广义变分不等式的一个投影型算法及收敛速度*

孙洪春[1]，孙　敏[1]，李国成[2]
(1. 曲阜师范大学 运筹与管理学院，山东 日照 276826；2. 临沂师范学院 蒙山学院，山东 费县 273400)

摘　要：提出一个修改的投影类型方法来求解广义变分不等式。该方法保证了校正步长的一致有正下界性。在所含函数 g-单调的条件下，证明了方法的全局收敛性。在所含函数 Lipschitz 连续和 g-强单调的条件下讨论了广义变分不等式的全局误差界，并证明了预估步长的一致有正下界性。借助于全局误差界的分析，证明了所提方法具有 R-线性收敛速度。

关键词：广义变分不等式；投影收缩方法；全局收敛性；全局误差界；R-线性收敛
中图分类号：O221.2　　文献标识码：A　　文章编号：1672-6693(2005)03-0053-05

A Projection-type Method of the General Variational Inequalities and Its Convergence Rate

SUN Hong-chun[1]，*SUN Min*[1]，*LI Guo-cheng*[2]
(1. College of Operations Research and Management，Qufu Normal University，Rizhao Shandong 276826；
2. School of Mengshan，Linyi Teachers University，Feixian Shandong 273400，China)

Abstract: In this paper, we propose a modified projection-type method of the general variational inequalities. The method ensures that the corrector stepsizes have a uniformly positive bound from below. Under the g- monotone of the underlying mapping, we prove its global convergence. Under the Lipschitz continuity and g- strong monotonicity of the underlying mapping, we give the global error bound of the general variational inequalities, and prove that the predictor stepsizes have a uniformly positive bound from below. By means of analysing the global error bound, we prove that the method has a R-linear convergence rate.

Key words: the general variational inequalities; projection and contraction; the global convergence; the global error bound; R-linear convergence

考虑广义变分不等式问题：求 $u^* \in \mathbf{R}^n$ 满足 $g(u^*) \in \Omega$ 和

$$(g(u)-g(u^*))^{\mathrm{T}}F(u^*)>0, \forall g(u)\in\Omega \tag{1}$$

其中 F: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, g: $\mathbf{R}^n \to \Omega$ 是给定的非线性算子，$\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ 为非空闭凸集。Noor 在文献[1]中引入问题(1)并将其称为广义变分不等式问题(GVI)。GVI 在经济学，运筹学和非线性分析等方面有着重要的应用[2~4]。

当 $g(u)\equiv u$ 时，GVI 退化为 VI: 求 $u^*\in\Omega$ 满足 $(u-u^*)^{\mathrm{T}}F(u^*)\geqslant 0$, $\forall u\in\Omega$, VI 是由 Stampacchia 在 1964 年引入并进行了研究[5]。

Sun 在文献[6]中对 VI 进行研究，提出了新的下降方向

$$d(u,\beta)=e(u,\beta)-\beta F(u)+\beta F(P_\Omega[u-\beta F(u)])$$

其中 $e(u,\beta)=u-P_\Omega[u-\beta F(u)]$，$P_\Omega$ 为从 $\mathbf{R}^n$ 到 Ω 上的正交投影。在 F 伪单调的条件下，Sun 证明了所提算法的全局收敛性并提出了解集非空的一个充要条件，但 Sun 没有探讨算法的收敛速度。借助于文献[6~10]的思想，本文将对 GVI 进行以下两方面的研究：1)给出了 GVI 的一个投影型新算法；2)利用误差界的知识，探讨新算法的收敛速度。在 F 是 g-强单调和 Lipschitz 连续的条件下，证明了算法的全局收敛性和 R-线

* 收稿日期：2004-11-11
作者简介：孙洪春(1968-)，男，山东费县人，讲师，硕士，主要研究方向为变分互补问题的算法设计及误差界。

性收敛速度。

1 性质和定义

对于非空闭凸集 $\Omega\subseteq\mathbf{R}^n$ 和 $u\in\mathbf{R}^n$,令 $P_\Omega(u)$ 表示从 u 到 Ω 上的正交投影,即 $P_\Omega(u)=\arg\min\{\|v-u\|\mid v\in\Omega\}$。下面是投影的一些重要性质。

引理1 令 $\Omega\subseteq\mathbf{R}^n$ 是非空闭凸集,则对于任意的 $u\in\mathbf{R}^n$,$v\in\Omega$,有

$$\langle P_\Omega(u)-u,v-P_\Omega(u)\rangle\geqslant 0 \tag{2}$$

由引理1可以推出投影算子 P_Ω 是非扩张的,以及GVI解集的一个等价命题。

引理2 向量 $u^*\in\mathbf{R}^n$ 是GVI的解当且仅当 $g(u^*)=P_\Omega[g(u^*)-\beta F(u^*)]$,对于某一个或任意 $\beta>0$。

根据这个不动点方程,人们提出了各种不同的投影类型的迭代方法来求解GVI或VI,其中投影收缩算法是最简洁有效的方法。本文提出另一种投影型算法来求解GVI。每步迭代时,这个算法需要执行一次线性搜索,需要下面的假设。

假设 1)Ω^* 非空,其中 Ω^* 表示GVI的解集。2)$F:\mathbf{R}^n\rightarrow\mathbf{R}^n$ 是 g-单调的,即 $\langle F(u)-F(v),g(u)-g(v)\rangle\geqslant 0,\forall u,v\in\mathbf{R}^n$。3)$g:\mathbf{R}^n\rightarrow\mathbf{R}^n$ 是非奇异的,即存在正常数 φ 使得 $\|g(u)-g(v)\|\geqslant\varphi\|u-v\|,\forall u,v\in\mathbf{R}^n$。

其中,当 $g\equiv I$ 时,g-单调就退化为一般的单调定义。而且,每一个可解的VI算法都满足上面的假设。

本文中,定义残量向量 $e(u,\beta)$ 为 $e(u,\beta):=g(u)-P_\Omega[g(u)-\beta F(u)]$。

引理3 令 $\Omega\subseteq\mathbf{R}^n$ 是非空闭凸集,则对于任意的 $u\in\mathbf{R}^n$,$\beta_1>\beta_2>0$,有1)$\|e(u,\beta_1)\|\geqslant\|e(u,\beta_2)\|$;2)$\|e(u,\beta_1)\|/\beta_1\leqslant\|e(u,\beta_2)\|/\beta_2$。

2 算法及其收敛性

算法的基本思想是:首先,找初始点 $u^0\in\mathbf{R}^n$ 使得 $g(u^0)\in\Omega$,并计算投影残量。如果投影残量为零,则停止;否则,取 $-f(u^k,\beta_k)$ 为下降方向,其中 $f(u^k,\beta_k)=e(u^k,\beta_k)-\beta_kF(g(u^k))+\beta_kF(P_\Omega[g(u^k)-\beta_kF(u^k)])$,其中 β_k 由线性搜索得到。然后设计一个步长,利用下降方向,步长和当前迭代点产生下一个迭代点。

2.1 算法

起始步:选取 $u^0\in\mathbf{R}^n$ 使得 $g(u^0)\in\Omega$,$\delta,\mu\in(0,1)$,$\gamma\in(0,2)$。如果 $e(u^0,1)=0$,则停止;否则,令 $k:=0$。

迭代步:令 $\beta_k=\mu^{m_k}$,其中 m_k 为满足下式的最小的非负整数 m

$$\mu^m\|F(g(u^k))-F(g(u^k)-e(u^k,\mu^m))\|\leqslant\delta\|e(u^k,\mu^m)\| \tag{3}$$

令 $g(u^{k+1})=P_\Omega[g(u^k)-\gamma\rho(u^k,\beta_k)d(u^k,\beta_k)]$,其中

$$d(u^k,\beta_k)=e(u^k,\beta_k)-\beta_kF(g(u^k))+\beta_kF(P_\Omega[g(u^k)-\beta_kF(u^k)]),$$

$$\rho(u^k,\beta_k)=(1-\delta)\|e(u^k,\beta_k)\|^2/\|d(u^k,\beta_k)\|^2。$$

如果 $e(u^k,\beta_k)=0$,则停止;否则继续迭代。

其中,称 β_k 为预估步长,$\rho(u^k,\beta_k)$ 为校正步长。利用下面的引理可说明线性搜索(3)式的有限步终止性。

引理4 假如 $u\in\mathbf{R}^n$ 满足 $g(u)\in\Omega$,并且 u 不是GVI的解,则对于任意的 $\delta\in(0,1)$,存在 $\tilde{\beta}(u)\in(0,1]$,对于 $\forall\beta\in(0,\tilde{\beta}(u)]$,有

$$\beta\|F(g(u))-F(g(u)-e(u,\beta))\|\leqslant\delta\|e(u,\beta)\| \tag{4}$$

证明(利用反证法) 假设存在 $\delta\in(0,1)$,对于任意的 $\hat{\beta}\in(0,1]$,存在 $\beta\in(0,\hat{\beta}]$ 有

$$\beta\|F(g(u))-F(g(u)-e(u,\beta))\|>\delta\|e(u,\beta)\|。$$

当 $\hat{\beta}_1=1$ 时,存在 $\beta_1\in(0,\hat{\beta}_1]$,有 $\beta_1\|F(g(u))-F(g(u)-e(u,\beta_1))\|>\delta\|e(u,\beta_1)\|$。

当 $\hat{\beta}_2=\min\{1/2,\beta_1\}$ 时,存在 $\beta_2\in(0,\hat{\beta}_2]$,有 $\beta_2\|F(g(u))-F(g(u)-e(u,\beta_2))\|>\delta\|e(u,\beta_2)\|$。

……

当 $\hat{\beta}_n=\min\{1/n,\beta_{n-1}\}$ 时,存在 $\beta_n\in(0,\hat{\beta}_n]$,有 $\beta_n\|F(g(u))-F(g(u)-e(u,\beta_n))\|>\delta\|e(u,\beta_n)\|$。

……

于是得到一个序列$\{\beta_n\}$，满足对于任意的 $n\geqslant 1$，有 $\beta_n\leqslant 1/n$，并且

$$\beta_n\|F(g(u))-F(g(u)-e(u,\beta_n))\|>\delta\|e(u,\beta_n)\| \tag{5}$$

利用 $g(u)\in\Omega$，$e(u,\beta)$ 的表达式和 $\beta_n\leqslant 1/n$ 知 $\lim\limits_{n\to\infty}\|e(u,\beta_n)\|=0$。于是根据(5)式、$F$ 的连续性以及引理 3 中结论 2)知

$$0=\lim_{n\to\infty}\|F(g(u))-F(g(u)-e(u,\beta_n))\|\geqslant\delta\lim_{n\to\infty}(\|e(u,\beta_n)\|/\beta_n)\geqslant\delta\|e(u,1)\|$$

结合引理 2，知 $u\in\Omega^*$，这与已知相矛盾。　　证毕

引理 5　假设 $F(x)$ 为 g-单调映射，任取 $u^*\in\Omega^*$，则当 $u\in\mathbf{R}^n$ 并且 $g(u)\in\Omega$ 时，有

$$(g(u)-g(u^*))^{\mathrm{T}}d(u,\beta)\geqslant\|e(u,\beta)\|^2-\beta e(u,\beta)^{\mathrm{T}}(F(g(u)-F(g(u)-e(u,\beta))))。$$

证明　由(2)式可得$\{g(u)-\beta F(u)-P_{\Omega}[g(u)-\beta F(u)]\}^{\mathrm{T}}\{P_{\Omega}[g(u)-\beta F(U)]-g(u^*)\}\geqslant 0$

即

$$(e(u,\beta))-\beta F(u))^{\mathrm{T}}(g(u)-g(u^*)-e(u,\beta))\geqslant 0$$

于是可得

$$e(u,\beta)^{\mathrm{T}}(g(u)-g(u^*))\geqslant\|e(u,\beta)\|^2+\beta F(u)^{\mathrm{T}}(P_{\Omega}[g(u)-\beta F(u)]-g(u^*)) \tag{6}$$

由 F 的 g-单调性可得

$$\beta(F(P_{\Omega}[g(u)-\beta F(u)])-F(g(u^*)))^{\mathrm{T}}(P_{\Omega}[g(u)-\beta F(u)]-g(u^*))\geqslant 0 \tag{7}$$

由 $u^*\in\Omega^*$ 以及 $P_{\Omega}[g(u)-\beta F(u)]\in\Omega$ 可得

$$\beta(P_{\Omega}[g(u)-\beta F(u)]-g(u^*))^{\mathrm{T}}F(g(u^*))\geqslant 0 \tag{8}$$

将(6)、(7)、(8)式相加得　$\{e(u,\beta)+\beta F(g(u)-e(u,\beta))\}^{\mathrm{T}}(g(u)-g(u^*))\geqslant$

$$\|e(u,\beta)\|^2+\beta F(u)^{\mathrm{T}}(g(u)-g(u^*)-e(u,\beta))+\beta e(u,\beta)^{\mathrm{T}}F(g(u)-e(u,\beta))$$

移项整理可得知命题成立。　　证毕

根据算法的设计和引理 5 知，对于任意的 u^k 和 $u^*\in\Omega^*$，有

$$(g(u^k)-g(u^*))^{\mathrm{T}}d(u^k,\beta_k)\geqslant(1-\delta)\|e(u^k,\beta_k)\|^2 \tag{9}$$

定理 1　假设影射 $F(x)$ 是连续的和 g-单调的，则算法产生的点列$\{u^k\}$是有界的。

证明　任取 $u^*\in\Omega^*$，则 $\|g(u^{k+1})-g(u^*)\|^2\leqslant\|g(u^k)-g(u^*)-\gamma\rho(u^k,\beta_k)d(u^k,\beta_k)\|^2=$

$$\|g(u^k)-g(u^*)\|^2-2\gamma\rho(u^k,\beta_k)(g(u^k)-g(u^*))^{\mathrm{T}}d(u^k,\beta_k)+\gamma^2\rho(u^k,\beta_k)^2\|d(u^k,\beta_k)\|^2\leqslant$$

$$\|g(u^k)-g(u^*)\|^2-\gamma(2-\gamma)(1-\delta)\rho(u^k,\beta_k)\|e(u^k,\beta_k)\|^2$$

其中第三个不等式是根据(9)式和 $\rho(u^k,\beta_k)$ 的表达式得到。

因为 $\gamma\in(0,2)$，$\delta\in(0,1)$，由上式可得 $\|g(u^{k+1})-g(u^*)\|\leqslant\|g(u^k)-g(u^*)\|\leqslant\cdots\leqslant\|g(u^0)-g(u^*)\|$，结合假设 3)知算法产生的序列$\{u^k\}$是有界的。　　证毕

由定理 1 知，此算法也是一个投影收缩算法。

引理 6　算法产生的 $\rho(u^k,\beta_k)$ 一致有正下界，即存在 $\tau>0$，使得 $\rho(u^k,\beta_k)\geqslant\tau$。

证明　由 $d(u^k,\beta_k)$ 的表达式和(3)式知

$$\|d(u^k,\beta_k)\|^2\leqslant 2\|e(u^k,\beta_k)\|^2+2\beta_k^2\|F(g(u^k))-F(P_{\Omega}[g(u^k)-e(u^k,\beta_k)])\|^2\leqslant 2(1+\delta^2)\|e(u^k,\beta_k)\|^2$$

于是根据 $\rho(u^k,\beta_k)$ 的表达式知　$\rho(u^k,\beta_k)\geqslant\dfrac{1-\delta}{2(1+\delta^2)}:=\tau$

因此，此算法的步长是一致有正下界的。　　证毕

由定理 1 和引理 6 知 $\|g(u^{k+1})-g(u^*)\|^2\leqslant\|g(u^k)-g(u^*)\|^2-\tau\gamma(2-\gamma)(1-\delta)\|e(u^k,\beta_k)\|^2$

由此可得 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\|e(u^k,\beta_k)\|^2\leqslant\infty$，从而

$$\lim_{k\to\infty}\|e(u^k,\beta_k)\|=0 \tag{10}$$

2.2　算法全局收敛性的证明

定理 2　假设定理 1 的条件成立，则 1) $\lim\limits_{k\to\infty}\|e(u^k,\beta_k)\|/\beta_k=0$；2) $\{u^k\}$ 收敛到 GVI 的一个解。

证明　1) 假设存在无穷子指标集 K_0，有　$\|e(u^k,\beta_k)\|/\beta_k\geqslant\varepsilon>0,\ \forall k\in K_0$

结合 $\lim_{k\to\infty}\|e(u^k,\beta_k)\|=0$,可得 $\lim_{k\to\infty,k\in K_0}\beta_k=0$。

由$\{u^k\}$有界知,$\{F(u^k)\}$也是有界的,从而由投影算子的非扩张性知

$$\lim_{k\to\infty,k\in K_0}\|g(u^k)-P_\Omega[g(u^k)-\beta_kF(u^k)/\mu]\|\leqslant\lim_{k\to\infty,k\in K_0}\beta_k\|F(u^k)\|/\mu=0。$$

结合 F 的连续性,引理3的结论1)以及线性搜索(3)式知,当 $k\in K_0,k\to\infty$,有

$$0\leftarrow\|F(g(u^k))-F(P_\Omega[g(u^k)-\beta_kF(u^k)/\mu])\|>\delta\frac{\|e(u^k,\beta_k/\mu)\|}{\beta_k/\mu}\geqslant\mu\delta\frac{\|e(u^k,\beta_k)\|}{\beta_k}$$

上式与假设矛盾。

2)分两种情况讨论。

i)$\limsup_{k\to\infty}\beta_k>0$,即存在 $\varepsilon_0>0$ 和 K_1,有 $\beta_k\geqslant\varepsilon_0,k\in K_1$。

由 $\|e(u^k,\beta_k)\|\geqslant\|e(u^k,\varepsilon_0)\|,k\in K_1$,以及(10)式知 $\|e(u^k,\varepsilon_0)\|\to0$。

因为$\{u^k\}$有界,所以一定存在一个收敛的子列$\{u^{k_j}\}$,并设其极限点为 $\bar{u}$。结合 $\|e(u,\varepsilon_0)\|$ 的连续性知 $\|e(\bar{u},\varepsilon_0)\|=0$,即 $\bar{u}\in\Omega^*$。

下面证明全局收敛性。由定理1知 $\|g(u^{k+1})-g(\bar{u})\|\leqslant\|g(u^k)-g(\bar{u})\|$,任取$\{u^k\}$的一个聚点 $\hat{u}$,并设$\{u^{k_l}\}$为相应的收敛子列。于是对于 $\forall k_j$,$\exists k_l>k_j$ 有

$$\|g(u^{k_l})-g(\bar{u})\|\leqslant\|g(u^{k_j})-g(\bar{u})\|$$

在上式中令 $k_j\to\infty$,结合 $k_l>k_j$ 知 $\|g(\hat{u})-g(\bar{u})\|\leqslant\|g(\bar{u})-g(\bar{u})\|=0$。于是 $g(\hat{u})=g(\bar{u})$,再结合假设3)知 $\hat{u}=\bar{u}$。从而序列$\{u^k\}$整体收敛到 $\bar{u}$。

ii)$\lim_{k\to\infty}\beta_k=0$,于是根据引理3的结论2)知,当 k 充分大时,有$\frac{\|e(u^k,\beta_k)\|}{\beta_k}\geqslant\|e(u^k,1)\|$,由定理2的结论1)以及上式可得 $\|e(u^k,1)\|\to0$。类似于i)的分析知定理成立。 证毕

3 误差界及收敛速度

为了收敛速度的分析,需要下面的定义。

定义1 $F(u)$关于 $g(u)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上是 g-强单调的,即对于任意的 $u,v\in\mathbf{R}^n$,存在 $\eta>0$,使得

$$\langle F(u)-F(v),g(u)-g(v)\rangle\geqslant\eta\|g(u)-g(v)\|^2。$$

下面证明一个全局误差界。

定理3 $F(u)$关于 $g(u)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上是 g-强单调的,$F(u)$是 Lipschitz 连续的(存在相应常数 $L>0$),则对于任意 $u\in\mathbf{R}^n$,存在 $u^*\in\Omega^*$,且有

$$\frac{\|e(u,\beta)\|}{2+\beta L\varphi^{-1}}\leqslant\|g(u)-g(u^*)\|\leqslant\frac{\beta L\varphi^{-1}+1}{\beta\eta}\|e(u,\beta)\| \tag{11}$$

证明 因 u^* 为(1)式的解,则

$$\langle\beta F(u^*),P_\Omega(g(u)-\beta F(u))-g(u^*)\rangle\geqslant0 \tag{12}$$

由引理1和 $g(u^*)\in\Omega$ 知

$$\langle P_\Omega(g(u)-\beta F(u))-(g(u)-\beta F(u)),g(u^*)-P_\Omega(g(u)-\beta F(u))\rangle\geqslant0 \tag{13}$$

由(12)、(13)式得 $\langle P_\Omega(g(u)-\beta F(u))-g(u)+\beta(F(u)-F(u^*)),g(u^*)-P_\Omega(g(u)-\beta F(u))\rangle\geqslant0$

即 $\langle\beta(F(u)-F(u^*))-e(u,\beta),g(u^*)-g(u)+e(u,\beta)\rangle\geqslant0$

从而 $\langle\beta(F(u)-F(u^*))+(g(u)-g(u^*)),e(u,\beta)\rangle\geqslant\langle\beta(F(u)-F(u^*)),g(u)-g(u^*)\rangle$

也就是 $\langle\beta(F(u)-F(u^*),g(u)-g(u^*)\rangle\leqslant\|e(u,\beta)\|\cdot(\beta\|F(u)-F(u^*)\|+\|g(u)-g(u^*)\|)$

由定义1知,存在 $\eta>0$ 使得 $\beta\eta\|g(u)-g(u^*)\|^2\leqslant\langle\beta(F(u)-F(u^*)),g(u)-g(u^*)\rangle\leqslant$
$\|e(u,\beta)\|\cdot(\beta\|F(u)-F(u^*)\|+\|g(u)-g(u^*)\|)\leqslant\|e(u,\beta)\|\cdot(\beta L\|u-u^*\|+\|g(u)-g(u^*)\|\leqslant$
$\|e(u,\beta)\|\cdot(\beta L\varphi^{-1}\|g(u)-g(u^*)\|+\|g(u)-g(u^*)\|)$

从而有(11)式右边不等式成立。

另外，由引理(2)知

$$\|e(u,\beta)\| = \|e(u,\beta)-e(u^*,\beta)\| \leqslant \|g(u)-g(u^*)\| + \|P_\Omega(g(u)-\beta F(u))-P_\Omega(g(u^*)-\beta F(u^*))\| \leqslant$$
$$\|g(u)-g(u^*)\| + \|g(u)-\beta F(u)-g(u^*)+\beta F(u^*)\| \leqslant 2\|g(u)-g(u^*)\| + \beta\|F(u)-F(u^*)\| \leqslant$$
$$2\|g(u)-g(u^*)\| + \beta L\|u-u^*\| \leqslant 2\|g(u)-g(u^*)\| + \beta L\varphi^{-1}\|g(u)-g(u^*)\|$$

从而有(11)式左边不等式成立。　　证毕

定理 4　设 $F(u)$ 是 Lipschitz 连续，其 Lipshcitz 常数为 L，则算法产生的序列 $\{\beta_k\}$ 一致有正下界。

证明　由已知条件得 $\beta\|F(g(u^k))-F(g(u^k)-e(u^k,\beta))\| \leqslant \beta L\|e(u^k,\beta)\|$。因此当 $\beta \leqslant \delta/L$ 时，不等式(3)式在立。于是根据线性搜索规则知

$$\beta_k \geqslant \min\{1,\mu\delta/L\} := \bar{\omega}$$　　证毕

定理 5　在定理 1 和定理 3 的假设下，算法具有 Q-线性收敛速度。

证明　由定理 1 知 $\|g(u^{k+1})-g(\bar{u})\|^2 \leqslant \|g(u^k)-g(\bar{u})\|^2-\gamma(2-\gamma)(1-\delta)\tau\|e(u^k,\beta_k)\|^2$，再由假设 3)知 $\|g(u^{k+1})-g(\bar{u})\|^2 \leqslant \|g(u^k)-g(\bar{u})\|^2-\gamma(2-\gamma)(1-\delta)\tau\|e(u^k,\beta_k)\|^2$，结合(11)式右边有

$$\|g(u^{k+1})-g(\bar{u})\|^2 \leqslant \|g(u^k)-g(\bar{u})\|^2-\gamma(2-\gamma)(1-\delta)\tau\left(\frac{\beta_k\eta}{\beta_k L\varphi^{-1}+1}\right)^2\|g(u^k)-g(\bar{u})\|^2$$

即

$$\frac{\|g(u^{k+1})-g(\bar{u})\|}{\|g(u^k)-g(\bar{u})\|} = 1-\gamma(2-\gamma)(1-\delta)\tau\left(\frac{\beta_k\eta}{\beta_k L\varphi^{-1}+1}\right)^2,$$

结合定理 4 以及 $\beta_k \leqslant 1$ 知

$$\frac{\|g(u^{k+1})-g(\bar{u})\|}{\|g(u^k)-g(\bar{u})\|} = 1-\gamma(2-\gamma)(1-\delta)\tau\left(\frac{\bar{\omega}\eta}{L\varphi^{-1}+1}\right)^2$$

取 $\gamma\in(0,2)$ 使得

$$1-\gamma(2-\gamma)(1-\delta)\tau\left(\frac{\bar{\omega}\eta}{L\varphi^{-1}+1}\right)^2 := \theta\in(0,1)。$$

因此序列 $\{g(u^k)-g(\bar{u})\}$ 全局 Q-线性收敛于零。根据假设 3)知，

$$\|u^k-\bar{u}\| \leqslant \varphi^{-1}\|g(u^k)-g(\bar{u})\| \leqslant \varphi^{-1}\theta^k\|g(u^0)-g(\bar{u})\|。$$

序列 $\{u^k-\bar{u}\}$ 全局 R-线性收敛于零，从而 $\{u^k\}$ 全局 R-线性收敛于 $\bar{u}$。　　证毕

参考文献：

[1] NOOR M. A. General Variational Inequalities[J]. Appl Math Lett, 1988, 1(2): 119-121.

[2] HE B S. Inexact Implicit Methods for Monotone General Variational Inequalities[J]. Math Programming, 1999, 86: 199-217.

[3] PANG J S, YAO J C. On a Generalization of a Normal Map And Equation[J]. SIAM J Control and Optim, 1995, 33: 168-184.

[4] NOOR M A, WANG Y J, XIU N H. Projection Iterative Schemes for General Variational Inequalities[J]. Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 2002, 3(3): article 34.

[5] STAMPACCHIA G. Formes Bilinearires Coercitives Sur Les Ensembles Convexes[J]. G R Acad Sci. Parus, 1964, 258: 4413-4416.

[6] SUN D. A Class of Iterative Methods for Solving Nonlinear Projection Equations[J]. J Optim Theory Appl, 1996, 91: 123-140.

[7] XIU N H, ZHANG J Z. Global Projection-type Error Bound for General Variational Inequlities[J]. J Optim Theory and Appl, 2002, 112(1): 213-228.

[8] SOLODOV M V. Convergence Rate Analysis of Iteractive Algorithms for Solving Variational Inequality Problems[J]. Math Programming, 2003, 96: 513-528.

[9] 陈熙德. 自反 Banach 空间中一类变分不等式解的存在唯一性[J]. 重庆师范学院学报(自然科学版), 1991, 16(2): 44-48.

[10] 王传伟. 一个求解变分不等式问题的投影算法[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2005, 22(1): 6-11.

(责任编辑　黄　颖)