

直线电荷与带电导体圆柱电场和电力线簇研究*

胡先权, 蒋明宇

(重庆师范大学 物理学与信息技术学院, 重庆 400047)

摘要 对直线电荷与无限长带电导体圆柱系统电势函数, 及电力线函数进行了统一的描述, 采用电象法与计算技术工具软件 Mathematica 5.0 相结合, 严格地求出了电势函数和电力线函数, 作出了相应的相互正交的等势线簇图形和电力线簇图形, 并且进行了必要的讨论。

关键词 电象法; 电力线; 精确解; 等势线簇图形; 电力线簇图形

中图分类号: O441.1

文献标识码: A

文章编号: 1672-6693(2005)02-0044-03

Study of the Electrostatics and Power Lines on the System of an Infinite Line Charge and Charged Charge Conductor Cylinder

HU Xian-quan, JIANG Ming-yu

(Physics and Information Technical College, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract This paper has obtained the uniform representation of the potential function and power line function on the system of an infinite line charge and an infinite of long charged conductor cylinder. By means of combination of the method of electrical image and software package facility of Mathematica 5.0, we have obtained the exact solution of electrical potential functions and power line functions; Plotted the relative equipotential line maps and power line maps, which are orthogonal each other. Meanwhile, we have made the necessary discussion.

Key words the method of electrical images; power line; exact solution; equipotential line maps; power line maps

无限长圆柱导体电势分布具有轴对称性, 即在任何与圆柱同心的柱面上各点的电势大小均相等^[1], 并且三维静电场可以简化为二维平面场边值问题^[2~4], 利用电象法可以等效的求出源点电荷在导体球面上的感应电荷对空间电场和电势的贡献^[5~7]。对于直线电荷与无限长带电圆柱导体系统而言, 本文采用电象法先求解二维平面场空间的电势分布所满足的泊松方程, 然后利用复变函数中解析函数的实部和虚部互为共轭调和函数的关系^[8]求出电力线函数, 再利用隐函数作图法与计算技术工具软件 Mathematica 5.0 相结合^[9], 作出了相应的相互正交的等势线簇图形和电力线簇图形, 并且进行了必要的讨论。

1 直线电荷与无限长带电导体圆柱系统电势求解

设一无限长直线电荷与无限长带电圆柱导体的轴线平行, 设圆柱导体半径为 R_0 , 其轴线与直线电荷的距离为 a , 带电圆柱导体电势为 V_0 , 直线电荷的线电荷密度为 λ 。又设坐标原点建立在圆柱导体的轴线上, 且坐标 z 轴与圆柱的轴线重合, 则空间电势的分布与 z 坐标无关, 上述三维静电场问题可简化为二维平面场问题, 采用平面电象法的示意图如图 1 所示, 其中坐标 x 轴与线段 OA 及延长线重合。

考虑到镜象电荷对电势的贡献, 圆柱导体外部的空间电势满足如下泊松方程

* 收稿日期 2004-10-08

资助项目: 重庆市教育委员会科学技术研究项目(NO 20030806)

作者简介: 胡先权(1944-), 男, 四川双流人, 教授, 理论物理硕士点导师, 主要从事数学物理、原子分子理论研究。

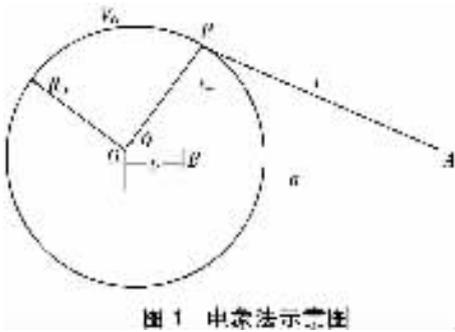


图 1 电象法示意图

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{\lambda}{\epsilon_0} \delta(x-a) \delta(y) + \frac{\lambda}{\epsilon_0} \delta(x-b) \delta(y) \quad (1)$$

$$V|_{\text{在圆柱表面上}} = V_0 \quad (2)$$

上述定解问题可采用极坐标求解, 并作函数变换

$$V' = V - V_0 \quad (3)$$

$$\text{则 } V' \text{ 满足 } V'|_{\text{在圆柱表面上}} = 0 \quad (4)$$

二维空间源电荷 A 产生的电势可表示为

$$V'_1 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r_A + C_1 \quad (5)$$

r_A 示由源点 A 指向场点的矢量模, C_1 为任意常数。

可以证明 (5) 式中的 V'_1 满足泊松方程

$$\frac{\partial^2 V'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V'}{\partial y^2} = -\frac{\lambda}{\epsilon_0} \delta(x-a) \delta(y)$$

二维空间镜象电荷 B 产生的电势可表示为

$$V'_2 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r_B + C_2 \quad (6)$$

r_B 表示由镜象电荷点 B 指向场点的矢量的模, C_2 为任意常数。

同样可以证明 (6) 式中的 V'_2 满足泊松方程

$$\frac{\partial^2 V'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V'}{\partial y^2} = \frac{\lambda}{\epsilon_0} \delta(x-b) \delta(y)$$

采用电象法以后, 圆柱导体表面的感应电荷产生的电势与场强完全可由镜象电荷 B 产生的电势与场强等价表示。

由迭加原理, V'_1 和 V'_2 在圆柱外部空间任意场点的电势可表示为

$$V' = V'_1 + V'_2 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r_A + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r_B + \ln C$$

由于边界条件 (4) 式的限制, 上式中的常数 C 只能取确定的值。

如图 1 所示并根据 (4) 式, V' 在圆柱导体表面任意点 P 须满足

$$V' = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} (\ln r_+ - \ln r_- - \ln C) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{r_+}{Cr_-} \right) = 0$$

$$\text{因而要求 } \frac{r_+}{Cr_-} = 1, \text{ 或 } \frac{r_+}{r_-} = C \quad (7)$$

这一要求可通过 $\triangle OBP \sim \triangle OPA$ 而得到满足。故有

$$\frac{r_+}{r_-} = \frac{a}{R_0}, \quad \frac{b}{R_0} = \frac{R_0}{a} \quad (8)$$

由 (7)、(8) 式可得 $C = \frac{a}{R_0}, b = \frac{R_0^2}{a}$ 。

于是, V' 在空间 r 处的电势表示式为

$$V'(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{r_A}{Cr_B} \right) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta}}{\sqrt{\left(\frac{a}{R_0}r\right)^2 + R_0^2 - 2ar \cos \theta}}$$

再根据 (3) 式, 即可求得源电荷 A 与导体表面感应电荷在圆柱外部空间产生的电势分布函数。

$$V(r) = V_0 - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta}}{\sqrt{\left(\frac{a}{R_0}r\right)^2 + R_0^2 - 2ar \cos \theta}} \quad (9)$$

由于 (9) 式既满足静电场中的泊松方程 (1), 又满足静电平衡的边界条件 (2) 根据唯一性原理^[10], 电势分布函数 $V(r)$ 具有唯一性。

2 等势线的描绘

$$\text{在 (9) 中令 } V(x, y) = C \text{ (常数)} \quad (10)$$

(10) 式称为等势线簇函数, 即本文所求的无限长直线电荷, 与无限长带电圆柱导体之间复连通区域的等势线簇函数, 或者称为等势线方程。该方程实为隐函数, 本文采用 Mathematica 5.0 绘图函数库中的 ImplicitPlot 命令绘制二维的隐函数图形^[9], 以及可视化技术^[11]。选择相关参数: $a = 15.0\text{m}, R_0 = 5.0\text{m}, V_0 = 1.0\text{V}, \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} = 1.0\text{V}$, 等势线常数 C 分别等于 0.10, 0.60, 1.1, 1.4, 2.0, 2.4, 3.0, 3.5, 4.0, 5.0, 6.0, 7.0, 8.0, 9.0, 20.0V, 由 (9)、(10) 式, 即可作出 15 条相应的等势线, 如图 2 虚线曲线簇所示, 其中 $C = V_0 = 0.10\text{V}$ 所对应的图形确为带电圆柱 (等势体) 的圆截面, 用淡灰色粗实线表示。

3 电力线函数的求解及与等势线簇正交的电力线曲线簇的描绘

根据解析函数的实部函数与虚部函数对应的曲线簇在空间处处正交的性质, 很容易由 V 作为解析函数的实部, 通过构造一个解析函数而求出其虚部, 也即得到 V 的共轭调和函数, 此即电势函数 V 相应的电力线函数。它所表示的曲线簇与 V 曲线簇在空间处处正交。

设复变函数 $w = f(z) = V + iU$

令(9)式表示的电势函数 V 作为(9)式的实部,则(9)式称为静电场问题的复位势函数^[8],其中的 U 即为相应的电力线函数。

在 $\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} = 1.0$ 的条件下,利用柯西—黎曼方程^[12]及其等价运算,可求得该静电场问题的电力线函数主值

$$U(x, y) = \arctan\left(\frac{\frac{a}{R_0}y}{\frac{a}{R_0}x - R_0}\right) - \arctan\left(\frac{y}{x-a}\right) \quad (11)$$

(11)式即为所求的电力线函数。

在(11)式中令 $U(x, y) = C_1$ (常数) (12)

(12)式即为相应的电力线簇函数。

利用等势线描绘中的相关常数,并且令电力线函数分别等于 $U = 0.15, 0.21, 0.40, 0.60, 0.85, 1.3, 1.9, 2.3, 2.5, 2.7, 2.94, 3.0$,即可作出12条相应的电力线曲线,如图2中实线簇所示。图2完整地描绘出了无限长直线电荷与无限长带电圆柱导体系统周围空间的静电场图形。

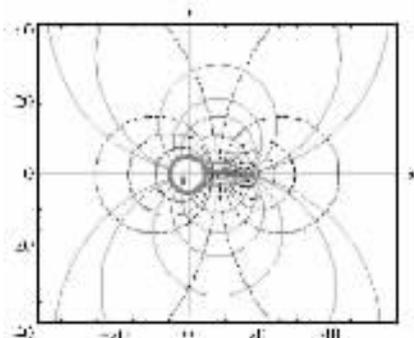


图2 相互正交的等势线簇与电力线簇

4 讨论

1) 从上述求解过程可以看出,对于无限长直线电荷与无限长带电圆柱导体系统,采用象法求解周围空间的电势分布非常简洁,基本上只须进行初等数学运算,就求出了用初等函数表示的精确解。与采用分离变量法及格林函数法求解泊松方程(1)式及(2)式相比较,计算的复杂性与计算量均大大减少。对(9)式的 V 进行梯度运算 $\nabla V = -\nabla V$,还可求出电场强度,且场强 E 的精确解也是初等函数。

2) 由(9)式不难推出等势线簇方程

$$\left[x - \frac{\alpha(C_0 - 1)}{C_0 - a^2/R_0^2}\right]^2 + y^2 = \left(\frac{\alpha(C_0 - 1)}{C_0 - a^2/R_0^2}\right)^2 + \frac{R_0^2}{C_0 - a^2/R_0^2} \quad (13)$$

其中常数 C_0 与导体圆柱对应的电势 V_0 ,以及(9)式表示的 C 有如下关系

$$C_0 = \exp\left(\frac{4\pi\epsilon_0}{\lambda}(C - V_0)\right) \quad (14)$$

可以看出(13)式表示圆心沿 x 轴平行移动的圆簇曲线(圆、直线)。

3) 由(11)式不难推出电力线簇方程

$$\left[x - \frac{a^2 + R_0^2}{2a}\right]^2 + \left[y - \frac{a^2 - R_0^2}{2aw}\right]^2 = \left(\frac{a^2 + R_0^2}{2a}\right)^2 + \left(\frac{a^2 - R_0^2}{2aw}\right)^2 \quad (15)$$

其中常数 w 与(9)式表示的 C 有如下关系

$$w = \tan C_1$$

可以看出(15)式表示圆簇曲线,圆簇的圆心的 x 坐标不变, y 坐标随 w 的不同取值而变化,说明该圆簇曲线的圆心沿 y 轴平行移动,同时说明(15)式表示的电力线簇的确与(14)式表示的等势线簇正交。

根据以上分析,作者对无限长直线电荷与无限长带电导体圆柱系统电势以及等势线和电力线有进一步的认识和了解。

参考文献:

- [1] 赵凯华. 电磁学[M]. 北京:高等教育出版社,1999. 65-67.
- [2] 胡先权, 胡文江, 马勇. 偏心圆柱面与分离圆柱面带电导体等势面的统一描述[J]. 大学物理, 2004, 23(8): 20-23.
- [3] 胡先权, 邓树申. 偏心圆柱面静电场的求解[J]. 重庆师范学院学报(自然科学版), 1999, 16(3): 6-10.
- [4] 张志国. 二平行载流圆柱上的电荷分布[J]. 大学物理, 1994, 13(9): 6-9.
- [5] J D 杰克逊. 经典电动力学[M]. 朱培豫译. 北京:人民教育出版社,1984. 60-64.
- [6] 蔡圣善, 朱耘, 徐建军. 电动力学[M]. 北京:高等教育出版社,2002. 64-91.
- [7] BLEANEY B I, BLEANEY B. Electricity and Magnetism [M]. Third Edition. Great Britain: Oxford University Press, 1975. 49-55.
- [8] 梁昆森. 数学物理方法[M]. 北京:高等教育出版社, 1998. 13-26.
- [9] 洪维恩. 数学运算大师-Mathematica 4[M]. 魏宝琛改编. 北京:人民邮电出版社, 2002. 229-249.
- [10] 郭硕鸿. 电动力学[M]. 北京:高等教育出版社, 1999. 59-65.
- [11] 阎贵卿, 阎毅. 近代数学物理理论计算与可视化技术[M]. 长沙:国防科技大学出版社, 2000. 236-251.
- [12] 吴崇试. 数学物理方法[M]. 北京:北京大学出版社, 1999. 17-21.