向量优化问题某些基础理论及其发展*

陈光亚
(中国科学院 数学与系统科学研究院 系统科学研究所, 北京 100080)

摘　要:在向量优化中存在很多基础的、重要的和有趣的问题。本文在总结了向量优化问题中某些基础理论发展趋势的基础上,提出向量优化问题,特别是变动偏好结构的向量优化问题需要新的数学概念、方法和工具去处理,有可能形成新的数学研究的方向;并进一步展现了向量优化问题理论研究的某些新的方向及许多理论问题的近代发展。

关键词:向量优化;变动偏好;控制结构;非线性标量化;变分不等式
中图分类号:O22　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2005)03-0006-04

Some Basic Theories of Vector Optimization and Its Development

CHENG Guang-yia
(Reserch Institute of Mathematics and System Science, Academia Sinica, Beijing 100080, China)

Abstract: There are many basic important and interesting questions of vector optimization. On the basis of summarizing the developing trends of basic theoies of vector optimization, this paper puts forward the question of it, particularily the question of its variation for the better, which many new mathematical conceptions, method and implements are wanted to deal with. It is possible that new mathematical directions will be shaped here. Meanwhile, the author goes further into some new orientations of the research and some modern theoretical development of vector optimization.

Key words: vector optimization; variable preference; domination structure; nonlinear scalarization; vector variational inequality

1　向量优化问题概述

经济分析、金融管理、生态保护、社会可持续发展以及国家安全等重大决策问题中存在大量向量(多目标)优化问题。在这些问题中,判断决策“好”或“坏”的标准(指标)是多个的,甚至是无穷多个或集合值的,即优化问题的目标函数是向量值或集合值函数。这就涉及到决策者的“偏好”(目标空间的偏序)。对于这类优化问题,“最优解”概念与数值优化问题中解的概念有本质的不同,它们是一种均衡或平衡的概念。这种判断好坏的思想更加符合时代的追求和企望。例如,经济增长和环境保护是两个决策目标,决策者寻求它们之间的均衡;又例如,在几十年前,国家有“多、快、好、省”的方针,这是 4 个互不相容的决策目标。决策者只能追求它们之间的均衡,如果强行要求每个目标都要最优,一般是不可能的,必然会犯错误。

在大量的决策问题中,时间总是作为一维因素引入到决策问题中。于是,由于时空的改变,决策者决策空间(相应的目标空间)的每一点所对应的“偏好”是不同的。这类决策优化问题称为带变动的偏好结构(控制结构)的向量优化问题及集值优化问题。处理这类新的优化问题需要新的概念,新的数学方法和数学工具。

正如美国著名学者 Rockafellar 所指出的:在向量优化中存在大量基本的,重要而有趣的问题(There are many basic, important and interesting problems in vector optimization)。

法国著名学者 Auslander 最近也发表了类似的看法:在向量优化中存在那么多的有趣和重要的课题(There are so many interesting and significant topics in vector optimization)。

* 收稿日期:2005-07-18
资助项目:国家自然科学基金(No. 10171105)
作者简介:陈光亚(1939-),男,重庆人,研究员,中国系统工程学会理事长,重庆师范大学客座教授,主要从事最优化理论研究。

向量优化问题的理论研究和应用已有几十年的历史。其原始的解的概念"Pareto 最优解"还可以追溯到一百多年前的经济学研究。为什么这些国际第一流的学者仍然对向量优化问题显示出巨大的研究兴趣? 概括起来,由于向量优化问题呈现了下面的鲜明特点:1) 强烈而丰富的实际背景为向量优化问题的研究提供了许多新的问题和模型;2)向量优化问题,特别是变动偏好结构的向量优化问题需要新的数学概念、方法和工具去处理,有可能形成新的数学研究的方向;3)向量优化问题与数理经济、网络经济、决策和对策理论以及非线性分析中的许多问题有紧密关系,这就极大地拓广了向量优化理论研究和应用的范围。

本文主要是在自己的研究工作基础上来展现向量优化问题理论研究的某些新的方向及许多理论问题的近代发展。

2 变动偏好及控制结构

传统的向量优化问题包含3个要素,即决策集合,向量值的目标函数以及目标空间上固定的偏序。大家知道在线性空间上偏序与空间上的凸锥是一一对应关系。因此,可以用空间中的一个凸锥来界定空间上的一个偏序。这种典型的偏序实质上是数学处理的规范化,可以用较成熟的序空间理论来处理它。在许多实际问题中,情况更为复杂,决策者的偏好不一定是用凸锥描述的。例如,用凸集界定空间点之间的二元关系一般不是偏序关系。又如,变动偏序结构或变动控制结构一般不能用一个固定的凸锥来界定。

设 X、Y 是两个拓扑向量空间,X 称为决策空间,Y 称为目标空间。设 $S\subset X$ 是一个非空集合,称为决策集合。设 D 是 Y 中的子集系,$D=\{D(x):\ x\in Y\}$,其中对每个 $x\in S$,$D(x)$ 是凸锥或凸集,D 称为 Y 上的(变动)控制结构,(Y,D) 称为带控制结构的目标空间,这与传统数学中的偏序空间是不同的。带控制结构的向量优化问题由下面的3元素组成:决策集合 S,向量值目标函数 $f:\ X\to Y$,控制结构 D。可以表示成类似数值优化的形式

$$(\mathrm{VO})\qquad D-\min_{x\in S} f(x)$$

1974年,P. L. Yu 给出了(VO)的一类解的概念,称为非控解。$x^*\in S$ 称为(VO)的非控解,如果不存在 $x\in S$ 使得

$$f(x)-f(x^*)\in D(x)\setminus\{0\}$$

Yu 定义的非控解的研究并未得到发展。从已有的资料来看,几十年来国际上对 Yu 的非控解的研究不会超过10篇正式发表的论文。

究其原因,可以认为 Yu 的非控解概念要求过于严格。要判断集合 S 中一个点是否非控解,需要对 S 中其它所有的点所对应的偏好做比较,由于 S 中的点可能是无穷多个,在数学的处理上有很大的困难。特别是在刻划非控解的特征及标量化时难度很大。

可以换一种思维方式来处理问题。判定某点是否"最优",人们只以此点对应的偏好为基准,而不必涉及其它点所对应的偏好。在这种思考下,通过向量变分不等式提出了似非控解概念。$x^*\in S$ 称为(VO)的似非控解,如果不存在 $x\in S$ 使得

$$f(x)-f(x^*)\in D(x^*)\setminus\{0\}$$

$x^*\in S$ 称为(VO)的弱似非控解,如果不存在 $x\in S$ 使得

$$f(x)-f(x^*)\in \mathrm{int}\ D(x^*)$$

其中 $\mathrm{int}\ D(x)$ 是集合 $D(x)$ 的拓扑内部。

国际研究的实际状况表明,似非控解、弱似非控解的研究得到发展。

3 非线性标量化方法

标量化方法是向量优化问题理论和算法研究的一个重要方面。其重要性可类比于经济分析中的价值函数(Value Function),概率统计学中的分布函数,模糊系统中的隶属函数。诺贝尔经济学奖获得者 Debreu 在其名著《Theory of Value》中花了相当篇幅讨论了价值函数问题。设 $\prec$ 是集合 K 上的一个偏好,一个数值函数 $v:\ K\to\mathbf{R}$ 称为价值函数,如果

$$\forall y_1,y_2\in K, y_1\prec y_2\Leftrightarrow v(y_1)<v(y_2)$$

Debreu 的研究显示,如果 K 是连通的,偏好"$\prec$"是完全序,拟序且是连续和凸的,则存在连续的、严格单调的价值函数。

在向量优化问题中,一般考虑的偏好是偏序而不是完全序,甚至是控制结构。因此 Debreu 的价值函数理论不足以处理向量优化问题。

1983年,德国学者 Gerstewitz 构造了线性空间中用凸锥定义的偏序所对应的非线性标量函数,此函数是受到拓扑学中的 Minkowski 泛函的启发下得到的。

设对所有的 $x\in X$,$D(x)=C$ 是 Y 中的凸锥,且 $e\in\mathrm{int}C$,$\mathrm{int}C$ 是 C 的拓扑内部。Gerstewitz 非线性标量函数 $\xi_e:\ Y\to\mathbf{R}$ 定义为

$$\xi_e(y)=\min\{t\in\mathbf{R}:\ y\in te-C\},y\in Y$$

ξ_e 具有很好的性质。在一定的条件,ξ_e 是连续的,正齐次的,次可加的。遗憾的是 Gerstewitz 函数最初的研究是用德文发表的,一段时间未得到国际优化界的响应。

1989 年 Luc 在其专著《Theory of Vector Optimization》中对非线性标量函数进行了更深入系统的研究,并在优化界引起了广泛重视。1990 年 Gerth 和 Weidner 严格证明了 ξ_e 的存在性,且导出了开创性的非凸分离定理,并显示了 ξ_e 是处理许多非凸优化问题以及其它某些非凸问题的有力工具。

我们在国际上第一个研究了变动控制结构下的非线性标量函数及其在向量优化上的应用。

现在考虑 Y 上的控制结构 $D=\{D(y)\subset Y:\ y\in Y\}$。显然这里的控制结构与前面依赖于决策空间的控制结构没有本质的不同。设 $\bar{D}=\bigcap_{y\in Y}D(y)$ 且 $e\in \mathrm{int}\bar{D}$,令

$$\xi(y,z)=\min\{t\in\mathbf{R}:\ z\in te-D(y)\},y\in Y$$

$\xi(y,z)$ 是 Gersterwitz 函数的推广,可以证明 $\xi(y,z)$ 在 $Y\times Y$ 上是连续的,正齐次的,凸的,且对第二变量是严格单调的函数。下面的结果显示 $\xi(y,z)$ 是处理带变动控制结构的向量优化问题的有力工具。

命题 1　对每一个 $r\in\mathbf{R}$,y、$z\in Y$,下面的提法是正确的

1) $\xi(y,z)<r\Leftrightarrow z\in re-\mathrm{int}\ D(y)$;

2) $\xi(y,z)\leqslant r\Leftrightarrow z\in re-D(y)$;

3) $\xi(y,z)\geqslant r\Leftrightarrow z\notin \in re-\mathrm{int}\ D(y)$;

4) $\xi(y,z)>r\Leftrightarrow z\notin \in re-D(y)$;

5) $\xi(y,z)=r\Leftrightarrow z\in re-\partial D(y)$。

其中 $\partial D(y)$ 是集合 $D(y)$ 的边界集。

下面的问题是有趣的,值得去思考和研究。

1) 当 $D(y)$ 是凸集时,$\xi(y,z)$ 是否仍有某些好的性质?

2) 命题 1 显示 $\xi(y,z)$ 是处理向量优化问题弱拟非控解的工具。如何利用 $\xi(y,z)$ 或构造新的标量函数去处理拟非控解?

3) 怎样通过 $\xi(y,z)$ 导出变动控制结构下的非凸分离定理?

4　向量变分不等式问题

数值优化问题的理论研究中,Kuhn-Tucker 条件是最重要的结果之一。它是数值优化的理论研究和算法设计的基础。Kuhn-Tucker 条件实质上是一个经典的变分不等式。对于实际中的优化问题,人们可以通过两个方式构造数学模型。当人们知道物体运动的轨迹,或者说知道目标函数的表达式,优化问题可以描述成在某个决策集合上求目标函数的极值问题;但当人们并不知道目标函数的表示式,而只知道目标函数值的梯度变化,或者说只知道物体运动的速度变化,则优化问题只能描述成变分不等式模型。在这个意义下,可以说极值问题和变分不等式问题是等价的问题。但是,变分不等式不仅仅与极值问题有关。在 20 世纪 60 年代初,意大利著名数学家 Stampacchia 和法国数学家 Lions 已经从研究偏微分方程中导出了无穷维的变分不等式模型。另外,交通网络平衡问题,网络经济中的某些问题和变分不等式有密切的关系。

1980 年,意大利著名学者 F · Giannessi 在有限维空间中,在固定偏序结构下提出了向量变分不等式概念并显示了它与向量优化问题有紧密关系。1990 年,我们提出了无穷维空间中的向量互补问题及向量变分不等式模型,并证明了它们和极小问题、向量优化问题等模型的等价性。对于变动的控制结构,1992 年又提出了下面的向量变分不等式模型。

设 X、Y 是两个拓扑向量空间,$L(X,Y)$ 表示 X 到 Y 上所有的连续线性映射的集合,设 $S\subset X$ 是一个非空集合。集合系 $D=\{D(x)\subset Y:\ x\in X\}$ 是 Y 上的一个控制结构。基本的带变动控制结构的向量变分不等式是求 $x^*\in S$ 使得

$$(\mathrm{VVI})_T\quad \langle T(x^*),x-x^*\rangle\notin-\mathrm{int}\ D(x^*),\ \forall x\in S$$

其中 $T:\ X\to L(X,Y)$ 是一个向量值映射,如果 $L\in L(X,Y)$,$\langle L,x\rangle$ 表示线性映射 L 在 x 的值,因此 $\langle L,x\rangle\in Y$。

当 $Y=\mathbf{R}$ 是一维欧氏空间,$D(x)=\mathbf{R}_+,\ \forall x\in S$,则向量变分不等式 $(\mathrm{VVI})_T$ 退化成通常的变分不等式问题。

现设 $f:\ X\to Y$ 是一个向量值函数。带变动控制结构 D 的向量优化问题可表示成下面形式

$$(\mathrm{VO})\quad D-\min_{x\in S}f(x)$$

命题 2　设 $f:\ X\to Y$ 在 S 上是 Gâteaux 可微的,在 x 点的 Gâteaux 导数记为 $T(x)=Df(x)$,$x\in S$,设 $D=\{D(x)\subset Y:\ x\in X\}$ 是 Y 上的(变动)控制结构,对每个 $x\in X$,$D(x)$ 是闭凸锥且拓扑内部 $\mathrm{int}\ D(x)$ 非空。如果 $x^*\in S$ 是向量优化问题(VO)的弱似非控解,则 x^* 是下面的向量变分不等式的解

$$(\mathrm{VVI})_{Df}\quad x^*\in S,\langle Df(x^*),x-x^*\rangle\notin-\mathrm{int}\ D(x^*),\ \forall x\in S$$

相反地,如果附加对每个 $\bar{x}\in S$,f 是 $D(\bar{x})$ 一凸

的向量值映射,且 $x^* \in S$ 是$(\mathrm{VVI})_{Df}$的一个解,则 x^* 是(VO)的弱似非控解。

现在对向量变分不等式的研究方兴未艾,其中多数的研究是基于$(\mathrm{VVI})_T$ 这类模型以及它的各种推广。一类很重要的推广是称为向量平衡问题。设 $F: X \times X \to Y$ 是二元向量值函数。向量平衡问题是求 $x^* \in S$,使得

$$(\mathrm{VEQ}) \quad F(x^*, x) \notin -\mathrm{int}\, D(x^*), x \in S$$

当 $Y = \mathbf{R}$ 时,F 变成了二元数值函数 $f: X \times X \to \mathbf{R}$。向量平衡问题$(\mathrm{VEQ})_F$ 退化成 Blum 和 Oettli 提出的平衡问题:求 $x^* \in S$,使得

$$(\mathrm{EQ})_f \quad f(x^*, x) \geqslant 0, \forall x \in S$$

平衡问题$(\mathrm{EQ})_f$ 是等价于不动点问题、变分不等式问题、数值优化问题、鞍点问题、互补问题以及对策问题。命题2显示了向量优化问题与向量变分不等式的等价性。如果记 $F(x,y) = \langle T(x), y - x\rangle$,则本质上命题2也显示了向量平衡问题与向量优化问题的等价性。那么,对于其它形式,诸如向量互补问题、向量对策问题等是否存在某种形式的等价关系?

向量变分不等式还有其它的应用,例如:1)二水平的多目标规划问题;2)向量平衡规划问题;3)向量网络平衡问题;4)网络经济中的一些问题;5)集合值优化问题。

5 向量优化问题的近似分析

数学研究中,凡是涉及集合非紧条件下的问题一般都是困难的。一个连续的数值函数在非紧集合上一般不存在极值,需要近似分析,求近似解。在数值优化问题的近似分析研究中,最重要的结果应该是 Ekeland 变分原理。它的重要性主要表现在以下方面。

1) 可以刻划数值优化问题的近似解;

2) 它与 Caristi-Kirk 不动点定理、Flower Petal 定理、Drop 定理以及 Mountain Pass 定理的等价性展现了在非线性分析中研究和应用的新的平台。

20世纪80年代和90年代初,国际上存在3种有不同条件、不同形式的向量变分原理,它们都是 Ekeland 变分原理的推广。我们给出了一个统一的向量变分原理,已知的3种向量变分原理是其特例。我们还在国际上第一次提出了集合值函数的变分原理。进而,给出了 Caristi-Kirk 不动点定理、Flower Petal 定理以及 Drop 定理的向量和集值形式,并证明了它们和我们提出向量和集合变分原理是等价的。这些工作有可能在向量优化和集值优化问题以及非线性分析领域中展现出新的研究方向。要特别指出的是 Mountain Pass 定理的向量和集值形式以及它们与向量及集值变分原理的等价性仍然是一个尚未解决的有趣的问题。

参考文献:

[1] BLUM E, OETTLI W. From Optimization and Variational Inegualities to Equilibrium Problem[J]. The Mathematics Student, 1994, 63: 123-145.

[2] CHEN G Y, YANG X Q. The Vector Complementarity Problem and Its Equivalence with the Weak Minimal Element in Ordered Spaces[J]. J Math Anal Appl, 1990, 153: 136-156.

[3] CHEN G Y. Existence of Solutions for a Varional Inequality: An Extension of Hartman-Stampacchia Theorem[J]. J Optim Theory Appl, 1992, 74: 445-456.

[4] CHEN G Y, HUANG X X. A Unified Approach to the Exsting Types of Variational Principle for Vector Valued Functions[J]. Mathematical Methods of Operations Research, 1998, 48: 349-357.

[5] CHEN G Y, HUANG X X, YANG X Q. Vector Optimization: Set-valued and Variational Analysis, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems [M]. London: Springer, 2005.

[6] EKELAND I. On Variational Principle[J]. J Math Anal Appl, 1974, 47: 324-353.

[7] GERTH C, WEIDNER P. Nonconvex Separation Theorems and Applications in Vector Optimizition[J]. J Optim Theory Appl, 1990, 67: 297-320.

[8] GIANNESSI F. Theorems of Alternative, Quadratic Programs and Complementary Problems[A]. COTTLE R W, GIANNESSI F, LIONS J L. Veriational Inequalities and Complementary Problems[C]. NewYork: Wiley, 1980.

[9] YANG X Q. Vector Complementary and Minimal Element Problems[J]. J Optim Theory Appl, 1993, 77: 483-495.

(责任编辑 黄 颖)