一类基于二部图的(g,f)-3-覆盖图的研究*

黄光鑫[1]，尹　凤[2]

(1. 成都理工大学 信息管理学院，成都 610059；2. 电子科技大学 应用数学学院，成都 610054)

摘　要：一个图 G 称为(g,f)-3-覆盖图，如果 G 的任何三条边都属于它的一个(g,f)-因子。本文得到了如下结论：1)当 $g\leqslant f$ 时一个二部图是(g,f)-3-覆盖图的一个充分必要条件；2)当时 $f(X)=f(Y)$ 时一个二部图是 f-3-覆盖图的一个充分必要条件。

关键词：图；因子；覆盖图；(g,f)-3-覆盖图

中图分类号：O157.5　　文献标识码：A　　文章编号：1672-6693(2005)02-0009-03

A Research into the Type of (g,f)-3- covered Graphs Based on Bipartite Graphs

HUANG Guang-xin[1]，YIN Feng[2]

(1. College of Information and Management, Chengdu University of Technology, Chengdu 610059；
2. College of Applied Maths, University of Electronic Science and Technology, Chengdu 610054, China)

Abstract：A graph G is called a (g,f)-3- covered graph if every three edges belong to a (g,f)- factor. In this paper a necessary and sufficient condition for a bipartite graph to be (g,f)-3- covered is given when $g\leqslant f$, then a necessary and sufficient condition for a bipartite graph to be f-3- covered are obtained.

Key words：graph；factor；covered graph；(g,f)-3- covered graph

本文所考虑的图均为有限无向简单图，未说明的术语和符号见文献[1]。设 G 是一个图，分别用 $V(G)$ 和 $E(G)$ 表示图 G 的顶点集和边集，用 $d_G(x)$ 表示顶点 x 在 G 中的次数。设 g,f 分别是定义在 $V(G)$ 上的两个整数值函数，若对每个 $x\in V(G)$ 有 $g(x)\leqslant f(x)$，则图 G 的一个(g,f)-因子是 G 的一个支撑子图 F，使得对每个 $x\in V(G)$ 有 $g(x)\leqslant d_F(x)\leqslant f(x)$。若对任意 $x\in V(G)$ 有 $g(x)\leqslant f(x)$ $(g<f)$，以下简记为 $g\leqslant f(g<f)$。设任意 $S,T\subseteq V(G)$，$G[S]$ 表示 G 的由 S 导出的子图，记 $G-S=G[V(G)\setminus S]$。若 $E_1\subseteq E(G)$，用 $G-E_1$ 表示从 G 中去掉 E_1 中的全部边所得到的图。且有

$$E_G(S,T)=\{xy\in E(G)\mid x\in S,y\in T\}$$
$$e_G(S,T)=|E_G(S,T)|$$

为方便，对任意函数 f，记 $f(S)=\sum_{x\in S}f(x)$，并且令 $f(\Phi)=0$。记

$$\delta_G(S,T;g,f)=f(S)-g(T)+d_G(T)-e_G(S,T)$$

Folkman，Fulkerson 曾得到下面的结果。

引理 1[2]　设 $G=(X,Y)$ 是一个二部图，g 和 f 分别是定义在 $V(G)$ 上的两个整数值函数，使对每个 $x\in V(G)$ 有 $g(x)\leqslant f(x)$，则 G 有一个(g,f)-因子当且仅当对任意 $S\subseteq X$ 和 $T\subseteq Y$ 有

$$\delta_G(S,T;g,f)\geqslant 0 \text{ 且 } \delta_G(T,S;g',f')\geqslant 0$$

刘桂真教授[3]引进了(g,f)-覆盖图的概念，即过图 G 的任意一条边都有 G 的一个(g,f)-因子，则称图 G 是一个(g,f)-覆盖图，并且给出了一个图是(g,f)-覆盖图的充要条件，又给出了一个图有一个(g,f)-因子含有一条指定边的充要条件[4]。黄光鑫[5,6]推广了这一概念如下，如果过图 G 的任意 k 条边都有 G 的一

* 收稿日期：2005-01-10
资助项目：重庆市教委基金项目(960384)；成都理工大学青年基金项目(R230246)
作者简介：黄光鑫(1976-)，男，四川内江人，助教，硕士，主要研究方向为组合最优化，图论及其算法。

个(g,f)-因子,则称G是一个(g,f)-k-覆盖图($k=2,3$),并且分别得到了当$g<f$时一个图是(g,f)-2-覆盖图和(g,f)-3-覆盖图的充分必要条件。若$\forall x\in V(G)$有$f(x)=g(x)$,则称一个(g,f)-3-覆盖图G是一个f-3-覆盖图。当$g\leqslant f$时,寻找图G是一个(g,f)-3-覆盖图的充要条件是一个相当困难的问题。本文得到了如下结果,1)当$g\leqslant f$时一个二部图是(g,f)-3-覆盖图的一个充分必要条件;2)当$f(X)=f(Y)$时一个二部图是f-3-覆盖图的一个充分必要条件及其简单判别准则。

1 主要结果及证明

定理1 设$G=(X,Y)$是一个二部图,g和f分别是定义在$V(G)$上的两个整数值函数且$g\leqslant f$,则G是一个(g,f)-3-覆盖图当且仅当对任意$S\subseteq X$,$T\subseteq Y$有

$$\delta_G(S,T;g,f)=f(S)-g(T)+d_G(T)-e_G(S,T)\geqslant\varepsilon(S,T) \tag{1}$$

且

$$\delta_G(T,S;g,f)=f(T)-g(S)+d_G(S)-e_G(T,S)\geqslant\varepsilon(T,S) \tag{2}$$

其中,$\varepsilon(S,T)$定义如下,若$d_{G-T}(S)\geqslant 3$,则$\varepsilon(S,T)=3$;若$d_{G-T}(S)=2$,则$\varepsilon(S,T)=2$;若$d_{G-T}(S)=1$,则$\varepsilon(S,T)=1$;否则$\varepsilon(S,T)=0$。

证明 设$e_i=u_iv_i$,$i=1,2,3$为图G的任意三条边,记$G'=G-\{e_1,e_2,e_3\}$。定义$V(G)$上的函数f',g',使

$$f'(x)=\begin{cases}f(x)-n(x),x=u_i,v_i,i=1,2,3\\ f(x),\text{否则}\end{cases}$$

$$g'(x)=\begin{cases}g(x)-n(x),x=u_i,v_i,i=1,2,3\\ g(x),\text{否则}\end{cases}$$

其中,$n(x)$表示顶点x与e_1、e_2、e_3相关联的次数。

易见,G是一个(g,f)-3-覆盖图等价于对G的任意三条边e_1、e_2、e_3,G有一个(g,f)-因子含e_1、e_2、e_3,也等价于G'有一个(g',f')-因子。根据引理1,只要证明对任意$S\subseteq X$和$T\subseteq Y$有

$$\delta_G'(S,T;g',f')=f'(S)-g'(T)+d_{G'}(T)-e_{G'}(S,T)\geqslant 0 \tag{3}$$

且

$$\delta_{G'}(T,S;g',f')=f'(T)-g'(S)+d_{G'}(S)-e_{G'}(T,S)\geqslant 0 \tag{4}$$

由$e_i(i=1,2,3)$的任意性,(3)、(4)式成立,当且仅当对任意$S\subseteq X$和$T\subseteq Y$有下列两式成立

$$\min_{e_i\in E(G),i=1,2,3}\delta_{G'}(S,T;g',f')\geqslant 0 \tag{5}$$

$$\min_{e_i\in E(G),i=1,2,3}\delta_{G'}(T,S;g',f')\geqslant 0 \tag{6}$$

注意到以下事实

$$d_{G'}(T)-g'(T)=d_G(T)-g(T) \tag{7}$$

$$d_{G'}(S)-g'(S)=d_G(S)-g(S) \tag{8}$$

由$\varepsilon(S,T)$的定义及(7)、(8)式可知

$$\begin{aligned}&\varepsilon(S,T)=\max_{e_i\in E(G),i=1,2,3}\{d_{G-T}(S)-d_{G'-T}(S)\}=\max_{e_i\in E(G),i=1,2,3}\{[d_G(S)-e_G(S,T)]-[d_{G'}(S)-e_{G'}(S,T)]\}=\\&\max_{e_i\in E(G),i=1,2,3}\{[f(S)-f'(S)]-[e_G(S,T)-e_{G'}(S,T)]\}=\max_{e_i\in E(G),i=1,2,3}\{[f(S)-e_G(S,T)]-[f'(S)-e_{G'}(S,T)]\}=\\&\max_{e_i\in E(G),i=1,2,3}\{[f(S)-g(T)+d_G(T)-e_G(S,T)]-[f'(S)-g'(T)+d_{G'}(T)-e_{G'}(S,T)]\}=\\&\max_{e_i\in E(G),i=1,2,3}\{\delta_G(S,T;g,f)-\delta_{G'}(S,T;g',f')\}=\delta_G(S,T;g,f)-\min_{e_i\in E(G),i=1,2,3}\delta_{G'}(S,T;g',f')\end{aligned}$$

从而

$$\operatorname*{mix}_{e_i\in E(G),i=1,2,3}\{\delta_{G'}(S,T;g',f')\}=\delta_G(S,T;g,f)-\varepsilon(S,T)$$

同理可证

$$\operatorname*{mix}_{e_i\in E(G),i=1,2,3}\{\delta_{G'}(T,S;g',f')\}=\delta_G(T,S;g,f)-\varepsilon(S,T)$$

故当且仅当(1)、(2)式成立时,(5)、(6)式成立。 证毕

定理 2　设 $G=(X,Y)$ 是一个二部图，f 是定义在 $V(G)$ 上的非负整数值函数且 $f(X)=f(Y)$，则 G 是一个 f-3-覆盖图的充要条件是对任意 $S\subseteq X$ 和 $T\subseteq Y$ 有

$$\delta_G(S,T;g,f)=f(S)-g(T)+d_G(T)-e_G(S,T)\geqslant\varepsilon(S,T) \tag{9}$$

其中，$\varepsilon(S,T)$ 的定义与定理 1 中 $\varepsilon(S,T)$ 的定义相同。

证明　对任意 $S\subseteq X$，$T\subseteq Y$，据定理 1，G 是 f-3-覆盖图当且仅当(9)式成立且

$$\delta_G(T,S;g,f)\geqslant\varepsilon(T,S) \tag{10}$$

现只需证明(9)式蕴涵(10)式即可。

事实上，当 $g=f$ 且 $f(X)=f(Y)$ 时

$$\delta_G(X\backslash S,Y\backslash T;f,f)=f(X\backslash S)-f(Y\backslash T)+d_G(Y\backslash T)-e_G(X\backslash S,Y\backslash T)=$$
$$(f(X)-f(S))-(f(Y)-f(T))+d_G(Y\backslash T)-(d_G(Y\backslash T)-d_{G-T}(S))=$$
$$(f(X)-f(Y))-(f(T)-f(S))+d_{G-T}(S)=f(T)-f(S)+d_G(S)-e_G(T,S)=\delta_G(T,S;f,f)$$

由 $d_{G-Y\backslash T}(X\backslash S)=d_{G-S}(T)$ 及 $\varepsilon(T,S)$ 定义可知

$$\varepsilon(X\backslash S,Y\backslash T)=\varepsilon(T,S)$$

据(9)式，有

$$\delta_G(T,S;f,f)=\delta_G(X\backslash S,Y\backslash T;f,f)\geqslant\varepsilon(X\backslash S,Y\backslash T)=\varepsilon(T,S)$$

于是(9)式隐含(10)式。　　证毕

下面给出定理 2 的另一种或许更实用的形式。

3　小结

本文得到了当 $g\leqslant f$ 时一个二部图 $G=(X,Y)$ 是(g,f)-3-覆盖图的充要条件，同时给出了当 $f(X)=f(Y)$ 时一个二部图 $G=(X,Y)$ 是(g,f)-3-覆盖图的一个充分必要条件及其简单判别准则。现提出如下问题，它的解决有助于 Alspach 猜想[7]的进一步解决。

问题　对一般的图 G，g 和 f 分别是定义在 $V(G)$ 上的两个整数值函数，使对每个 $x\in V(G)$ 有 $g(x)\leqslant f(x)$，寻找图 G 是(g,f)-3-覆盖图的条件。

参考文献：

[1] BONDY J A，MURTY U S R. Graph Theory with Applications[M]. London：MacMillan，1976.

[2] FOLKMAN J，FULKERSON D R. Flows in Infinite Graphs[J]. J Combin Theory，1970，8：30-44.

[3] LIU G Z. On (g,f)-covered Graphs[J]. Math Acta Scienta，1988，8(2)：170-176.

[4] 刘桂真. 与星正交的(g,f)-因子分解[J]. 中国科学(A)，1995，25：367-373.

[5] 黄光鑫. 关于(g,f)-2-覆盖图[J]. 贵州工业大学学报(自然科学版)，2002，31(2)：1-3.

[6] 黄光鑫. 关于(g,f)-3-覆盖图[J]. 重庆师范学院学报(自然科学版)，2002，19(2)：24-25.

[7] ALSPACH B. Problem 89[J]. Discrete Math，1988，69：106.

（责任编辑　黄　颖）