot)$和 $\varphi(x,\cdot)$为连续可微凸函数,且对于任意的 x,$\varphi(x,x)=0$,由(13),(14)式可知:

$$g_\eta(x)=-\varphi(x,P_K^{\varphi,f}(x))+f(x)-f(P_K^{\varphi,f}(x))-\frac{1}{2\eta}\|x-P_K^{\varphi,f}(x)\|^2=$$

$$\varphi(x,x)-\varphi(x,P_K^{\varphi,f}(x))+f(x)-f(P_K^{\varphi,f}(x))-\frac{1}{2\eta}\|x-P_K^{\varphi,f}(x)\|^2\geqslant$$

$$\langle\nabla_y\varphi(x,P_K^{\varphi,f}(x)),x-P_K^{\varphi,f}(x)\rangle+\langle\nabla f(P_K^{\varphi,f}(x)),x-P_K^{\varphi,f}(x)\rangle-\frac{1}{2\eta}\|x-P_K^{\varphi,f}(x)\|^2\geqslant$$

$$\frac{1}{\eta}\|x-P_K^{\varphi,f}(x)\|^2-\frac{1}{2\eta}\|x-P_K^{\varphi,f}(x)\|^2=\frac{1}{2\eta}\|x-P_K^{\varphi,f}(x)\|^2。$$

令 $A(x,y)=-H(x,y)$,由(10)式可知:

$$g_\eta=\min_{y\in K}A(x,y),$$

并且上述优化问题有唯一解 $z=P_K^{\varphi,f}(x)$,因为:

$$\nabla_x A(x,y)=\nabla_x\varphi(x,y)-\nabla f(x)+\frac{1}{\eta}(x-y),$$

由引理 3 可知:

$$\nabla g_\eta(x)=-\nabla_x\varphi(x,P_K^{\varphi,f}(x))+\nabla f(x)+\frac{1}{\eta}(x-P_K^{\varphi,f}(x))。$$ 证毕

2 随机混合均衡

假定$(\Omega,\mathfrak{I},P)$为一概率空间,$\varphi:K\times K\times\Omega\to\mathbf{R}$ 和 $f:K\times\Omega\to\mathbf{R}$ 为两实值函数。随机混合均衡问题(SMEP)可表示为:寻找 $x\in K$ 满足:

$$\varphi(x,y,\omega)+f(y,\omega)-f(x,\omega)\geqslant 0,\ \forall\, y\in K,\text{a.s.} \tag{15}$$

a.s.表示在概率 P 下几乎必然成立。

现给出一些关于 φ 和 f 的假设:

1)对于任意的$(x,y)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$ 和 $\omega\in\Omega$,$\varphi(x,x,\omega)=0$,$E(\|\varphi(x,y,\omega)\|^2)<\infty$,$E(\|f(x,\omega)\|^2)<\infty$ 和 $E[\|\nabla_y\varphi(x,y,\omega)\|^2]<\infty$,$E[\|\nabla_x\varphi(x,y,\omega)\|^2]<\infty$,$E[\|\nabla_x f(x,\omega)\|^2]<\infty$。其中,$E[\cdot]$表示期望。

2)对于任意的 $\omega\in\Omega$ 和 $x,y_1,y_2\in\mathbf{R}^n$,有:

$$\|\varphi(x,y_1,\omega)-\varphi(x,y_2,\omega)\|\leqslant l_1(\omega)\|y_1-y_2\|,$$
$$\|\nabla_y\varphi(x,y_1,\omega)-\nabla_y\varphi(x,y_2,\omega)\|\leqslant l_2(\omega)\|y_1-y_2\|,$$
$$\|\nabla_x\varphi(x,y_1,\omega)-\nabla_x\varphi(x,y_2,\omega)\|\leqslant l_3(\omega)\|y_1-y_2\|。$$

其中 $l_i:\Omega\to\mathbf{R}$ 满足 $E[l_i^2(\omega)]=L_i^2<\infty$,$i=1,2,3$。

3)对于任意的 $\omega\in\Omega$ 和 $x_1,x_2\in\mathbf{R}^n$,有:

$$\|f(x_1,\omega)-f(x_2,\omega)\|\leqslant l_4(\omega)\|x_1-x_2\|,$$
$$\|\nabla_x f(x_1,\omega)-\nabla_x f(x_2,\omega)\|\leqslant l_5(\omega)\|x_1-x_2\|,$$

其中 $l_i:\Omega\to\mathbf{R}$ 满足 $E[l_i^2(\omega)]=L_i^2<\infty$,$i=4,5$。

4)对于任意的 $\omega\in\Omega$ 和 $x,y_1,y_2\in\mathbf{R}^n$,有:

$$\langle\nabla_y\varphi(x,y_1,\omega)-\nabla_y\varphi(x,y_2,\omega),y_1-y_2\rangle\geqslant l_6(\omega)\|y_1-y_2\|,$$
$$\langle\nabla_x f(y_1,\omega)-\nabla_x f(y_2,\omega),y_1-y_2\rangle\geqslant l_7(\omega)\|y_1-y_2\|,$$

其中 $l_i:\Omega\to\mathbf{R}$ 满足 $E[l_i^2(\omega)]=L_i^2<\infty$,$i=6,7$。

由上节可知,可定义 SMEP 的正则化间隙函数 $g_\eta:\mathbf{R}^n\times\Omega\to\mathbf{R}$ 如下:

$$g_\eta(x,\omega)=\max_{y\in K}\left\{-\varphi(x,y,\omega)+f(x,\omega)-f(y,\omega)-\frac{1}{2\eta}\|x-y\|^2\right\},\text{a.s.} \tag{16}$$

求解 SMEP 的期望残差极小化方法就是求解下面的优化问题:

$$\min_{x\in K}\Theta(x)=E[g_\eta(x,\omega)]=\int_\Omega g_\eta(x,\omega)\rho(\omega)\mathrm{d}\omega\ 。 \tag{17}$$

其中 $\rho:\Omega\to[0,+\infty)$ 为密度函数并满足 $\int_{\Omega}\rho(\omega)\mathrm{d}\omega=1$。

对于上述问题,用样本平均近似方法求解。

假定 $\Omega_k=\{\omega_j:j=1,2,\cdots,N_k\}$ 为观测集,并满足对于任意的 k,$\Omega_k\in\Omega$ 和 $N_k\to+\infty(k\to+\infty)$。考虑下面的优化问题:

$$\min_{x\in K}\Theta_k(x)=\frac{1}{N_k}\sum_{\omega_j\in\Omega_k}g_\eta(x,\omega_j)\rho(\omega_j)。\tag{18}$$

引理 5[20]　如果 $\Phi(\omega)$ 在 Ω 上可积,则 $\lim\limits_{k\to\infty}\Theta_k(x)=E[\Phi(\omega)]$。

同时由假设 1)~3) 和文献[5]中的引理 2.6,易得到下面的引理 6。

引理 6　如果 $\varphi(x,y,\omega)$ 和 $f(x,\omega)$ 满足假设 1)~3),并且 $k\to\infty$ 时 $x^k\to x^*$,则:

1) $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{N_k}\sum\limits_{\omega_j\in\Omega_k}\|\varphi(x^k,y,\omega_j)\|\rho(\omega_j)=E[\|\varphi(x^*,y,\omega)\|]$;

2) $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{N_k}\sum\limits_{\omega_j\in\Omega_k}\|f(x^k,\omega_j)\|\rho(\omega_j)=E[\|f(x^*,\omega)\|]$;

3) $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{N_k}\sum\limits_{\omega_j\in\Omega_k}\|\varphi(x^k,y,\omega_j)\|\|f(x^k,\omega_j)\|\rho(\omega_j)=E[\|\varphi(x^*,y,\omega_j)\|\|f(x^*,\omega)\|]$。

引理 7　如果 $\forall x\in K$,$\varphi(x,y,\omega)$ 和 $f(x,\omega)$ 满足假设 1)~4),则 $g_\eta(x,\omega)$ 和 $\Theta(x)$ 关于 x 是连续可微的。进一步,对于任意的 $x\in K$ 和 $\omega\in\Omega$,有:

$$\nabla_x g_\eta(x,\omega)=-\nabla_x\varphi(x,P_K^{\varphi,f}(x,\omega),\omega)+\nabla_x f(x,\omega)+\frac{1}{\eta}(x-P_K^{\varphi,f}(x,\omega))$$

和

$$\nabla\Theta(x)=E[\nabla_x g_\eta(x,\omega)]$$

成立。

证明　由引理 4 可知:

$$\nabla_x g_\eta(x,\omega)=-\nabla_x\varphi(x,P_K^{\varphi,f}(x,\omega),\omega)+\nabla_x f(x,\omega)+\frac{1}{\eta}(x-P_K^{\varphi,f}(x,\omega)),$$

那么有:

$$\begin{gathered}\|\nabla_x g_\eta(x,\omega)\|\leqslant\\ \|\nabla_x\varphi(x,P_K^{\varphi,f}(x,\omega),\omega)-\nabla_x\varphi(x,x,\omega)\|+\|\nabla_x f(x,\omega)\|+\|\nabla_x\varphi(x,x,\omega)\|+\frac{1}{\eta}\|x-P_K^{\varphi,f}(x,\omega)\|\leqslant\\ l_3(\omega)\|x-P_K^{\varphi,f}(x,\omega)\|+\|\nabla_x f(x,\omega)\|+\|\nabla_x\varphi(x,x,\omega)\|+\frac{1}{\eta}\|x-P_K^{\varphi,f}(x,\omega)\|=\\ \left(l_3(\omega)+\frac{1}{\eta}\right)\|x-P_K^{\varphi,f}(x,\omega)\|+\|\nabla_x f(x,\omega)\|+\|\nabla_x\varphi(x,x,\omega)\|。\end{gathered}$$

因为:

$$g_\eta(x,\omega)=-\varphi(x,P_K^{\varphi,f}(x,\omega),\omega)+f(x,\omega)-f(P_K^{\varphi,f}(x,\omega),\omega)-\frac{1}{2\eta}\|x-P_K^{\varphi,f}(x,\omega)\|^2\geqslant 0,\text{a. s.}$$

所以有:

$$\begin{gathered}\frac{1}{2\eta}\|x-P_K^{\varphi,f}(x,\omega)\|^2\leqslant\|\varphi(x,P_K^{\varphi,f}(x,\omega),\omega)\|+\|f(x,\omega)-f(P_K^{\varphi,f}(x,\omega),\omega)\|\leqslant\\ \|\varphi(x,P_K^{\varphi,f}(x,\omega),\omega)-\varphi(x,x,\omega)\|+\|\varphi(x,x,\omega)\|+\|f(x,\omega)-f(P_K^{\varphi,f}(x,\omega),\omega)\|\leqslant\\ (l_1(\omega)+l_4(\omega))\|x-P_K^{\varphi,f}(x,\omega)\|,\end{gathered}\tag{19}$$

进而有:

$$\frac{1}{\eta}\|x-P_K^{\varphi,f}(x,\omega)\|\leqslant 2(l_1(\omega)+l_4(\omega)),\tag{20}$$

由(19),(20)式可知

$$\|\nabla_x g_\eta(x,\omega)\|\leqslant 2(l_1(\omega)+l_4(\omega))l_3(\omega)+\|\nabla_x f(x,\omega)\|+\|\nabla_x\varphi(x,x,\omega)\|,\tag{21}$$

由 Schwarz 不等式可知：

$$E[l_1(\omega)l_3(\omega)]\leqslant\sqrt{E[l_1^2(\omega)]E[l_3^2(\omega)]}=L_1L_3<\infty,$$

和 $E[l_4(\omega)l_3(\omega)]\leqslant\sqrt{E[l_4^2(\omega)]E[l_3^2(\omega)]}=L_4L_3<\infty$。由假设1)可知，(21)式的右端在 Ω 上可积。由文献[20]中的定理16.8可知，函数 Θ 连续可微，并且上式成立。 证毕

由假设1)～4)易得下面引理。

引理8 如果 $\varphi(x,y,\omega)$ 和 $f(x,\omega)$ 满足假设1)～4)，则下面的混合均衡问题有解：找 $\forall x^*\in K$ 满足：

$$E[\varphi(x^*,y,\omega)]+E[f(y,\omega)]-E[f(x^*,\omega)]\geqslant 0,\forall y\in K。$$

定义4 称 $L_\Theta(c)=\{x\in K:\Theta(x)\leqslant c\}$ 和 $L_{\Theta_k}(c)=\{x\in K:\Theta_k(x)\leqslant c\}$ 为 $\Theta(x)$ 和 $\Theta_k(x)$ 的水平集。

定理1 如果 $\varphi(x,y,\omega)$ 和 $f(x,\omega)$ 满足假设1)～4)。并且对于任意的 $(x,y)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n,\omega\in\Omega$ 有：

$$\varphi(x,y,\omega)+\varphi(y,x,\omega)\leqslant-\frac{1}{l}\|x-y\|,\tag{22}$$

其中，η 满足 $0<\frac{1}{2\eta}<\frac{1}{l}$，则对任意的非负数 c，水平集 $L_\Theta(c)$ 有界。

证明 假设存在非负数 $\bar{c}$ 满足 $L_\Theta(\bar{c})$ 无界，则存在序列 $\{x^n\}_{n=1}^\infty\in L_\Theta(\bar{c})$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x^n\|=\infty$。

由引理8和(22)式可知，存在 $x^*\in K$ 满足引理8，且有：

$$\begin{aligned}\bar{c}\geqslant\Theta(x^n)=E\left[\max_{y\in K}\{-\varphi(x^n,y,\omega)+f(x^n,\omega)-f(y,\omega)-\frac{1}{2\eta}\|x^n-y\|^2\right]\geqslant\\ \max_{y\in K}\left\{E[-\varphi(x^n,y,\omega)]+E[f(x^n,\omega)]-E[f(y,\omega)]-\frac{1}{2\eta}\|x^n-y\|^2\right\}\geqslant\\ -E[\varphi(x^n,x^*,\omega)]+E[f(x^n,\omega)]-E[f(x^*,\omega)]-\frac{1}{2\eta}\|x^n-x^*\|^2\geqslant\\ E[\varphi(x^*,x^n,\omega)]+E[f(x^n,\omega)]-E[f(x^*,\omega)]+\left(\frac{1}{l}-\frac{1}{2\eta}\right)\|x^n-x^*\|^2。\end{aligned}$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x^n\|=\infty$，那么 $\Theta(x^n)\to\infty(n\to\infty)$ 与 $\Theta(x^n)\leqslant\bar{c}$ 矛盾。 证毕

定理2 若 $\varphi(x,y,\omega)$ 和 $f(x,\omega)$ 满足定理1的假设，那么存在 $K>0$，当 $k>K$ 时，对于任意的 $c\geqslant 0$ 水平集 $L_{\Theta_k}(c)$ 有界。进一步的，对于足够大的 k，解集 S_k^* 非空有界。

证明 假设存在非负数 $\bar{c}$ 使得 $L_{\Theta_k}(\bar{c})$ 无界，则存在序列 $\{x^n\}_{n=1}^\infty\in L_{\Theta_k}(\bar{c})$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x^n\|=\infty$。

$$\begin{aligned}\bar{c}\geqslant\Theta_k(x^n)\geqslant\frac{1}{N_k}\sum_{\omega_j\in\Omega_k}\max_{y\in K}\left\{-\varphi(x^n,y,\omega_j)+f(x^n,\omega_j)-f(y,\omega_j)-\frac{1}{2\eta}\|x^n-y\|^2\right\}\rho(\omega_j)\geqslant\\ \frac{1}{N_k}\sum_{\omega_j\in\Omega_k}\left(-\varphi(x^n,x^*,\omega_j)+f(x^n,\omega_j)-f(x^*,\omega_j)-\frac{1}{2\eta}\|x^n-x^*\|^2\right)\rho(\omega_j)\geqslant\\ \frac{1}{N_k}\sum_{\omega_j\in\Omega_k}(\varphi(x^*,x^n,\omega_j)+f(x^n,\omega_j)-f(x^*,\omega_j))\rho(\omega_j)+\frac{1}{N_k}\sum_{\omega_j\in\Omega_k}\left(\frac{1}{l}-\frac{1}{2\eta}\right)\|x^n-x^*\|^2\rho(\omega_j)。\end{aligned}\tag{23}$$

因为：

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{N_k}\sum_{\omega_j\in\Omega_k}(\varphi(x^*,x^n,\omega_j)+f(x^n,\omega_j)-f(x^*,\omega_j))\rho(\omega_j)=E[\varphi(x^*,x^n,\omega)+f(x^n,\omega)-f(x^*,\omega_j)]。$$

选择足够大的 $K>0$，当 $k>K$ 时满足：

$$\begin{aligned}\frac{1}{N_k}\sum_{\omega_j\in\Omega_k}(\varphi(x^*,x^n,\omega_j)+f(x^n,\omega_j)-f(x^*,\omega_j))\rho(\omega_j)>\\ E[\varphi(x^*,x^n,\omega)+f(x^n,\omega)-f(x^*,\omega_j)]-\varepsilon>-\varepsilon,\end{aligned}\tag{24}$$

和

$$\frac{1}{N_k}\sum_{\omega_j\in\Omega_k}\rho(\omega_j)>1-\varepsilon。\tag{25}$$

由(23)～(25)式可知：

$$\bar{c}\geqslant-\varepsilon+(1-\varepsilon)\left(\frac{1}{l}-\frac{1}{2\eta}\right)\|x^n-x^*\|^2。$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\|x^n\|=\infty$，所以$\Theta_k(x^n)\to\infty(n\to\infty)$与$\Theta_k(x^n)\leqslant\bar{c}$矛盾。　　证毕

定理 3　假定$\varphi(x,y,\omega)$和$f(x,\omega)$满足定理 1 的假设，对于足够大的k，如果$\{x^k\}\in S_k^*$为优化问题$\min\limits_{x\in K}\Theta_k(x)$的解，且$x^*$为序列$\{x^k\}$的聚点，则$x^*$为优化问题(17)式的解。

证明　一般而言，可以假设$\{x^k\}$收敛到x^*。易证$x^*\in K$。

首先，证明$\lim\limits_{k\to\infty}|\Theta_k(x^k)-\Theta_k(x^*)|=0$。

令$y_j^k=r_j^kx^*+(1-r_j^k)x^k,r_j^k\in[0,1]$。由中值定理可知：

$$|\Theta_k(x^k)-\Theta_k(x^*)|\leqslant\frac{1}{N_k}\sum_{\omega_j\in\Omega_k}|g_\eta(x^k,\omega_j)-g_\eta(x^*,\omega_j)|\rho(\omega_j)\leqslant$$

$$\frac{1}{N_k}\sum_{\omega_j\in\Omega_k}|\nabla_x g_\eta(y_j^k,\omega_j)(x^k-x^*)|\rho(\omega_j)\leqslant\frac{1}{N_k}\sum_{\omega_j\in\Omega_k}|\nabla_x g_\eta(y_j^k,\omega_j)\|(x^k-x^*)|\rho(\omega_j)。\tag{26}$$

由(21)式可知，对于任意的$\omega_j\in\Omega$有：

$$\|\nabla_x g_\eta(x,\omega_j)\|\leqslant2(l_1(\omega_j)+l_4(\omega_j))l_3(\omega_j)+\|\nabla_x f(y_j^k,\omega_j)\|+\|\nabla_x\varphi(y_j^k,y_j^k,\omega_j)\|。\tag{27}$$

因为$\lim\limits_{k\to\infty}x^k=x^*$，所以$\lim\limits_{k\to\infty}y_j^k=x^*$，由引理 7，(26)和(27)式可知$\lim\limits_{k\to\infty}|\Theta_k(x^k)-\Theta_k(x^*)|=0$。

现在证明x^*为问题(17)式的解。因为：

$$|\Theta_k(x^k)-\Theta(x^*)|\leqslant|\Theta_k(x^k)-\Theta_k(x^*)|+|\Theta_k(x^*)-\Theta(x^*)|,$$

可知：

$$\lim_{k\to\infty}\Theta_k(x^k)=\Theta(x^*)。\tag{28}$$

又因为x^k是问题(18)式的解。所以对于任意的$x\in K$，且满足$\Theta_k(x^k)\leqslant\Theta_k(x)$。

由(28)式和引理 5 知，当$k\to\infty$时，有$\Theta(x^*)\leqslant\Theta(x)$，进而可知$x^*$是问题(17)式的解。　　证毕

参考文献：

[1] CHEN X J, FUKUSHIMA M. Expected residual minimization method for stochastic linear complementarity problems[J]. Mathematics of Operations Research, 2005, 30(4): 1022-1038.

[2] ZHANG C, CHEN X J. Stochastic nonlinear complementarity problem and applications to traffic equilibrium under uncertainty[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2008, 137(2): 277-295.

[3] LUO M J, LIN G H. Expected residual minimization method for stochastic variational inequality problems[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2009, 140(1): 103-116.

[4] MA H Q, HUANG N J. Expected residual minimization method for a class of stochastic quasivariational inequality problens[J]. J Appl Math, 2012, 2012(2): 71-74.

[5] MA H Q, HUANG N J, XU J P. Expected residual minimization method for stochastic variational inequality problem with nonlinear perturbations[J]. Appl Math Comput, 2013, 129(1): 6256-6267.

[6] CHEN X J, ROGER J, ZHANG Y F. Stochastic variational inequalities: residual minimization smoothing sample average approximations[J]. SIAM J Optim, 2012, 22(2): 649-673.

[7] AGDEPPA R P, YAMASHITA N, FUKUSHIMA M. Convex expected residual models for stochastic affine variational inequality problems and its application to the traffic equilibrium[J]. Pac J Optim, 2010, 6(1): 3-19.

[8] FANG H, CHEN X J, FUKUSHIMA M. Stochastic R_0 matrix linear complementarity problems[J]. SIAM J Optim, 2007, 18(2): 482-506.

[9] CHEN X J, ZHANG C, FUKUSHIMA M. Robust solution of monotone stochastic linear complementarity problems[J]. Math Program, 2009, 117(1/2): 51-80.

[10] LUO M J, LIN G H. Convergence results of ERM method for nonlinear stochastic variational problems[J]. J Optim Theory Appl, 2009, 140(1): 103-116.

[11] JIANG H, XU H. Stochastic approximation approaches to the stochastic variational inequality problems[J]. IEEE T Automat Contr, 2008, 53(6): 1462-1475.

[12] LIN G H, FUKUSHIMA M. New reformulations for stochastic nonlinear compelementarity problems[J]. Optim Method Softw, 2006, 21(4): 551-564.

[13] LUO M J, LIN G H. Stochastic variational inequality problems with additional constraints and their applications in supply chain network equilibria[J]. Pac J Optim, 2011, 7(2): 263-279.

[14] MA H Q, HUANG N J, WU M, et al. A new gap function for vector variational inequalities with an application[J]. J

Appl Math,2013,2013(3):721-730.

[15] ROCKAFELLAR R.Convex analysis[M]Princeton,USA:Princeton University Press,1970.

[16] FUKUSHIMA M. A class of gap functions for quasi-variational inequality problems[J]. J Indus Manage Optim,2007,3(2):165-171.

[17] FUKUSHIMA M. Equivalent differentiable optimaization problems and descent methods for asymmetric variational inequality problems[J]. Math Program,1992,53(1):99-110.

[18] AUSLENDER A. Optimisation methods numeriques[M]. Paris:Masson Press,1976.

[19] HOGAN W. Directional derivatives for extremal-value functions with applications to the completely convex case [J]. Oper Res,1973,21(2):188-209.

[20] NIEDERREITER H.Random number generation and quasi-Monte Carlo method[M]. Philadelphia,USA:Austrian Academy of Sciences,1992.

Expected Residual Minimization Method for a Class of Stochastic Mixed Equilibrium Problems

SHAN Shuqiang, ZHOU Wu, SONG Jiancheng

(School of Computer Science and Technology, Southwest Minzhu University, Chengdu 610041, China)

Abstract: [**Purposes**]The main purpose is to introduce and study the expected residual minimization method for the stochastic mixed equilibrium problem. [**Methods**]Firstly, it gives the regularized gap function of mixed equilibrium problem, and introduce stochastic mixed equilibrium problem. Secondly, it formulates stochastic mixed equilibrium problem as an minimization optimization problem. [**Findings**]By employing sample average approximation method, it finds the solution of stochastic mixed equilibrium problem under some suitable conditions. [**Conclusions**]The solution of expected residual minimization method for stochastic mixed equilibrium problem is existence and uniqueness.

Keywords: stochastic mixed equilibrium problem; generalized f-projection; regularized gap function; expected residual minimization method; sample average approximation method

(责任编辑 许 甲)