DOI:10.11721/cqnuj20190610

椭圆型方程两点边值问题的混合型高精度紧致差分格式*

马廷福，葛永斌
(宁夏大学 数学统计学院，银川 750021)

摘要:【目的】针对一维椭圆型两点边值问题，发展一种六阶混合型高精度紧致差分格式。【方法】主要利用泰勒级数展开和组合紧致差分格式(Combined compact difference, CCD)的思想，将未知函数和它的一阶导数、二阶导数作为未知变量，利用函数和各阶导数之间的固定关系，将原方程对一阶导数泰勒级数展开式中产生的三阶导数项进行替换，同时也利用了一阶导数和二阶导数的六阶组合紧致格式。它的特点是显式紧致差分格式和隐式紧致差分格式混合在一起。【结果】最终使得混合型紧致差分格式整体达到了六阶精度。此外，提出的格式还具有推导简便，易实现编程，且能直接推广到高维问题的优点。尽管格式是六阶精度，但与四阶精度格式一样，空间方向仅仅需要 3 个网格点，因此由格式生成的方程组可采用追赶法进行高效求解。【结论】最后通过对具有精确解的 4 个算例进行数值实验，数值结果验证了该格式的精确性和可靠性。

关键词:椭圆型方程;两点边值问题;混合型;紧致差分格式;高精度

中图分类号:O241.82　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2019)06-0087-06

1 问题介绍

考虑如下椭圆型方程的两点边值问题:

$$\begin{cases}\alpha(x)u_{xx}+p(x)u_x+s(x)u=f(x),x\in(a,b),\\ u(a)=u_a,u(b)=u_b。\end{cases} \tag{1}$$

其中,$u(x)$为未知函数,$\alpha(x)$,$p(x)$,$s(x)$,$f(x)$均为已知函数,且假设具有充分的光滑性。u_a,u_b 为常数。

江河、大气的对流扩散、浓度场、温度场、地下水中污染物等自然界中的很多现象都可以用该方程模型来描述。有限单元法、有限差分法、有限体积法等[1-3]是求解这些问题最为常见的方法。研究者们常用有限差分方法来求解两点边值问题,如文献[3]采用四阶紧致差分公式对空间二阶导数进行离散,提出了一种四阶精度的显式紧致差分格式。文献[4]针对非线性两点边值问题,并基于 Richardson 外推方法,构造出一种高精度紧致差分格式。文献[5]利用古典中心差分格式,并对它采用差分余项反向修正的方法,构造了一种四阶精度的紧致差分格式。文献[6]根据四阶 Padé 格式的特点,并利用原方程本身,推导出了一种求解该问题的高精度隐式紧致差分格式。文献[7]对一维和二维对流扩散问题,分别构造出了一种四阶精度的混合型紧致差分格式。文献[8]针对两点边值问题,构造出一种四阶精度的混合型紧致差分格式,该格式不能处理大雷诺数问题。以上文献构造的都是四阶精度的格式,且绝大多数处理的是扩散系数为常数的问题。本文将借助混合型高精度格式的思想,并结合紧致差分格式的特点,针对两点边值问题,构造出一种求解该问题的六阶混合型紧致格式,格式不仅能处理边界层问题,还可以处理变扩散系数问题。数值结果表明,本文格式具有较好的性能和较高的计算精度。

2 高阶紧致差分格式

首先,将定义域区间$[a,b]$划分为 N 等分,计算节点为 $x_i=a+ih$,$i=0,1,\cdots,N$,$h=(b-a)/N$,u_x^5 和 u_x^6 分

* **收稿日期**:2019-04-08　　**修回日期**:2019-08-30　　**网络出版时间**:2019-11-25 10:34

资助项目:国家自然科学基金(No. 11772165;No. 11361045)

第一作者简介:马廷福,男,博士研究生,研究方向为偏微分方程数值解法,E-mail: nxmtf_2018@163.com;**通信作者**:葛永斌,男,教授,博士,E-mail:gyb@nxu.edu.cn

网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20191125.1034.024.html

别表示 u 对 x 的五阶导数和六阶导数。定义如下差分算子：

$$\begin{cases}\delta_x^2 u_i=\dfrac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2},\\ \delta_x u_i=\dfrac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h}。\end{cases}\tag{2}$$

由泰勒级数展开得：

$$u_x=\delta_x u-\frac{h^2}{6}u_{xxx}-\frac{h^4}{120}u_x^5+O(h^6),\tag{3}$$

将(3)式代入(1)式得：

$$\alpha u_{xx}+p(\delta_x u-\frac{h^2}{6}u_{xxx}-\frac{h^4}{120}u_x^5)+su=f,\tag{4}$$

由(1)式得：

$$u_{xxx}=\frac{1}{\alpha}(f_x-\alpha_x u_{xx}-p_x u_x-pu_{xx}-s_x u-su_x),\tag{5}$$

将(5)式代入(4)式，化简整理得：

$$A_1 u_{xx}+A_2 u_x+p\delta_x u+\frac{h^2 ps_x u}{6\alpha}+su-\frac{h^4 p}{120}u_x^5=f+\frac{h^2 p}{6\alpha}f_x+O(h^6),\tag{6}$$

其中，$A_1=\alpha+\dfrac{h^2p^2}{6\alpha}+\dfrac{h^2 p\alpha_x}{6\alpha}$，$A_2=\dfrac{h^2 pp_x}{6\alpha}+\dfrac{h^2 ps}{6\alpha}$。

考虑到(6)式中含有 u_{xx}，采用如下的六阶差分公式进行离散：

$$u_{xx}=2\delta_x^2 u-\delta_x u_x+\frac{h^4}{360}u_x^6+O(h^6)。\tag{7}$$

将(7)式代入(6)式得：

$$A_1(2\delta_x^2 u-\delta_x u_x+\frac{h^4}{360}u_x^6)+A_2 u_x+p\delta_x u+\frac{h^2 ps_x u}{6\alpha}+su-\frac{h^4 p}{120}u_x^5=f+\frac{h^2 p}{6\alpha}f_x+O(h^6)。\tag{8}$$

对(8)式中高阶导数项 u_x^5 和 u_x^6，采用如下的差分公式进行离散[9]：

$$u_x^5=\frac{360}{7h^4}(u_x-\delta_x u+\frac{h^2}{6}\delta_x u_{xx})+O(h^2),\tag{9}$$

$$u_x^6=\frac{240}{h^4}(u_{xx}-\delta_x^2 u+\frac{h^2}{12}\delta_x^2 u_{xx})+O(h^2)。\tag{10}$$

将(9)，(10)式代入(8)式整理得：

$$\begin{gathered}2A_1\delta_x^2 u-\frac{2A_1}{3}\delta_x^2 u+p\delta_x u+\frac{h^2 ps_x u}{6\alpha}+su+\frac{3p}{7}\delta_x u-A_1\delta_x u_x+A_2 u_x-\frac{3p}{7}u_x+\\ \frac{2A_1}{3}u_{xx}+\frac{h^2 A_1}{18}\delta_x^2 u_{xx}-\frac{h^2 p}{14}\delta_x u_{xx}=f+\frac{h^2 p}{6\alpha}f_x+O(h^6)。\end{gathered}\tag{11}$$

对(11)式所有变量都在 x_i 点处离散，略去高阶项 $O(h^6)$，并整理得：

$$l_1 u_{i+1}+l_2 u_i+l_3 u_{i-1}=m_1 u_{xi+1}+m_2 u_{xi}+m_3 u_{xi-1}+n_1 u_{xxi+1}+n_2 u_{xxi}+n_3 u_{xxi-1}+F,\tag{12}$$

其中：$l_1=\dfrac{4A_1}{3h^2}+\dfrac{5p_i}{7h}$，$l_2=-\dfrac{8A_1}{3h^2}+\dfrac{h^2 p_i s_{xi}}{6\alpha_i}+s_i$，$l_3=\dfrac{4A_1}{3h^2}-\dfrac{5p_i}{7h}$，$m_1=\dfrac{A_1}{2h}$，$m_2=\dfrac{3p_i}{7}-A_2$，$m_3=-\dfrac{A_1}{2h}$，$n_1=\dfrac{hp_i}{28}-\dfrac{A_1}{18}$，$n_2=\dfrac{A_1}{9}-\dfrac{2A_1}{3}$，$n_3=-\dfrac{hp_i}{28}-\dfrac{A_1}{18}$，$A_1=\alpha_i+\dfrac{h^2 p_i\alpha_{xi}}{6\alpha_i}+\dfrac{h^2 p_i^2}{6\alpha_i}$，$A_2=\dfrac{h^2 p_i p_{xi}}{6\alpha_i}+\dfrac{h^2 p_i s_i}{6\alpha_i}$，$F=f_i+\dfrac{h^2 p_i}{6\alpha_i}f_{xi}$。

由于 s_x,α_x,p_x,f_x 未知，可采用四阶紧致差分公式[10]进行求解，如对 s_x 可采用下式：

$$\frac{1}{6}s_{xi-1}+\frac{2}{3}s_{xi}+\frac{1}{6}s_{xi+1}=\frac{s_{i+1}-s_{i-1}}{2h}。$$

s_x 边界点处可利用文献[10]中给出四阶精度的边界离散格式：

$$s_{x0}+3s_{x1}=\frac{1}{h}\left(-\frac{17}{6}s_0+\frac{3}{2}s_1+\frac{3}{2}s_2-\frac{1}{6}s_3\right),$$

$$s_{xN}+3s_{xN-1}=\frac{1}{h}\left(\frac{17}{6}s_N-\frac{3}{2}s_{N-1}-\frac{3}{2}s_{N-2}+\frac{1}{6}s_{N-3}\right)。$$

其余一阶导数 α_x，p_x，f_x 都采用类似的四阶精度格式计算。由于 s_x，α_x，p_x 和 f_x 各项前面的系数都含有 h^2 项，因此，每一项都可以达到六阶精度。

u_x 与 u_{xx} 在内点分别采用如下的六阶差分公式求解[9]：

$$\frac{7}{16}u_{xi+1}+u_{xi}+\frac{7}{16}u_{xi-1}=\frac{15}{16h}(u_{i+1}-u_{i-1})+\frac{h}{16}(u_{xxi+1}-u_{xxi-1}),\tag{13}$$

$$-\frac{1}{8}u_{xxi+1}+u_{xxi}-\frac{1}{8}u_{xxi-1}=\frac{3}{h^2}(u_{i+1}-2u_i+u_{i-1})-\frac{9}{8h}(u_{xi+1}-u_{xi-1})。\tag{14}$$

在边界点处的采用如下六阶差分格式计算[11]：

$$u_{x0}+5u_{x1}=\frac{1}{h}\left(-\frac{197}{60}u_0-\frac{5}{12}u_1+5u_2-\frac{5}{3}u_3+\frac{5}{12}u_4-\frac{1}{20}u_5\right),\tag{15}$$

$$u_{xN}+5u_{xN-1}=\frac{1}{h}\left(\frac{197}{60}u_N+\frac{5}{12}u_{N-1}-5u_{N-2}+\frac{5}{3}u_{N-3}-\frac{5}{12}u_{N-4}+\frac{1}{20}u_{N-5}\right),\tag{16}$$

$$u_{xx0}-6u_{xx1}=\frac{1}{h}\left(-\frac{26}{3}u_{x0}-6u_{x1}+3u_{x2}\right)+\frac{1}{h^2}\left(-\frac{403}{18}u_0+33u_1-\frac{21}{2}u_2-\frac{1}{9}u_3\right),\tag{17}$$

$$u_{xxN}-6u_{xxN-1}=\frac{1}{h}\left(\frac{26}{3}u_{xN}+6u_{xN-1}-3u_{xN-2}\right)+\frac{1}{h^2}\left(-\frac{403}{18}u_N+33u_{N-1}-\frac{21}{2}u_{N-2}-\frac{1}{9}u_{N-3}\right)。\tag{18}$$

通过推导过程显然可知格式的截断误差为 $O(h^6)$，即本文格式是六阶精度。因为本文格式即利用显式紧致差分的特点(原方程中的各阶导数都被离散)，又利用了隐式紧致差分格式的特点(各阶导数都是被独立计算的)，所以称之为混合紧致差分格式，记为 BCD6。由于该差分格式形成了三对角线型的代数方程组，因此可采用追赶法进行计算。具体计算过程如下：

第 1 步，给未知函数 u 及它的一阶导数 u_x 和二阶导数 u_{xx} 以初始值；

第 2 步，用六阶 CCD 内点格式(13)式和六阶边界格式(15)～(16)式求解一阶导数 u_x；

第 3 步，用六阶 CCD 内点格式(14)式和六阶边界格式(17)～(18)式求解二阶导数；

第 4 步，用六阶格式(12)式求解未知函数 u；

第 5 步，重复第 2 步至第 4 步直到 u 的误差范数达到限定的条件。

3 数值实验

现考虑如下有精确解的数值算例来验证本文格式的精确性和可靠性。为了与本文 BCD6 格式进行比较，分别选用文献[3,6,8]作为比较对象。下文给出了问题 1～3 在不同网格步长下的最大绝对误差 E 及收敛阶 r，即：$E=\max\limits_{0\leqslant i\leqslant N}|u_i-U_i|$，$r=\dfrac{\ln(E_1/E_2)}{\ln(h_1/h_2)}$。这里，点 x_i 处的精确解和数值解分别用 U_i 和 u_i 表示，E_1 和 E_2 分别表示网格步长为 h_1 和 h_2 时对应的最大绝对误差。

问题 1[3]　$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\pi^2\sin(\pi x)-\pi\cos(\pi x)$，$0<x<1$，$u(0)=u(1)=0$。它的精确解为：$u(x)=\sin(\pi x)$。

问题 1 是常系数两点边值问题。表 1 给出了在不同网格步长 $d_1=-\dfrac{A}{2h}$下的 4 个差分格式所得到的计算结果对比。由计算结果可以看出，文献[3,8]中格式都能够达到它们的理论四阶精度，文献[6]不能达到它的理论四阶精度，而本文格式在网格数较少时能够达到理论六阶精度，伴随着网格数不断的增加，由于计算机本身机器精度的原因致使误差结果出现不稳定的情况。但整体来看，本文格式精度明显优于文献[3,6,8]中的格式。

问题 2[3]　$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-(1+x)^2\dfrac{\partial u}{\partial x}-e^{-x}u=f(x)$，$0<x<1$，$f(x)=[1-(1+x)^2]e^x-\pi^2\cos(\pi x)+\pi(1+x)^2$。$\sin(\pi x)-1-e^{-x}\cos(\pi x)$，$u(0)=2$，$u(1)=e-1$。该问题的精确解为：$u(x)=e^x+\cos(\pi x)$。

表 2 给出了问题 2 在不同网格步长 h 下，采用 4 种不同的差分格式计算的最大误差和收敛阶。从表 2 可以看出，文献[3,8]中的格式均能达到它们的理论四阶精度，而文献[6]中格式当网格步长 h 减小时，逐步丧失精

度，但本文格式在网格数较少时都能达到理论六阶精度，伴随着网格数的增多，计算结果达到机器精度，最大绝对误差不再下降。

表1 问题1在不同网格步长 h 下的最大绝对误差和收敛阶

Tab. 1 The maximum error and convergence rate for different h for Problem 1

h	文献[3]格式		文献[6]格式		文献[8]格式		本文格式	
	最大绝对误差	收敛阶	最大绝对误差	收敛阶	最大绝对误差	收敛阶	最大绝对误差	收敛阶
1/20	2.30e−06		2.14e−06		7.48e−06		1.26e−07	
1/40	1.44e−07	4.00	1.59e−07	3.75	2.90e−07	4.69	1.03e−09	6.93
1/80	9.00e−09	4.00	1.28e−08	3.63	1.24e−08	4.55	8.25e−12	6.96
1/160	5.62e−10	4.00	3.75e−09	1.77	5.93e−10	4.39	3.05e−13	4.76
1/320	3.52e−11	4.00	3.24e−09	0.21	3.13e−11	4.24	6.83e−13	
1/640	2.22e−12	3.99	3.21e−09	0.01	1.47e−12	4.41	1.21e−12	

表2 问题2在不同网格步长 h 下的最大绝对误差和收敛阶

Tab. 2 The maximum error and convergence rate for different h for Problem 2

h	文献[3]格式		文献[6]格式		文献[8]格式		本文格式	
	最大绝对误差	收敛阶	最大绝对误差	收敛阶	最大绝对误差	收敛阶	最大绝对误差	收敛阶
1/20	8.04e−06		2.58e−06		1.94e−06		4.67e−08	
1/40	5.03e−07	4.00	1.53e−07	4.06	1.46e−07	3.73	3.86e−10	6.92
1/80	3.14e−08	4.00	8.59e−09	4.15	9.55e−09	3.93	5.53e−12	6.13
1/160	1.96e−09	4.00	3.30e−09	1.38	6.04e−10	3.98	1.42e−12	1.96
1/320	1.23e−10	3.99	3.37e−09	0.03	3.76e−11	4.01	4.21e−13	1.75
1/640	7.70e−12	4.00	3.33e−09	0.02	1.81e−12	4.38	9.25e−13	

问题3 $e^{2\eta x}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+e^{\eta x}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\gamma^2(1-e^{2\eta x})u=f(x),0<x<1,f(x)=\gamma^2\sin(\gamma x)+\gamma e^{\eta x}\cos(\gamma x)-2\gamma^2 e^{2\eta x}$。$\sin(\gamma x),u(0)=0,u(1)=\sin(\gamma)$。该问题的精确解为：$u(x)=\sin(\gamma x)$。

问题3是变系数问题，并且涉及参数 η 和 γ。表3给出了 $\eta=1,\gamma=5$ 时的计算结果，表4给出了当 $\eta=5,\gamma=1$ 时的计算结果。可以看出，文献[3,8]中的格式均达到了它们的四阶精度，本文格式能够达到理论六阶精度，说明本文格式具有更精确的计算结果和更高的计算精度。

问题4 $-\varepsilon u_{xx}+u_x=\varepsilon\pi^2\sin(\pi x)+\pi\cos(\pi x),0<x<1$，它的精确解为：

$$u(x)=\sin(\pi x)+\frac{e^{x/\varepsilon}-1}{e^{1/\varepsilon}-1}=\sin(\pi x)+\frac{e^{(x-1)/\varepsilon}-e^{-1/\varepsilon}}{1-e^{-1/\varepsilon}}。$$

表3 问题3当 $\eta=1,\gamma=5$ 时，在不同网格步长 h 下的最大绝对误差和收敛阶

Tab. 3 The maximum error and convergence rate at $\eta=1,\gamma=5$ for different h for Problem 3

h	文献[3]格式		文献[6]格式		文献[8]格式		本文格式	
	最大绝对误差	收敛阶	最大绝对误差	收敛阶	最大绝对误差	收敛阶	最大绝对误差	收敛阶
1/20	2.02e−05		1.38e−05		5.56e−05		2.47e−06	
1/40	1.26e−06	4.00	7.79e−07	4.15	1.99e−06	4.80	2.38e−08	6.70
1/80	7.89e−08	4.00	4.98e−08	3.97	6.54e−08	4.93	2.00e−10	6.89
1/160	4.93e−09	4.00	4.94e−09	3.33	2.72e−09	4.59	1.60e−12	6.97
1/320	3.08e−10	4.00	2.36e−09	1.07	1.43e−10	4.25	9.96e−14	4.01
1/640	1.92e−11	4.00	2.22e−09	0.09	8.05e−12	4.15	3.77e−13	

表 4　问题 3 当 $\eta=5,\gamma=1$ 时，在不同网格步长 h 下的最大绝对误差和收敛阶

Tab. 4　The maximum error and convergence rate at $\eta=5,\gamma=1$ for different h for Problem 3

h	文献[3]格式		文献[6]格式		文献[8]格式		本文格式	
	最大绝对误差	收敛阶	最大绝对误差	收敛阶	最大绝对误差	收敛阶	最大绝对误差	收敛阶
1/20	4.07e−08		3.40e−09		1.95e−08		2.40e−08	
1/40	2.46e−09	4.05	1.03e−09	1.72	6.46e−10	4.92	2.81e−10	6.42
1/80	1.52e−10	4.02	4.90e−10	1.07	2.08e−11	4.96	5.43e−12	5.69
1/160	9.48e−12	4.00	4.14e−10	0.24	6.59e−13	4.98	1.20e−13	5.50
1/320	6.11e−13	3.96	3.98e−10	0.06	9.07e−14	2.86	2.65e−13	

表 5～8 给出了问题 4 当 $\varepsilon=1,0.1,0.01,0.001$ 时的计算结果，注意到对于该问题当 ε 很小时，它的精确解在 $x=1$ 处有一边界层。分别采用中心差分格式和本文格式进行了计算，由表 5 可以看出当 $\varepsilon=1$ 时，本文 BCD6 格式能够达到理论上的六阶精度。伴随着 ε 的逐步减小，边界层变得越来越薄，只有在网格数增大到一定程度时，本文格式才可达到理论上的六阶精度。对于中心差分格式而言当 ε 较大时，如 $\varepsilon=1,0.1$ 时可以达到理论上的二阶精度，但当 ε 较小时如 $\varepsilon=0.01,0.001$，必须采用较多的网格数才可达到二阶精度。

表 5　当 $\varepsilon=1$ 时，问题 4 在不同网格数 N 下的最大绝对误差和收敛阶

Tab. 5　The maximum error and convergence rate at $\varepsilon=1$ for different N for Problem 4

N	中心差分格式		本文格式	
	最大绝对误差	收敛阶	最大绝对误差	收敛阶
8	1.31e−02		4.94e−05	
16	3.26e−03	2.00	5.78e−07	6.42
32	8.16e−04	2.00	4.86e−09	6.89
64	2.04e−04	2.00	3.81e−11	7.00

表 6　当 $\varepsilon=0.1$ 时，问题 4 在不同网格数 N 下的最大绝对误差和收敛阶

Tab. 6　The maximum error and convergence rate at $\varepsilon=0.1$ for different N for Problem 4

N	中心差分格式		本文格式	
	最大绝对误差	收敛阶	最大绝对误差	收敛阶
8	5.17e−02		9.76e−03	
16	1.11e−02	2.22	3.69e−04	4.73
32	2.84e−03	1.97	6.74e−06	5.77
64	7.05e−04	2.00	8.18e−08	6.36

表 7　问题 4 当 $\varepsilon=0.01$ 时，在不同网格数 N 下的最大绝对误差和收敛阶

Tab. 7　The maximum error and convergence rate at $\varepsilon=0.01$ for different N for Problem 4

N	中心差分格式		本文格式	
	最大绝对误差	收敛阶	最大绝对误差	收敛阶
64	8.68e−02		2.29e−02	
128	1.96e−02	2.14	1.17e−03	4.29
256	4.69e−03	2.07	2.59e−05	5.50
512	1.17e−03	2.00	3.49e−07	6.21

表 8　问题 4 当 $\varepsilon=0.001$ 时，在不同网格数 N 下的最大绝对误差和收敛阶

Tab. 8　The maximum error and convergence rate at $\varepsilon=0.001$ for different N for Problem 4

N	中心差分格式		本文格式	
	最大绝对误差	收敛阶	最大绝对误差	收敛阶
512	1.30e−01	1.40	4.71e−02	
1 024	3.28e−02	1.99	3.40e−03	3.79
2 048	7.50e−03	2.13	9.45e−05	5.17
4 096	1.84e−03	2.03	1.45e−06	6.03
8 192	4.57e−04	2.01	1.60e−08	6.50

4 结论

本文针对两点边值问题，依据泰勒级数展开，借助混合紧致格式的思想，提出了具有六阶精度的一种混合型紧致差分格式。该格式涉及到 3 个点上的未知函数以及对应的一阶和二阶导数值，离散所形成的方程组可采用追赶法进行求解。同时为了确保格式整体达到六阶精度，一阶和二阶导数也采用六阶 CCD 紧致差分公式进行独立计算。最后通过几个有效的数值算例，验证了本文 BCD6 格式可以达到六阶精度，最大绝对误差比文献中的四阶差分格式要小很多，这表明本文 BCD6 格式具有更高的计算精度。

参考文献:

[1] 朱起定,赖军将. 变系数两点边值问题的有限元强校正格式[J]. 数学物理学报(A辑),2006,26(6):847-857.
ZHU Q D,LAI J J. An ultraconvergence correction scheme for finite element method of the two-point boundary value problem with general coefficients[J].Acta Mathematica Scientia(A),2006,26(6):847-857.

[2] 周磊,王同科. 两点周期边值问题的紧有限体积方法[J]. 天津师范大学学报(自然科学版),2015,35(2):1-6.
ZHOU L,WANG T K. Compact finite volume scheme for two point periodic boundary value problem[J]. Journal of Tianjin Normal University (Natural Science),2015,35(2):1-6.

[3] 刘明会. 两点边值问题的一种高精度差分方法[J]. 上海理工大学学报,2005,27(1):68-70.
LIU M H. High-order finite difference method for solving two-points boundary value problem[J]. Journal of University of Shanghai for Science and Technology,2005,27(1):68-70.

[4] WANG Y M. The extrapolation of Numerov's scheme for nonlinear two-point boundary value problems[J]. Appl Numer Math,2007,57(3):253-269.

[5] 田振夫. 两点边值问题的一种高精度差分方法[J]. 贵州大学学报(自然科学版),1997,14(1):19-23.
TIAN Z F. A high-order finite difference method for solving two-point boundary value problem[J].Journal of Guizhou University(Natural Science),1997,14(1):19-23.

[6] 金涛,马廷福,葛永斌. 两点边值问题的一种高阶隐式紧致差分方法[J]. 咸阳师范学院学报,2011,26(2):1-3.
JIN T, MA T F, GE Y B.High-order implicit compact difference scheme for two-points boundary value problems [J]. Journal of Xianyang Normal University,2011,26(2):1-3.

[7] SEN S. A new family of (5,5)CC-4OC schemes applicable for unsteady Navier-Stokes equations[J]. J Comput Phys,2013,251:251-271.

[8] 梁昌弘,马廷福,葛永斌. 两点边值问题的混合型高精度紧致差分格式[J]. 宁夏大学学报(自然科学版),2017,38(1):1-4.
LIANG C H, MA T F, GE Y B. Mixed high-order compact difference method for solving the two-point boundary value problem[J]. Journal of Ningxia University (Natural Science Edition),2017,38(1):1-4.

[9] CHU P C,FAN C W. A three-point combined compact difference scheme[J]. J Comput Phys,1998,140:370-399.

[10] LELE S K. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution[J]. J Comput Phys,1992,103:16-42.

[11] MA T F,GE Y B. A higher-order blended compact difference(BCD) method for solving general 2D linear second-order partial differential equations[J]. Advances in Difference Equations,2019,98:1-21.

High-Order Blended Compact Difference Scheme for Solving the Elliptic Equation with Two-Point Boundary Value

MA Tingfu, GE Yongbin

(College of Mathematics and Statistics, Ningxia University, Yinchuan 750021, China)

Abstract: [**Purposes**]A sixth-order blended compact difference scheme is developed for solving a dimensional elliptic equation with two-point boundary value. [**Methods**]With the help of the Talyor series and the combined compact difference scheme, the proposed scheme, where transport variable, its first-order and second-order derivatives are considered as the unknowns, combines the virtues of compact discretization and sixth-order combined compact difference (CCD) scheme for spatial derivatives. Namely, the present BCD6 scheme uses the fixed relation between functions and derivatives, original equation by which the higher-order derivative items produced in the Taylor series expansion are replaced as well as the sixth-order CCD scheme of the first-order and second-order derivatives. The sixth-order scheme requires only three grid points, same with the fourth-order scheme, so the linear systems can be effectively solved by the Thomas algorithm. [**Findings**]The distinguishing feature of the present method is that the methodologies of explicit compact difference and implicit compact difference are blended together. The algorithm based on the new methods is simple, which can be easily implemented in any programming language and can be well extended to the high dimensional problem. [**Conclusions**]Finally, the presented methods are applied to four test problems with exact solution, and the accuracy and dependability of the present BCD6 scheme are verified by numerical results.

Keywords: elliptic equation; two-point boundary value problem; blended type; compact difference scheme; high-order accuracy

(责任编辑 许 甲)