关于一类不可微规划问题的对偶性*

杨新民[1], KOK LAY TEO[2]
(1. 重庆师范大学 校长办公室, 重庆 400047;
2. 澳大利亚 Curtin 理工大学 数学与统计系, WA 6102, 澳大利亚)

摘 要:作者构造了一类不可微规划问题的一阶和二阶对偶模型,其目标函数含有紧凸集的支撑函数项。利用 Fritz John 最优性必要条件,在适当条件下建立了这两类一阶和二阶对偶模型的弱和逆对偶性定理。

关键词:一阶和二阶对偶模型;对偶性定理;不可微规划问题;广义凸性
中图分类号:O221.6 **文献标识码**:A **文章编号**:1672-6693(2005)03-0018-07

On Duality in A Class of Nondifferentiable Programming Problem

YANG Xin-min[1], *KOK LAY TEO*[2]
(1. President Office, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China;
2. Departement of Mathematics and Statistics, Curtin University of Technology, WA6102, Australia)

Abstract: In this paper first order and second order dual models in a class of nondifferentiable programs in which every component of the objective function contains a term involving the support function of a compact convex set are formulated. We use the Fritz John necessary optimality conditions to establish weak and converse duality theorems for the two types of dual models under suitable conditions.

Key words: first and second order dual models; duality theorems; nondifferentiable programming problems; generalized convexity

在文献[1]里,Mond 考虑了下面一类不可微数学规划问题

$$(\mathrm{MP})\quad \text{minimize}\quad f(x)+(x^{\mathrm{T}}Bx)^{\frac{1}{2}}$$
$$\text{s.t.}\quad g(x)\geqslant 0$$

其中 $x\in\mathbf{R}^n$,f 和 g 是分别从 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{R}^m$ 的二次可微函数,B 是一个 $n\times n$ 半正定(对称)矩阵。

许多作者对不可微规划问题(MP)给出了最优性条件和对偶定理以及各种推广。近年,Mangasarian 在文献[1]里,第一个提出了非线性二阶对偶模型,Mond[3] 在"二阶凸性"条件下,证明了二阶对偶定理。后来,Mond 和 Weir[4] 给出了一类新的二阶对偶模型。最近,Zhang 和 Mond[5] 对不可微规划问题(MP)提出了一般的一阶和二阶对偶模型并在较弱的条件下建立了弱、强和逆对偶定理。

Mond 和 Schechter 在文献[6]里研究了目标函数包含支撑函数的不可微规划问题的对称对偶性。在这篇文章里,基于 Mond 和 Schechter[6] 的思想以及 Zhang 和 Mond[5] 的工作,考虑下面更一般的不可微规划问题。

$$(\mathrm{P})\quad \mathrm{Min}\quad f(x)+s(x|C)$$
$$\text{s.t.}\quad g(x)\geqslant 0$$

其中,f 和 g 是分别从 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{R}^m$ 的二次可微函数,C 是 $\mathbf{R}^n$ 上的一个紧凸集。$s(x|C)$ 表示 C 的支撑函数在 x 的值,其中支撑函数定义为 $s(x|C)=\{x^{\mathrm{T}}w|w\in C\}$。

* 收稿日期:2005-07-06
资助项目:国家自然科学基金(No. 10471159);教育部"新世纪优秀人才支持计划";教育部留学回国人员科研启动基金;重庆市自然科学基金。
作者简介:杨新民(1960-),男,四川泸州人,教授,博士,副校长,主要从事数学规划研究。

本文构造了这类不可微规划问题的一阶和二阶对偶模型并在弱凸性条件下建立了它们的弱和逆对偶性定理。

1 一阶对偶性

在这部分,将构造(P)的一个一阶对偶模型(GD_1),并在广义(F,ρ)-凸性假设条件下,建立弱和逆对偶性结果。

$$
\begin{aligned}
(GD_1)\quad & \mathrm{Max}\quad f(u)-\textstyle\sum_{i\in I_0}y_ig_i(u)+u^{\mathrm{T}}w \\
\mathrm{s.t.}\quad & \nabla f(u)+w+\nabla(y^{\mathrm{T}}g(u))=0 \\
& \sum_{i\in I_\alpha}y_ig_i(u)\leqslant 0,\alpha=1、2、\cdots、r \\
& w\in C \\
& y\geqslant 0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

其中 $u,w\in\mathbf{R}^n,y\in\mathbf{R}^m,I_\alpha\subset M=\{1,2,\cdots,m\},\alpha=0、1、2、\cdots、r$,满足 $\bigcup_{\alpha=0}^{r}I_\alpha=M$,且若 $\alpha\neq\beta$,则 $I_\alpha\cap I_\beta=\phi$。

下面的广义(F,ρ)-凸性由杨在文献[7]中定义。

定义1 一个泛函 $F:\ D\times D\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 称为是次线性的,如果对任意 $x,u\in D$,有

$$F(x,u;a_1+a_2)\leqslant F(x,u;a_1)+F(x,u;a_2),\ \forall a_1,a_2\in\mathbf{R}^n$$

$$F(x,u;\alpha a)=\alpha F(x,u;a),\ \forall\alpha\in\mathbf{R},\alpha\geqslant 0,a\in\mathbf{R}^n$$

设 F 是一个次线性泛函,函数 $\phi:\ D\to\mathbf{R}$ 在 $u\in D$ 处是可微的,$\rho\in\mathbf{R}$,且 $d(\cdot,\cdot):\ D\times D\to\mathbf{R}$。

定义2 函数 ϕ 称为在 u 是(F,ρ)-拟凸的,如果

$$\phi(x)\leqslant\phi(u)\Rightarrow F(x,u;\nabla\phi(u))\leqslant-\rho d^2(x,u),\ \forall x\in D$$

定义3 函数 ϕ 称为在 u 是(F,ρ)-伪凸的,如果

$$F(x,u;\nabla\phi(u))\geqslant-\rho d^2(x,u)\Rightarrow\phi(x)\geqslant\phi(u),\ \forall x\in D$$

定理1(弱对偶性) 设 x 是(P)的可行解且(u,y,w)是(GD_1)的可行解。如果对所有可行解(x,u,y,w),$f(\cdot)-\sum_{i\in I_0}y_ig_i(\cdot)+(\cdot)^{\mathrm{T}}w$ 是(F,ρ_0)-伪凸,$-\sum_{i\in I_\alpha}y_ig_i(\cdot),\alpha=1、2、\cdots、r$,是($F,\rho_\alpha$)-拟凸,且 $\sum_{\alpha=1}^{r}\rho_\alpha+\rho_0\geqslant 0$,则

$$f(x)+s(x|C)\geqslant f(u)-\sum_{i\in I_0}y_ig_i(u)+u^{\mathrm{T}}w$$

证明 由于 x 是(P)的可行解,且(u,y,w)是(GD_1)的可行解,有

$$\sum_{i\in I_\alpha}y_ig_i(x)\geqslant 0\geqslant\sum_{i\in I_\alpha}y_ig_i(u),\ \alpha=1、2、\cdots、r$$

由于 $\forall\alpha=1、2、\cdots、r$,$-\sum_{i\in I_0}y_ig_i(\cdot)$ 是(F,ρ_α)-拟凸的,得

$$F(x,u;-\nabla\sum_{i\in I_\alpha}y_ig_i(u))\leqslant-\rho_\alpha d^2(x,u),\ \alpha=1、2、\cdots、r\tag{2}$$

另一方面,从(1)式和 F 的次线性,有

$$F[x,u;\nabla f(u)-\sum_{i\in I_0}\nabla y_ig_i(u)+w]+\sum_{\alpha=1}^{r}F[x,u;-\nabla\sum_{i\in I_\alpha}y_ig_i(u)]\geqslant F[x,u;\nabla f(u)+w-\nabla y^{\mathrm{T}}g(u)]=0\tag{3}$$

结合(2)、(3)式以及 $\sum_{\alpha=1}^{r}\rho_\alpha+\rho_0\geqslant 0$,得

$$F[x,u;\nabla f(u)-\sum_{i\in I_0}\nabla y_ig_i(u)+w]\geqslant\sum_{\alpha=1}^{r}\rho_\alpha d^2(x,u)\geqslant-\rho_0d^2(x,u)$$

从 $f(\cdot)-\sum_{i\in I_0}y_ig_i(\cdot)+(\cdot)^{\mathrm{T}}w$ 的(F,ρ_0)-伪凸性,意味着

$$f(x)-\sum_{i\in I_0}y_ig_i(x)+x^{\mathrm{T}}w\geqslant f(u)-\sum_{i\in I_0}y_ig_i(u)+u^{\mathrm{T}}w$$

由 $y\geqslant 0,g(x)\geqslant 0$ 和 $x^{\mathrm{T}}w\leqslant s(x|C)$,得

$$f(x)+s(x|C)\geqslant f(u)-\sum_{i\in I_0}y_ig_i(u)+u^{\mathrm{T}}w$$

证毕

定理2(逆对偶性) 设(x^*,y^*,w^*)是(GD_1)的最优解,在(x^*,y^*,w^*)点

1)矩阵 $\nabla^2f(x^*)-\nabla^2y^{*\mathrm{T}}g(x^*)$ 是正定或负定;

2）向量$\{\nabla\sum_{i\in I_\alpha}y_i^*g_i(x^*),\alpha=1、2、\cdots、r\}$是线性无关。

如果对所有可行解(x,u,y,w)，$f(\cdot)-\sum_{i\in I_0}y_ig_i(\cdot)+(\cdot)^{\mathrm{T}}w$是$(F,\rho)$-伪凸，且对所有$\alpha=1、2、\cdots、r$，$-\sum_{i\in I_\alpha}y_ig_i(\cdot)$是$(F,\rho)$-拟凸，则$x^*$是(P)的最优解。

证明　由于(x^*,y^*,w^*)是(GD_1)的最优解，从广义 Fritz John 必要条件，存在$\tau_0\in\mathbf{R}$，$v\in\mathbf{R}^n$，$\tau_\alpha\in\mathbf{R}$，$\alpha=1、2、\cdots、r$，$\beta\in\mathbf{R}$，$\gamma\in\mathbf{R}^m$，使得

$$\tau_0\{-\nabla f(x^*)+\sum_{i\in I_0}\nabla y_i^*g_i(x^*)\}+v^{\mathrm{T}}\{\nabla^2f(x^*)-\nabla^2y^{*\mathrm{T}}g(x^*)\}+\sum_{\alpha=1}^{r}\tau_\alpha\{\nabla\sum_{i\in I_\alpha}y_i^*g_i(x^*)\}=0 \tag{4}$$

$$\tau_0g_i(x^*)-v^{\mathrm{T}}g_i(x^*)-\gamma_i=0,\ i\in I_0 \tag{5}$$

$$\tau_\alpha g_i(x^*)-v^{\mathrm{T}}\nabla g_i(x^*)-\gamma_i=0,\ i\in I_\alpha,\ \alpha=1、2、\cdots、r \tag{6}$$

$$\tau_0x^*-v=\beta\in N_C(w^*) \tag{7}$$

$$\tau_\alpha\sum_{i\in I_\alpha}y_i^*g_i(x^*)=0,\ \alpha=1、2、\cdots、r \tag{8}$$

$$\gamma^{\mathrm{T}}y^*=0 \tag{9}$$

$$\begin{gathered}(\tau_0,\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_r,\beta,\gamma)\geqslant0\\(\tau_0,\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_r,\beta,\gamma,v)\neq0\end{gathered} \tag{10}$$

对$\alpha=1、2、\cdots、r$，用y_i^*，$i\in I_\alpha$乘(6)式，利用(8)式，有

$$\tau_\alpha y_i^*g_i(x^*)-v^{\mathrm{T}}\nabla y_i^*g_i(x^*)=0,i\in I_\alpha,\ \alpha=1、2、\cdots、r$$

因此

$$\tau_\alpha\sum_{i\in I_\alpha}y_i^*g_i(x^*)-v^{\mathrm{T}}\sum_{i\in I_\alpha}\nabla y_i^*g_i(x^*)=0,\ \alpha=1、2、\cdots、r$$

从(8)式，有

$$v^{\mathrm{T}}\sum_{i\in I_\alpha}\nabla y_i^*g_i(x^*)=0,\alpha=1、2、\cdots、r \tag{11}$$

在(4)式中用(1)式，得

$$\sum_{\alpha=1}^{r}(\tau_\alpha-\tau_0)\nabla\sum_{i\in I_\alpha}y_i^*g_i(x^*)+v^{\mathrm{T}}[\nabla^2f(x^*)-\nabla^2y^{\mathrm{T}}g(x^*)]=0 \tag{12}$$

用v乘(12)式并利用(11)式，有

$$v^{\mathrm{T}}[\nabla^2f(x^*)-\nabla^2y^{*\mathrm{T}}g(x^*)]v=0$$

由假设$\nabla^2f(x^*)-\nabla^2y^{*\mathrm{T}}g(x^*)$在$(x^*,y^*,w^*)$点是正定或负定，得$v=0$。于是，(12)式意味着

$$\sum_{\alpha=1}^{r}(\tau_\alpha-\tau_0)\nabla\sum_{i\in I_\alpha}y_i^*g_i(x^*)=0 \tag{13}$$

由于向量$\{\nabla\sum_{i\in I_\alpha}y_i^*g_i(x^*),\alpha=1、2、\cdots、r\}$是线性无关，(13)式意味着

$$\tau_\alpha=\tau_0,\ \alpha=1、2、\cdots、r \tag{14}$$

如果$\tau_0=0$，则从(14)式，有$\tau_\alpha=0,\alpha=1、2、\cdots、r$，从(5)、(6)式和$v=0$，有$\gamma=0$且从(7)式有$\beta=0$，即

$$(\tau_0,\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_r,\beta,\gamma,v)=0$$

上式与(10)式矛盾。因此，$\tau_0>0$。于是$\tau_\alpha>0,\alpha=1、2、\cdots、r$。从(5)、(6)式得

$$\begin{gathered}\tau_0g_i(x^*)-\gamma_i=0,\ i\in I_0\\\tau_\alpha g_i(x^*)-\gamma_i=0,\ i\in I_\alpha,\ \alpha=1、2、\cdots、r\end{gathered} \tag{15}$$

从$\gamma\geqslant0$和$\tau_\alpha>0,\alpha=0、1、2、\cdots、r$，有$g(x^*)\geqslant0$。因此，$x^*$是(P)的可行解且(P)和$(\mathrm{GD}_1)$对应目标值相等。

对$i\in I_0$，用y_i^*乘(15)式并利用(9)式，有

$$\tau_0y_i^*g_i(x^*)=0,\ i\in I_0$$

由于$\tau_0>0$，得

$$y_i^*g_i(x^*)=0,i\in I_0 \tag{16}$$

也由于$v=0,\tau_0>0$和(7)式，有$x^*\in N_C(w^*)$，因此

$$s(x^*\mid C)=x^{*\mathrm{T}}w^* \tag{17}$$

于是,从(16)、(17)式,有

$$f(x^*)+s(x^*|C)=f(x^*)-\sum_{i\in I_0}y_i^*g_i(x^*)+u^{*\mathrm{T}}w^*$$

如果对所有可行解(x,u,y,w),$f(\cdot)-\sum_{i\in I_0}y_ig_i(\cdot)+(\cdot)^{\mathrm{T}}w$是$(F,\rho)$-伪凸,且对所有$\alpha=1、2、\cdots、r$,$-\sum_{i\in I_\alpha}y_ig_i(\cdot)$是$(F,\rho)$-拟凸,则从定理1,$x^*$是(P)的最优解。 证毕

2 二阶对偶性

在这个部分,将提出不可微规划问题(P)的一个一般二阶对偶模型,这个模型是 Zhang 和 Mond 在文献[5]中引入的二阶对偶模型的一个扩充。

$$\begin{aligned}(\mathrm{GD}_2)\quad \mathrm{Max}\quad & f(u)-\sum_{i\in I_0}y_ig_i(u)+u^{\mathrm{T}}w-\frac{1}{2}p^{\mathrm{T}}[\nabla^2f(u)-\nabla^2\sum_{i\in I_0}y_ig_i(u)]p\\ \mathrm{s.t.}\quad & \nabla f(u)+w+\nabla(y^{\mathrm{T}}g(u))+\nabla^2f(u)p-\nabla^2y^{\mathrm{T}}g(u)p=0\\ & \sum_{i\in I_\alpha}y_ig_i(u)-\frac{1}{2}p^{\mathrm{T}}\nabla^2\sum_{i\in I_\alpha}y_ig_i(u)p\leqslant 0,\ \alpha=1、2、\cdots、r\\ & w\in C,\qquad y\geqslant 0,\end{aligned}\tag{18}$$

其中$u,w,p\in\mathbf{R}^n$,$y\in\mathbf{R}^m$,$I_\alpha\subset M=\{1,2,\cdots,m\}$,$\alpha=0、1、2、\cdots、r$,满足$\bigcup_{\alpha=0}^{r}I_\alpha=M$,且若$\alpha\neq\beta$,则$I_\alpha\cap I_\beta=\phi$。

在给出弱和逆对偶性定理前,先引入下面二阶(F,ρ)-凸性定义。

设F是一个次线性泛函,函数ϕ: $D\to\mathbf{R}$在$u\in D$处是可微,$\rho\in\mathbf{R}$,且$d(\cdot,\cdot)$: $D\times D\to\mathbf{R}$。

定义4 函数ϕ称为在u处是二阶(F,ρ)-拟凸,如果对任意$p\in\mathbf{R}^n$,

$$\phi(x)\leqslant\phi(u)-\frac{1}{2}p^{\mathrm{T}}\nabla^2\phi(u)p\Rightarrow F(x,u;\nabla\phi(u)+\nabla^2\phi(u))\leqslant-\rho d^2(x,u),\ \forall x\in D$$

定义5 函数ϕ称为在u处是二阶(F,ρ)-伪凸的,如果对任意$p\in\mathbf{R}^n$

$$F(x,u;\nabla\phi(u)+\nabla^2\phi(u))\geqslant-\rho d^2(x,u)\Rightarrow\phi(x)\geqslant\phi(u)-\frac{1}{2}p^{\mathrm{T}}\nabla^2\phi(u)p,\ \forall x\in D$$

定理3(弱对偶性) 设x是(P)的可行解且(u,y,w,ρ)是(GD_2)的可行解。如果,对任意可行解(x,u,y,w,p),$f(\cdot)-\sum_{i\in I_0}y_ig_i(\cdot)+(\cdot)^{\mathrm{T}}w$是二阶$(F,\rho_0)$-伪凸且$-\sum_{i\in I_\alpha}y_ig_i(\cdot)$,$\alpha=1、2、\cdots、r$,是二阶$(F,\rho_\alpha)$-拟凸,又$\sum_{\alpha=1}^{r}\rho_\alpha+\rho_0\geqslant 0$,则$x^*$是(P)的最优解。

证明 由于x是(P)的可行解且(u,y,w)是(GD_1)的可行解,有

$$\sum_{i\in I_\alpha}y_ig_i(x)\geqslant 0\geqslant\sum_{i\in I_\alpha}y_ig_i(u)-\frac{1}{2}p^{\mathrm{T}}\nabla^2\sum_{i\in I_\alpha}y_ig_i(u)p,\ \alpha=1、2、\cdots、r$$

由于$\forall\alpha=1、2、\cdots、r$,$-\sum_{i\in I_\alpha}y_ig_i(\cdot)$是$(F,\rho_\alpha)$-拟凸的,得

$$F(x,u;-\nabla\sum_{i\in I_\alpha}y_ig_i(u)-\nabla^2\sum_{i\in I_\alpha}y_ig_i(u))\leqslant-\rho_\alpha d^2(x,u),\ \alpha=1、2、\cdots、r\tag{19}$$

另一方面,从(18)式和F的次线性,有

$$\begin{aligned}&F[x,u;\nabla f(u)+\nabla^2f(u)p+w-\sum_{i\in I_0}\nabla y_ig_i(u)-\sum_{i\in I_\alpha}\nabla^2y_ig_i(u)p]+\\ &\sum_{\alpha=1}^{r}F[x,u;-\nabla\sum_{i\in I_\alpha}y_ig_i(u)-\nabla^2\sum_{i\in I_\alpha}y_ig_i(u)p]\geqslant\\ &F[x,u;\nabla f(u)+\nabla^2f(u)p+w-\nabla y^{\mathrm{T}}g(u)-\nabla^2y^{\mathrm{T}}g(u)p]=0\end{aligned}\tag{20}$$

结合(19)、(20)式以及$\sum_{\alpha=1}^{r}\rho_\alpha+\rho_0\geqslant 0$,有

$$F[x,u;\nabla f(u)+\nabla^2f(u)p+w-\sum_{i\in I_0}\nabla y_ig_i(u)-\sum_{i\in I_0}\nabla^2y_ig_i(u)p]\geqslant\sum_{\alpha=1}^{r}\rho_\alpha d^2(x,u)\geqslant-\rho_0d^2(x,u)$$

$f(\cdot)-\sum_{i\in I_0}y_ig_i(\cdot)+(\cdot)^{\mathrm{T}}w$的二阶$(F,\rho_0)$-伪凸性意味着

$$f(x)-\sum_{i\in I_0}y_ig_i(x)+x^{\mathrm{T}}w\geqslant f(u)-\sum_{i\in I_0}y_ig_i(u)+u^{\mathrm{T}}w-\frac{1}{2}p^{\mathrm{T}}\nabla^2[f(u)-\sum_{i\in I_0}y_ig_i(u)+u^{\mathrm{T}}w]p$$

从$y\geqslant 0$,$g(x)\geqslant 0$和$x^{\mathrm{T}}w\leqslant s(x|C)$,可得

$$f(x)+s(x\mid C)\geqslant f(u)-\sum_{i\in I_0}y_ig_i(u)+u^{\mathrm{T}}w-\frac{1}{2}p^{\mathrm{T}}[\nabla^2 f(u)-\nabla^2\sum_{i\in I_0}y_ig_i(u)]p$$

证毕

定理 4(逆对偶性)　设(x^*,y^*,w^*,p^*)是(GD_2)的最优解且在这点满足下列条件

1)对任意 $\alpha=1,2,\cdots,r$,有

a)$n\times n$ 矩阵 $\nabla^2\sum_{i\in I_\alpha}y_i^*g_i(x^*)$是正定且 $p^{*\mathrm{T}}\nabla\sum_{i\in I_\alpha}y_i^*g_i(x^*)\geqslant 0$;

b)$n\times n$ 矩阵 $\nabla^2\sum_{i\in I_\alpha}y_i^*g_i(x^*)$是负定且 $p^{*\mathrm{T}}\nabla\sum_{i\in I_\alpha}y_i^*g_i(x^*)\leqslant 0$;

2)向量$\{[\nabla^2 f(x^*)-\nabla^2\sum_{i\in I_0}y_i^*g_i(x^*)]_j,[\nabla^2\sum_{i\in I_\alpha}y_i^*g_i(x^*)]_j,\alpha=1,2,\cdots,r,j=1,2,\cdots,n\}$是线性无关,其中$[\nabla^2 f(x^*)-\nabla^2\sum_{i\in I_0}y_i^*g_i(x^*)]_j$是$[\nabla^2 f(x^*)-\nabla^2\sum_{i\in I_0}y_i^*g_i(x^*)]$的第 j 行,$[\nabla^2\sum_{i\in I_\alpha}y_i^*g_i(x^*)]_j$是$[\nabla^2\sum_{i\in I_\alpha}y_i^*g_i(x^*)]$的第 j 行。

3)向量$\{\nabla\sum_{i\in I_\alpha}y_i^*g_i(x^*),\alpha=1,2,\cdots,r\}$是线性无关。

如果对所有可行解(x,u,y,w,p),$f(\cdot)-\sum_{i\in I_0}y_ig_i(\cdot)+(\cdot)^{\mathrm{T}}w$ 是二级(F,ρ_0)-伪凸,且$-\sum_{i\in I_\alpha}y_ig_i(\cdot)$ $(\alpha=1,2,\cdots,r)$是二阶(F,ρ_α)-拟凸,又$\sum_{\alpha=1}^r\rho_\alpha+\rho_0\geqslant 0$,则 x^* 是(P)的一个最优解。

证明　由(x^*,y^*,w^*,p^*)是(GD_2)的一个最优解,根据广义 Fritz John 必要条件,存在 $\tau_0\in\mathbf{R}$,$v\in\mathbf{R}^n$,$\tau_\alpha\in\mathbf{R}$,$\alpha=1,2,\cdots,r$,$\beta\in\mathbf{R}$,$\gamma\in\mathbf{R}^m$,使得

$$\begin{aligned}&\tau_0\{-\nabla f(x^*)+\sum_{i\in I_0}\nabla y_i^*g_i(x^*)-w^*+\frac{1}{2}p^{*\mathrm{T}}\nabla[\nabla^2 f(x^*)-\nabla^2\sum_{i\in I_0}y_i^*g_i(x^*)p^*]\}+\\&v^{\mathrm{T}}\{\nabla^2 f(x^*)-\nabla^2 y^{*\mathrm{T}}g(x^*)+\nabla[\nabla^2 f(x^*)p^*-\nabla^2 y^{*\mathrm{T}}g(x^*)p^*]\}+\\&\sum_{\alpha=1}^r\tau_\alpha\{\nabla\sum_{i\in I_\alpha}y_i^*g_i(x^*)-\frac{1}{2}p^{*\mathrm{T}}\nabla[\nabla^2\sum_{i\in I_\alpha}y_i^*g_i(x^*)p^*]\}=0\end{aligned}\tag{21}$$

$$\tau_0\{g_i(x^*)-\frac{1}{2}p^{*\mathrm{T}}\nabla^2 g_i(x^*)p^*\}-v^{\mathrm{T}}\{g_i(x^*)+\nabla^2 g_i(x^*)p^*\}-\gamma_i=0,\ i\in I_0\tag{22}$$

$$\tau_\alpha\{g_i(x^*)-\frac{1}{2}p^{*\mathrm{T}}\nabla^2 g_i(x^*)p^*\}-v^{\mathrm{T}}\{\nabla g_i(x^*)+\nabla^2 g_i(x^*)p^*\}-\gamma_i=0,i\in I_\alpha,\alpha=1,2,\cdots,r\tag{23}$$

$$\tau_0x^*-v=\beta\in N_C(w^*)\tag{24}$$

$$(\tau_0p^*+v)^{\mathrm{T}}\{\nabla^2 f(x^*)-\nabla^2\sum_{i\in I_0}y_i^*g_i(x^*)\}-\sum_{\alpha=1}^r(\tau_\alpha p^*+v)^{\mathrm{T}}\{\nabla^2\sum_{i\in I_\alpha}y_i^*g_i(x^*)\}=0\tag{25}$$

$$\tau_\alpha\{\sum_{i\in I_\alpha}y_i^*g_i(x^*)-\frac{1}{2}p^{*\mathrm{T}}\nabla^2\sum_{i\in I_\alpha}y_i^*g_i(x^*)p^*\}=0,\alpha=1,2,\cdots,r\tag{26}$$

$$\gamma^{\mathrm{T}}y^*=0\tag{27}$$

$$\begin{aligned}&(\tau_0,\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_r,\beta,\gamma)\geqslant 0\\&(\tau_0,\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_r,\beta,\gamma,v)\neq 0\end{aligned}\tag{28}$$

由条件 2),(25)式意味着

$$\tau_\alpha p^*+v=0\quad\alpha=0,1,2,\cdots,r\tag{29}$$

对任意 $i\in I_\alpha$,$\alpha=1,2,\cdots,r$,用 y_i^* 乘(23)式,则由(26)式,有

$$\tau_\alpha\{y_i^*g_i(x^*)-\frac{1}{2}p^{*\mathrm{T}}\nabla^2 y_i^*g_i(x^*)p^*\}-v^{\mathrm{T}}\{\nabla y_i^*g_i(x^*)+\nabla^2 y_i^*g_i(x^*)p^*\}=0,i\in I_\alpha,\alpha=1,2,\cdots,r$$

因此

$$\tau_\alpha\{\sum_{i\in I_\alpha}y_i^*g_i(x^*)-\frac{1}{2}p^{*\mathrm{T}}\sum_{i\in I_\alpha}\nabla^2 y_i^*g_i(x^*)p^*\}-v^{\mathrm{T}}\{\sum_{i\in I_\alpha}\nabla y_i^*g_i(x^*)+\sum_{i\in I_\alpha}\nabla^2 y_i^*g_i(x^*)p^*\}=0,\alpha=1,2,\cdots,r$$

从(26)式,有

$$v^{\mathrm{T}}\{\sum_{i\in I_\alpha}\nabla y_i^*g_i(x^*)+\sum_{i\in I_\alpha}\nabla^2 y_i^*g_i(x^*)p^*\}=0,\ \alpha=1,2,\cdots,r\tag{30}$$

在(21)式中,用(18)式,得

$$\begin{aligned}&(\tau_\alpha p^*+v)^{\mathrm{T}}\{\nabla^2 f(x^*)-\nabla^2\sum_{i\in I_0}y_i^*g_i(x^*)+\nabla[\nabla^2 f(x^*)-\nabla^2\sum_{i\in I_0}y_i^*g_i(x^*)]p^*\}-\\&\sum_{\alpha=1}^r(\tau_\alpha p^*+v)^{\mathrm{T}}\{\nabla^2[\sum_{i\in I_\alpha}y_i^*g_i(x^*)+\nabla[\nabla^2\sum_{i\in I_\alpha}y_i^*g_i(x^*)]p^*\}-\tau_0\{\nabla\sum_{i\in M\setminus I_0}y_i^*g_i(x^*)+\end{aligned}$$

$$\nabla^2\sum_{i\in M\backslash I_0}y_i^*g_i(x^*)p^*\}-\frac{1}{2}\tau_0p^{*\mathrm{T}}\{\nabla[\nabla^2 f(x^*)-\nabla^2\sum_{i\in I_0}y_i^*g_i(x^*)]p^*\}+$$

$$\sum_{\alpha=1}^r\tau_\alpha\{\nabla\sum_{i\in I_\alpha}y_i^*g_i(x^*)+\nabla^2[\sum_{i\in I_\alpha}y_i^*g_i(x^*)]p^*\}+\sum_{\alpha=1}^r\frac{1}{2}\tau_\alpha p^{*\mathrm{T}}\{\nabla[\nabla^2\sum_{i\in I_\alpha}y_i^*g_i(x^*)]p^*\}=0$$

从(29)式,有

$$\sum_{\alpha=1}^r(\tau_\alpha-\tau_0)\{\nabla\sum_{i\in I_\alpha}y_i^*g_i(x^*)+\nabla^2\sum_{i\in I_\alpha}y_i^*g_i(x^*)p^*\}+\frac{1}{2}v^{\mathrm{T}}\{\nabla[\nabla^2 f(x^*)-$$

$$\nabla^2\sum_{i\in I_0}y_i^*g_i(x^*)]p^*-\nabla[\nabla^2\sum_{i\in M\backslash I_0}y_i^*g_i(x^*)]p^*\}=0$$

即

$$\sum_{\alpha=1}^r(\tau_\alpha-\tau_0)\{\nabla\sum_{i\in I_\alpha}y_i^*g_i(x^*)+\nabla^2\sum_{i\in I_\alpha}y_i^*g_i(x^*)p^*\}+\frac{1}{2}v^{\mathrm{T}}\{\nabla[\nabla^2 f(x^*)-\nabla^2 y^{*\mathrm{T}}g(x^*)]p^*\}=0 \tag{31}$$

如果对所有 $\alpha=0$、1、2、…、r,$\tau_\alpha=0$,则从(29)式,有 $v=0$,从(22)、(23)式,得 $\gamma=0$,并且从(24)式得 $\beta=0$,即$(\tau_0,\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_r,\beta,\gamma,v)=0$,这与(28)式矛盾。因此,存在 $\bar{\alpha}\in\{0,1,2,\cdots,r\}$,使得 $\tau_{\bar{\alpha}}>0$。

可以断定 $p^*=0$。事实上,如果 $p^*\neq0$,则(29)式意味着

$$(\tau_\alpha-\tau_{\bar{\alpha}})p^*=0,\ \alpha=1、2、\cdots、r$$

于是 $\tau_\alpha=\tau_{\bar{\alpha}}>0$,$\alpha=1$、2、…、$r$。因此,(30)式意味着

$$p^{*\mathrm{T}}\{\sum_{i\in I_\alpha}\nabla y_i^*g(x^*)+\sum_{i\in I_\alpha}\nabla^2 y_i^*g(x^*)p^*\}=0,\ \alpha=1、2、\cdots、r$$

这与条件1)矛盾。因此,$p^*=0$。基于(30)式,条件3)和 $p^*=0$,有 $v=0$。根据 $p^*=0$ 和对某个 $\bar{\alpha}\in\{0,1,2,\cdots,r\}$,$\tau_{\bar{\alpha}}>0$,可以知道(31)式意味着 $\tau_\alpha=\tau_{\bar{\alpha}}>0$。现由(22)、(23)式,有

$$\tau_\alpha\nabla g_i(x^*)-\gamma_i=0,\ i\in I_0 \tag{32}$$

$$\tau_\alpha\nabla g_i(x^*)-\gamma_i=0,\ i\in I_\alpha,\ \alpha=1、2、\cdots、r$$

因此,由 $\gamma\geqslant0$ 和 $\tau_\alpha>0$,$\alpha=0$、1、2、…、r,有 $g(x^*)\geqslant0$。于是 x^* 是(P)的可行解,且(P)和(GD_2)对应的目标值相等。

对 $i\in I_0$,用 y_i^* 乘(32)式,并利用(27)式,有 $\tau_0y_i^*g_i(x^*)=0$,$i\in I_0$,由 $\tau_0>0$,得

$$y_i^*g_i(x^*)=0,\ i\in I_0 \tag{33}$$

由 $v=0$,$\tau_0>0$,从(24)式显然有 $x^*\in N_C(w^*)$,因此

$$s(x^*|C)=x^{*\mathrm{T}}w^* \tag{34}$$

于是,从(33)、(34)式和 $p^*=0$,有

$$f(x^*)+s(x^*|C)=f(x^*)-\sum_{i\in I_0}y_i^*g_i(x^*)+u^{*\mathrm{T}}w^*-\frac{1}{2}p^{*\mathrm{T}}[\nabla^2 f(x^*)-\nabla^2\sum_{i\in I_0}y_i^*g_i(x^*)]p^*$$

如果对所有可行解(x,u,y,w,p),$f(\cdot)-\sum_{i\in I_0}y_ig_i(\cdot)+(\cdot)^{\mathrm{T}}w$ 是二阶(F,ρ_0)-伪凸,且 $-\sum_{i\in I_\alpha}y_ig_i(\cdot)$($\alpha=1$、2、…、$r$)是二阶$(F,\rho_\alpha)$-拟凸,又$\sum_{\alpha=1}^r\rho_\alpha+\rho_0\geqslant0$,由定理3知,$x^*$ 是(P)的一个最优解。　证毕

3　特殊情形和某些注记

考虑 $C=\{Bw:\ w^{\mathrm{T}}Bw\leqslant1\}$ 时,容易证明$(x^{\mathrm{T}}Bx)^{1/2}=s(x|C)$且 C 是紧和凸的。则本文中的原问题(P)与对偶问题(GD_1)和(GD_2)分别退化为 Zhang 和 Mond 在文献[5]中的原问题(P)与对偶问题$(GD)_1$和$(2GD)_1$。

$$(\mathrm{P}):\ \mathrm{Min}\ f(x)+(x^{\mathrm{T}}Bx)^{1/2}$$

$$\mathrm{s.t.}\ \ g(x)\geqslant0$$

和对偶问题

$$(\mathrm{GD})_1\qquad \mathrm{Max}\ f(u)+u^{\mathrm{T}}Bw-\sum_{i\in I_0}y_ig_i(u)$$

$$\mathrm{s.t.}\ \ \nabla f(u)+Bw-y^{\mathrm{T}}\nabla g(u)=0$$

$$\sum_{i\in I_\alpha} y_i g_i(u) \leqslant 0,\ \alpha = 1、2、\cdots、r$$

$$y \geqslant 0 \qquad w^{\mathrm{T}}Bw \leqslant 1$$

与

$$(2\mathrm{GD})_1 \qquad \operatorname{Max} f(u) + u^{\mathrm{T}}Bw - \sum_{i\in I_0} y_i g_i(u) - \frac{1}{2}p^{\mathrm{T}}[\nabla^2 f(u) - \nabla^2 \sum_{i\in I_0} y_i g_i(u)]p$$

$$\text{s.t.}\quad \nabla f(u) + Bw - y^{\mathrm{T}}\nabla g(u) + \nabla^2 f(u)p - \nabla^2 y^{\mathrm{T}} g(u)p = 0$$

$$\sum_{i\in I_\alpha} y_i g_i(u) - \frac{1}{2}p^{\mathrm{T}}\nabla^{\mathrm{T}}\sum_{i\in I_\alpha} y_i g_i(u)p \leqslant 0,\ \alpha = 1、2、\cdots、r$$

$$y \geqslant 0 \qquad w^{\mathrm{T}}Bw \leqslant 1$$

显然,本文提出和应用的一阶与二阶(F,ρ)-凸性是 Zhang 和 Mond 在文献[7]中的一阶与二阶不变凸性的推广。因此,本文工作改进和推广了文献[5]中主要结果。在文献[5]中,Zhang 和 Mond 获得了下面二阶逆对偶性结果。

定理 5[5]　设(x^*, y^*, w^*, p^*)是$(2\mathrm{GD})_1$的最优解且在这点满足下列条件

1)$n\times n$ 矩阵$\nabla[\nabla^2 f(x^*) - \nabla^2(y^{*\mathrm{T}}g(x^*))]p^*$是正定或负定;

2)向量$\{[\nabla^2 f(x^*) - \nabla^2\sum_{i\in I_0} y_i^* g_i(x^*)]_j, [\nabla^2\sum_{i\in I_\alpha} y_i^* g_i(x^*)]_j, \alpha = 1、2、\cdots、r, j = 1、2、\cdots、n\}$是线性无关,其中$[\nabla^2 f(x^*) - \nabla^2\sum_{i\in I_0} y_i^* g_i(x^*)]_j$是$[\nabla^2 f(x^*) - \nabla^2\sum_{i\in I_0} y_i^* g_i(x^*)]$的第 j 行,$[\nabla^2\sum_{i\in I_\alpha} y_i^* g_i(x^*)]_j$是$[\nabla^2\sum_{i\in I_\alpha} y_i^* g_i(x^*)]$的第 j 行。

如果对所有可行解(x,u,y,w,p),$f(\cdot) - \sum_{i\in I_0} y_i g_i(\cdot) + (\cdot)^{\mathrm{T}}w$是二阶$(F,\rho_0)$-伪凸,且$-\sum_{i\in I_\alpha} y_i g_i(\cdot)$ $(\alpha = 1、2、\cdots、r)$是二阶(F,ρ_α)-拟凸,又$\sum_{\alpha=1}^{r}\rho_\alpha + \rho_0 \geqslant 0$,则 x^* 是(P)的最优解。

注意到在定理 5 的假设条件 1)有$\nabla[\nabla^2 f(x^*) - \nabla^2 y^{*\mathrm{T}} g(x^*)]p^*$是正定或负定,而定理 5 的结果意味着 $p^* = 0$(可参看文献[5]中定理 6 的证明过程)。显然,定理 5(即文献[5]中定理 6)的假设条件与结论是不相容的。因此,本文修正了文献[5]的上述错误,给出了正确的逆对偶性定理。

参考文献:

[1] MOND B. A Class of Nondifferentiable Mathematical Programming Problems[J]. J Math Anal Appl,1974,46(1):169-174.
[2] MANGASARIAN O L. Second Order and Higher Order Duality in Nonlinear Programming[J]. J Math Anal Appl,1975,51(3):607-620.
[3] MOND B. Second Order Duality for Nonlinear Programs[J]. Opsearch 11,1974(2-3):90-99.
[4] MOND B,WEIR T. Generalized Convexity and Higher Order Duality[J]. J Math Sci,1985(16/18):74-94.
[5] ZHANG J,MOND B. Duality for a Nondifferentiable Programming Problem[J]. Bull Austral Math Soc,1997,55:29-44.
[6] MOND B,SCHECHTER M. Non-differentiable Symmetric Duality[J]. Bull Austral Math Soc,1996,53:177-187.
[7] YANG X M. Generalized Conves Duality for Multiobjective Fractional Programs[J]. Opsearch,1994,31(2):155-163.

(责任编辑　黄　颖)