2005 年 3 月 重庆师范大学学报(自然科学版) Mar. 2005
第 22 卷 第 1 期 Journal of Chongqing Normal University(Natural Science Edition) Vol. 22 No. 1

有关切比雪夫多项式的几个组合恒等式*

朱伟义
(浙江师范大学 数理学院,浙江 金华 321004)

摘 要:利用母函数的方法,研究了第一类和第二类切比雪夫多项式,得到了切比雪夫多项式之间的有趣恒等式。并利用切比雪夫多项式和 Fibonacci 数、Lucas 数的内在联系,得到了 Fibonacci 数和 Lucas 数之间的一些有趣的恒等式。

关键词:第一类切比雪夫多项式;第二类切比雪夫多项式;母函数;恒等式
中图分类号:O156.4 **文献标识码**:A **文章编号**:1672-6693(2005)01-0018-03

Some Identities About Chebyshev Polynomials

ZHU Wei-yi
(College of Mathematics and Physics, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang 321004, China)

Abstract: In this paper, we have studied Chebyshev Polynomials of the first and second kind, and obtainted some identical equation about Chebyshev Polynomials of the first and second kind, thus getting some relations between the Fibonacci Numbers and the Lucas Numbers.

Key words: the first Chebyshev Polynomials; the second Chebyshev Polynomials; mother function; identities.

1 引言与引理

著名的第一类和第二类切比雪夫多项式 $T_n(x)$ 和 $U_n(x)$ 定义[1]为

$$\frac{1-xt}{1-2xt+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(x)t^n \quad |x|\leqslant 1,|t|\leqslant 1$$

$$\frac{1}{1-2xt+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}U_n(x)t^n \quad |x|\leqslant 1,|t|\leqslant 1$$

由文献[2]知第一类和第二类切比雪夫多项式 $T_n(x)$ 和 $U_n(x)$ 与著名的 Fibonacci 数列和 Lucas 数列有非常密切的关系,即有下面的引理。

引理 设 $T_n(x)$ 和 $U_n(x)$ 为第一、二类切比雪夫多项式,则有

$$U_n\left(\frac{i}{2}\right)=i^nF_{n+1},T_n\left(\frac{i}{2}\right)=\frac{i^n}{2}L_n$$

$$U_n\left(-\frac{3}{2}\right)=(-1)^nF_{2(n+1)},T_n\left(\frac{-3}{2}\right)=\frac{(-1)^n}{2}L_{2n}$$

$$U_n(-2i)=\frac{(-i)^n}{2}F_{3(n+1)},T_n(-2i)=\frac{(-1)^n}{2}L_{3n}$$

而 Fibonacci 数列和 Lucas 数列由下面的二次线性递推公式给出。

$$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n,n\geqslant 0;L_{n+2}=L_{n+1}+L_n,n\geqslant 0。$$

其中 $F_0=0,F_1=1;L_0=2,L_1=1$。

切比雪夫多项式和 Fibonacci 数、Lucas 数有许多有趣的性质,一直是许多专家、学者研究的热点,得到了很多有益的结果[2~4]。张文鹏教授在文献[2]中研究了第一类和第二类切比雪夫多项式 $T_n(x)$ 和 $U_n(x)$ 的有关恒等式,得到了

$$\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}=n}\prod_{i=1}^{k+1}U_{a_i}(x)=\frac{1}{2^kk!}U_{n+k}^{(k)}(x)$$

$$\sum_{a_1+a_2+\cdots a_{k+1}=n+2k+2}\prod_{i=1}^{k+1}(a_i+1)U_{a_i}(x)=$$

$$\frac{1}{2^{2k+1}(2k+1)!}\sum_{h=0}^{k+1}(-1)^h\binom{k+1}{h}U_{n+4k+3-2h}^{(2k+1)}(x)$$

$$\sum_{a_1+a_2+\cdots a_{k+1}=n+k+1}\prod_{i=1}^{k+1}T_{a_i}(x)=$$

$$\frac{1}{2^kk!}\sum_{h=0}^{k+1}(-x)^h\binom{k+1}{h}U_{n+2k+-h}^{(k)}(x)$$

* 收稿日期:2004-10-26
资助项目:浙江省重点学科和浙江省教育厅科研基金(NO. 20040846)
作者简介:朱伟义(1964-),男,浙江诸暨人,副教授,主要从事数论研究。

并由此得到了关于 Fibonacci 数、Lucas 数的一系列有趣的恒等式。

本文用母函数方法研究了 $T_n(x)$ 和 $U_n(x)$ 之间的关系，得到了 $T_n(x)$ 和 $U_n(x)$ 之间一些有趣的恒等式，并利用 $T_n(x)$，$U_n(x)$ 和 Fibonacci 数、Lucas 数之间的关系得到了 Fibonacci 数、Lucas 数之间的恒等关系式，即有下列的结论。

2　定理推论及证明

定理 1　设 $U_n(x)$ 为第二类切比雪夫多项式，n 是大于或等于零的整数，则有

$$\sum_{a=0}^{n} C_n^a U_a(x) U_{n-a}(x) = \frac{2^{n-1}}{x^2-1}(T_{n+2}(x) - x^n)$$

证明　由文献[2]知

$$T_n(x) = 1/2\left((x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n\right) \quad (1)$$

$$U_n(x) = (2\sqrt{x^2-1})^{-1} \cdot \left((x+\sqrt{x^2-1})^{n+1} - (x-\sqrt{x^2-1})^{n+1}\right) \quad (2)$$

作函数 $\phi(x,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{U_n(x)}{n!}t^n = (2\sqrt{x^2-1})^{-1}\cdot\left((x+\sqrt{x^2-1})e^{(x+\sqrt{x^2-1})t} - (x-\sqrt{x^2-1})e^{(x-\sqrt{x^2-1})t}\right)$，两边平方得

$$\phi(x,t)^2 = (4(x^2-1))^{-1}\cdot\left((x+\sqrt{x^2-1})^2 e^{2(x+\sqrt{x^2-1})t} + (x-\sqrt{x^2-1})e^{2(x-\sqrt{x^2-1})t} - 2e^{2xt}\right) =$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{4(x^2-1)n!}\left((x+\sqrt{x^2-1})^{n+2} + (x-\sqrt{x^2-1})^{n+2} - 2x^n\right)t^n =$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{2(x^2-1)n!}(T_{n+2}(x) - x^n)t^n \quad (3)$$

又　$$\phi(x,t)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{a+b=n}\frac{U_a(x)}{a!}\frac{U_b(x)}{b!}\right)t^n \quad (4)$$

比较(3)、(4)两式对应项系数有

$$\sum_{a=0}^{n} C_n^a U_a(x) U_{n-a}(x) = \frac{2^{n-1}}{x^2-1}(T_{n+2}(x) - x^n)$$　证毕

推论 1　设 n 是大于或等于零的整数，F_n 为 Fibonacci 数，L_n 为 Lucas 数，则有

1) $\sum\limits_{a=0}^{n} C_n^a F_{a+1} F_{n+1-a} = \frac{1}{5}(2^n L_{n+2} + 2)$

2) $\sum\limits_{a=0}^{n} C_n^a F_{2(a+1)} F_{2(n+1-a)} = \frac{1}{5}(2^n L_{2(n+2)} - 2\times 3^n)$

3) $\sum\limits_{a=0}^{n} C_n^a F_{3(a+1)} F_{3(n+1-a)} = \frac{1}{5}(2^n L_{3(n+2)} + 2^{2n+1})$

证明　由引理知有 $U_n\left(\frac{i}{2}\right) = i^n F_{n+1}$，$T_n\left(\frac{i}{2}\right) = \frac{i^n}{2}L_n$，在定理 1 取 $x = \frac{i}{2}$ 时，即有

$$\sum_{a=0}^{n} C_n^a F_{a+1} F_{n+1-a} = \frac{1}{5}(2^n L_{n+2} + 2)$$

从而证明了结论 1)。注意到

$$U_n\left(-\frac{3}{2}\right) = (-1)^n F_{2(n+1)},\ T_n\left(\frac{-3}{2}\right) = \frac{(-1)^n}{2}L_{2n}$$

$$U_n(-2i) = \frac{(-i)^n}{2}F_{3(n+1)},\ T_n(-2i) = \frac{(-1)^n}{2}L_{3n}$$

在定理 1 中分别取 $x = -\frac{3}{2}$，$-2i$ 即可得结论 2)、3)。　证毕

定理 2　设 $T_n(x)$ 为第一类切比雪夫多项式，n 是大于或等于零的整数，则有

$$\sum_{a=0}^{n} C_n^a T_a(x) T_{n-a}(x) = 2^{n-1}(T_n(x) + x^n)$$

证明　作函数 $\varphi(x,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{T_n(x)}{n!}t^n =$

$$\frac{1}{2}\left(e^{(x+\sqrt{x^2-1})t} + e^{(x-\sqrt{x^2-1})t}\right)$$

$$\varphi(x,t)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2(x+\sqrt{x^2-1})t} + e^{2(x-\sqrt{x^2-1})t} + 2e^{2xt}\right) =$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{4n!}\left((x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n + 2x^n\right)t^n =$$
$$\sum_{a=0}^{\infty}\frac{2^n}{2n!}(T_n(x) + x^n)t^n \quad (5)$$

又 $$\varphi(x,t)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{a+b=n}\frac{T_a(x)}{a!}\frac{T_b(x)}{b!}\right)t^n \quad (6)$$

比较(5)、(6)两式对应项系数有

$$\sum_{a=0}^{n} C_n^a T_a(x) T_{n-a}(x) = 2^{n-1}(T_n(x) + x^n)$$　证毕

推论 2　设 n 是大于或等于零的整数，L_n 为 Lucas 数，则有

1) $\sum\limits_{a=0}^{n} C_n^a L_a L_{n-a} = 2^n L_n + 2$

2) $\sum\limits_{a=0}^{n} C_n^a L_{2a} L_{2(n-a)} = 2^n L_{2n} + 2\times 3^n$

3) $\sum\limits_{a=0}^{n} C_n^a L_{3a} L_{3(n-a)} = 2^n L_{3n} + 2^{2n+1}$

类似于证明推论 1 的方法由引理和定理 2 即可得推论 2。

定理 3　设 $T_n(x)$ 和 $U_n(x)$ 分别为第一、二类切比雪夫多项式，n 是大于或等于零的整数，则有

$$\sum_{a=0}^{n} C_n^a U_a(x) T_{n-a}(x) = 2^{n-1}U_n(x) + 2^{n-1}x^n$$

证明　考虑 $\varphi(x,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{T_n(x)}{n!}t^n$ 和 $\phi(x,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{U_n(x)}{n!}t^n$ 的积。

$$h(x,t)=\varphi(x,t)\phi(x,t)=$$
$$(4\sqrt{x^2-1})^{-1}((x+\sqrt{x^2-1})e^{2(x+\sqrt{x^2-1})t}-$$
$$(x-\sqrt{x^2-1})e^{2(x-\sqrt{x^2-1})t}+2\sqrt{x^2-1}\,e^{2xt})=$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{4\sqrt{x^2-1}\,n!}((x+\sqrt{x^2-1})^{n+1}-$$
$$(x-\sqrt{x^2-1})^{n+1}-2\sqrt{x^2-1}\,x^n)t^n=$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}2^{n-1}(\mathrm{U}_n(x)-x^n)t^n \tag{7}$$

又
$$h(x,t)=\varphi(x,t)\phi(x,t)=$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{a+b=n}\frac{\mathrm{T}_a(x)}{a!}\frac{\mathrm{U}_b(x)}{b!}\Big)t^n \tag{8}$$

比较(7)、(8)两式对应项系数有

$$\sum_{a=0}^{n}C_n^a\mathrm{U}_a(x)\mathrm{T}_{n-a}(x)=2^{n-1}\mathrm{U}_n(x)+2^{n-1}x^n$$ 证毕

推论3 设n是大于或等于零的整数,F_n为Fibonacci数,L_n为Lucas数,则有

1) $\sum_{a=0}^{n}C_n^a\mathrm{F}_{a+1}\mathrm{L}_{n-a}=2^n\mathrm{F}_{n+1}+1$

2) $\sum_{a=0}^{n}C_n^a\mathrm{F}_{2(a+1)}\mathrm{L}_{2(n-a)}=2^n\mathrm{F}_{2(n+1)}+3^n$

3) $\sum_{a=0}^{n}C_n^a\mathrm{F}_{3(a+1)}\mathrm{F}_{3(n-a)}=2^n\mathrm{F}_{3(n+1)}+2^{2n+1}$

类似于证明推论1的方法由引理和定理3立即可得推论3。

综上所述,本文建立了第一、二类切比雪夫多项式$\mathrm{T}_n(x)$和$\mathrm{U}_n(x)$之间几个有趣的两次恒等式关系,并由第一、二类切比雪夫多项式和Fibonacci数F_n和Lucas数L_n的关系式,得到了有关Lucas数和Fibonacci数之间的系列有趣的两次恒等式,如函数考虑$\phi(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{U}_n(x)}{n!}t^n$和$\phi(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{T}_n(x)}{n!}t^n$的高次积,可得到高次的恒等式关系。

参考文献:

[1] 数学手册编写组. 数学手册[M]. 北京:高等教育出版社,1979.609-610.

[2] ZHANG W P. SomeIdenties Inolving the Fibonacci Numbers[J]. the Fibonacci Quarterly,1997,35(3):225-229.

[3] ZHANG W P. On Chebyshev Polynomials and Fibonacci Numbers[J]. the Fibonacci Quarterly,2002,40(5):424-428.

[4] 朱伟义. 关于Fibonacci数和Bernoulli数的一个恒等式[J]. 浙江师范大学学报(自然科学版),1999(2):5-8.

(责任编辑 黄 颖)