2005 年 9 月　重庆师范大学学报(自然科学版)　Sep. 2005
第 22 卷 第 3 期　Journal of Chongqing Normal University(Natural Science Edition)　Vol. 22 No. 3

最高阶元个数为 42 的有限群是可解群*

晏燕雄，陈贵云，何立官
(西南师范大学 数学与财经学院，重庆 400715)

摘　要：通过讨论群的最高阶元素的个数为 42 的情况，得到如下定理 1。如果 G 是最高阶元素个数为 42 的有限群，则 G 是下述群之一：1) $G\cong[Z_{43}]\cdot H$，其中 $[Z_{43}]\trianglelefteq G$，$H\lesssim Z_2\times Z_3\times Z_7$；2) G 有一个正规子群 Z_k ($k=49$、86、98)，而且 $G/Z_k\lesssim Z_2\times Z_3\times Z_7$；3) G 是方指数为 4 的 2-群或元素的最高阶为 6 的 $\{2,3\}$-群；4) G 的阶整除 $2^{\alpha}\cdot 3^{\beta}\cdot 7^{\gamma}$，($1\leqslant\alpha\leqslant 5$, $0\leqslant\beta\leqslant 3$, $0\leqslant\gamma\leqslant 2$)。并证明了这类群是可解群。

关键词：有限群；可解群；元素的阶
中图分类号：O152.1　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1672-6693(2005)03-0063-03

Finite Groups with 42 Elements of Maximal Order Are Solvable

YAN Yan-xiong, *CHEN Gui-yun*, *HE Li-guan*
(School of Mathematics and Finance, Southwest China Normal University, Chongqing 400715, China)

Abstract: We discuss the finite groups with 42 elements of maximal order, and get a theorem as follows. Suppose G is a finite group with 42 elements of maximal order, G is one of the following groups: 1) $G\cong[Z_{43}]\cdot H$, where $[Z_{43}]\trianglelefteq G$, $H\lesssim Z_2\times Z_3\times Z_7$; 2) G has a normal subgroup Z_k with order k ($k=49$、86、98), and $G/Z_k\lesssim Z_2\times Z_3\times Z_7$; 3) An 2-group of largest element order 4 or a $\{2,3\}$-group with largest element order 6; 4) A solvable group with order dividing $2^{\alpha}\cdot 3^{\beta}\cdot 7^{\gamma}$, ($1\leqslant\alpha\leqslant 5$, $0\leqslant\beta\leqslant 3$, $0\leqslant\gamma\leqslant 2$). And we prove these kinds of groups are solvable.

Key words: finite groups; solvable groups; the order of elements.

1　基本定义及主要结果

本文所讨论的群均为有限群。$\pi_e(G)$ 表示群 G 中元素阶的集合，k 是 $\pi_e(G)$ 中的最大值，a 表示 G 的最高阶为元素。n 表示 G 中 k 阶循环子群的个数。i 是一个自然数，$\pi(i)$ 是 i 的相异素因子的集合，$\pi(G)=\pi(|G|)$；$M_i(G)$ 是 G 的 i 阶元素的集合，特别地 $M(G)=M_k(G)$。$P_r(G)$ 是 G 的一个 r-Sylow 子群，$r\in\pi(G)$，$\varphi(x)$ 表示 x 的欧拉函数。其余符号及术语是标准的[1]。

定义 1　有限群 G_1 与 G_2 称为同阶型群，如果 $|M_i(G_1)|=|M_i(G_2)|$，$i=1$、2、3…。

1987 年 Fields 奖获得者 J. G. Thompson 提出了如下著名的猜想。

Thompson 猜想　设 G_1 与 G_2 为同阶型群，如果 G_1 可解，则必然 G_2 可解。

文献[2]研究了最高阶元素的个数 $|M(G)|$ 对群的影响，证明了当 $|M(G)|$ 分别为 2、奇数、$2p$ (p 为素数) 或 $\varphi(k)$ 时，G 为可解群；文献[3]证明了当 $|M(G)|=8$ 时，G 可解；文献[4,5]证明了当 $|M(G)|<20$ 或为 $2p^2$ (p 为素数) 时，G 可解；文献[6]证明了当 $\pi_e(G)=\{1,2,3,5,6\}$ 的有限群可解；文献[7,8]证明了当 $|M(G)|=32$ 或为 $2p^3$ (p 为素数) 时，G 可解；文献[9]证明了当 $|M(G)|=2pq$ ($7\leqslant p\leqslant q$) 时，G 可解；文献[1]证明了当 $|M(G)|=30$ 时，G 可解；文献[10]讨论了极大幂零子群的阶为素数幂的有限群。以上文献对 Thompson 猜想的解决是有用的。本文在以上文献的基础上讨论了群的最高阶元素的个数为 42 的情况，得到了定理 1。

定理 1　设 G 是最高阶元素个数为 42 的有限

* 收稿日期：2005-01-10
资助项目：国家自然科学基金资助项目(10171074)；教育部重点项目；教育部优秀青年教师资助计划
作者简介：晏燕雄(1978-)，男，江西九江人，硕士研究生，主要从事有限群研究。

群,则 G 是下述群之一

1)$G\cong[Z_{43}]\cdot H,[Z_{43}]\trianglelefteq G,H\lesssim Z_2\times Z_3\times Z_7$;

2)G 有一个正规子群 $Z_k(k=49、86、98)$,而且 $G/Z_k\lesssim Z_2\times Z_3\times Z_7$;

3)G 是方指数为4的2-群或元素的最高阶为6的 $\{2,3\}$-群;

4)G 的阶整除 $2^\alpha\cdot 3^\beta\cdot 7^\gamma,(1\leqslant\alpha\leqslant 5,0\leqslant\beta\leqslant 3,0\leqslant\gamma\leqslant 2)$。

特别地 G 是可解群。

2 主要引理及证明

引理1[2] 设 G 有 n 个 l 阶循环子群的个数 l,则 $|M_l(G)|=n\varphi(l)$,特别地 $|M(G)|=n\varphi(k)$。而且如果 $n=1$,则 G 超可解。进一步如果 k 是一个素数,则 $n\equiv 1(\bmod k)$。

由文献[2]中的引理2.2和定理1.1及文献[1]中 Wielandt 定理,结论是显然的。

引理2[11] 设 $a\in G,|a|=k=mp,p\nmid m$,则1)当 $C_G(a)$ 中 p 阶子群唯一时,则 $C_G(a)$ 的 p-Sylow 子群是 p 阶群,并且 $C_G(a)=\langle a^m\rangle\times H$,其中 H 是 p'-Hall;2)当 $C_G(a)$ 中 p 阶子群不唯一时,则 $C_G(a)$ 至少有 p^2-1 个 p 阶元素。

引理3[7] 如果 $a\in G,|a|=k,M(G)\subset C_G(\langle a\rangle)$。则 $\pi_e(C_G(a))=\pi_e(\langle a\rangle),C_G(\langle a\rangle)=\langle M(G)\rangle$ 且 $C_G(\langle a\rangle)\trianglelefteq G$。

3 定理1的证明

再次说明,$k=\max\{\pi_e(G)\}$,a 为 G 的最高阶元素,n 为 G 中 k 阶循环子群个数。显然有 $|N_G(\langle a\rangle):C_G(a)|\,|\,\varphi(k)$,而且下式总是成立的。

$$|G|=|G:N_G(\langle a\rangle)||N_G(\langle a\rangle):C_G(a)||C_G(a)| \quad (1)$$

因为 $n\varphi(k)=42$,根据引理1,$n、\varphi(k)$ 和 k 三者之间的关系如表1。

表1 $n、\varphi(k)、k$ 之间的关系

n	1	7	21	42
$\varphi(k)$	42	6	2	1
k	43,86,49,98	7,9,14,18	3,4,6	2

把定理1的证明过程分散在下面的4个引理中,证明了4个引理,则定理1的结论自然成立。

引理4 如果 $|M(G)|=42$,则 $n\neq 42$。当 $n=7$ 时,$k\neq 7$;而且当 $n=21$ 时,$k\neq 3$。

证明 如果 $|M(G)|=42,n=42$,则 $k=2$,从而 G 是初等交换2-群。令 $|G|=2^u$,则 G 的最高阶为2的元素个数为 2^u-1,显然不可能等于42,矛盾。引理的后半部分则由引理1直接可得。 证毕

引理5 如果 $|M(G)|=42,n=1$,则 G 同构于下面超可解群之一。

1)$G\cong[Z_{43}]\cdot H,[Z_{43}]\trianglelefteq G,H\lesssim Z_2\times Z_3\times Z_7$;

2)G 有正规 k 阶子群 $Z_k(k=49、86、98)$,且有 $G/Z_k\lesssim Z_2\times Z_3\times Z_7$。

证明 如果 $|M(G)|=42,n=1$,则由引理1可知 G 超可解。因为 $n=1$,故 $\langle M(G)\rangle=Z_k$ 是 G 唯一的 k 阶循环子群,从而 $\langle M(G)\rangle\trianglelefteq G$。由于 k 是 G 的元素的最高阶,由引理3则有 $C_G(\langle M(G)\rangle)=\langle M(G)\rangle$,因此

$$G/\langle M(G)\rangle=N_G(\langle M(G)\rangle)/C_G(\langle M(G)\rangle)\lesssim \mathrm{Aut}(\langle M(G)\rangle).$$

若 $k=43$,因为 $(43,42)=1$,则 G 扩张可裂。又 $\mathrm{Aut}(Z_{43})\cong Z_2\times Z_3\times Z_7$,则 $G\cong[Z_{43}]\cdot H,[Z_{43}]\trianglelefteq G,H\lesssim Z_2\times Z_3\times Z_7$,1)得证。若 $k=49、86、98$,则 $G/Z_k\lesssim \mathrm{Aut}(Z_k)\cong Z_2\times Z_3\times Z_7$,得结论2)。 证毕

引理6 如果 $|M(G)|=42,n=21$,则 G 是2-群或 $\{2,3\}$-群。

证明 设 a 是 G 的最高阶为 k 的元素。由 $|a|=k$,从而有 $\pi(C_G(a))=\pi(\langle a\rangle)=\pi(k)$ (2)

现取一 G 的最高阶为 k 的元素,不防设 a,使得

$$r=|G:N_G(\langle a\rangle)|=\min_{1\leqslant i\leqslant n}\{|G:N_G(\langle a_i\rangle)|\} \quad (3)$$

其中 $\langle a_1\rangle、\cdots、\langle a_n\rangle$ 是 n 个 k 阶循环子群。根据引理1及表1知 $k=4$ 或6,$\varphi(k)=2$ 及 $n=21$。则 $r\leqslant 21$,而且 $|N_G(\langle a\rangle):C_G(a)|\,|\,2$。设 G 的所有 k 阶循环子群被分为 $J_1、J_2、\cdots、J_t$,共 t 个不同的共轭类。命 $m_i=|G:N_G(\langle a_i\rangle)|$,其中 $\langle a_i\rangle\in J_i$,则 m_i 的值与 $\langle a_i\rangle$ 在 J_i 中的选择无关,此时称 $(m_1,m_2,\cdots,m_t)$ 为 G 的 m-型,并记 $m(G)=(m_1,\cdots,m_t)$。下面以 k 和 r 的不同取值为基础进行讨论。

1)若 $k=4$,则由(2)式易知 $\pi(C_G(a))=\{2\}$。

如果 $r=1、2、4、8$,则由(1)式易知 G 是2-群;如果 $r=3、6、9$,则 G 是 $\{2,3\}$-群;如果 $r=5、7、10、21$,G 中存在5或7阶元素,这与 $k=4$ 矛盾。

2)若 $k=6$,则 $\pi(C_G(a))=\{2,3\}$,且由(3)式有 $1\leqslant r\leqslant 10$ 或 $r=21$。

如果 $r=1、2、3、4、6、8、9$,则 G 是 $\{2,3\}$-群;

如果 $r=5$,因为 m-型的分量满足 $m_1+m_2+\cdots+m_t=21$,则 $m(G)$ 的不同取值和 G 的结构如下。

a)若 $m(G)$ 的取值是下列之一,$m(G)=(5,16)$,$m(G)=(5,8,8)$,$m(G)=(5,6,10)$ 或 $m(G)$

$=(5,5,5,6)$，由(1)式，则 G 是$\{2,3\}$-群，同时也是$\{2,3,5\}$-群，显然这是不可能的。

b)若 $m(G)=(5,5,11)$，则 G 中存在 11 阶元素，与 $k=6$ 矛盾。

c)若 $m(G)=(5,7,9)$，则 G 中存在 7 阶元素，矛盾。

如是 $r=7$、21，则 G 中存在 7 阶元素，矛盾。

如果 $r=10$，则 G 的 21 个 6 阶循环子群被分为两个共轭类，其中一个共轭类包含 10 个循环子群；同时另一个则包含 11 个，因而 G 中存在 11 阶元素，矛盾。　　证毕

引理 7　若$|M(G)|=42$，$n=7$ 则 G 可解，且 G 的阶整除 $2^{\alpha}\cdot3^{\beta}\cdot7^{\gamma}$，$(1\leqslant\alpha\leqslant5,0\leqslant\beta\leqslant3,0\leqslant\gamma\leqslant2)$。

证明　设 a 是 G 的最高阶为 k 的元素，即$|a|=k$。根据表 1 可知，此时 $k=7$、9、14 或 18，$n=7$ 及 $\varphi(k)=6$。且由(3)式 $r=|G:N_G(\langle a\rangle)|\leqslant7$。设$\langle a_1\rangle$、$\langle a_2\rangle$、…、$\langle a_7\rangle$是 G 的 7 个 k 阶循环子群。显然$|N_G(\langle a_i\rangle):C_G(a_i)|\,|6$，其中$i=1$、2、…、7。由引理 1 可知 $n\neq7$。因此下面只需要对 $k=9$、14、18 三种情况进行讨论。

1)若 $k=9$，则$|a|=9$，易知 $\pi(C_G(a))=\{3\}$。如果 $r=1$、2、3，由(1)式，则 G 是$\{2,3\}$-群；如果 $r=7$，则由(1)式可假设$|G|=2^{\alpha}\cdot3^{\beta}\cdot7(\alpha\leqslant1,\beta\leqslant2)$. 显然 G 是可解群。

2)若 $k=14$，从而$|a|=14$，则 $C_G(a)$是$\{2,7\}$-群，可解。下面证明 G 的可解性。如果 $r=1$ 或 2，则 $N_G(\langle a\rangle)\trianglelefteq G$，容易知道此时 G 可解。如果 $r=3$，则 G 中存在一个 14 阶元素 b，使得$|G:N_G(\langle b\rangle)|=4$，从而$|G|$整除 $2^{\alpha}\cdot3\cdot7$，其中 $\alpha\leqslant4$. 现在考虑 G 在 $N_G(\langle a\rangle)$的陪集上的置换表示。设其置换表示的核为 T，则 $G/T\leqslant S_3$，从而 T 是$\{2,7\}$-群，而且 G/T 是可解的，进而 G 亦可解。

如果 $r=7$。通过类似的推理有 G 的阶整除$2^{\alpha}\cdot3\cdot7^2$，其中$\alpha\leqslant4$。G 在 $N_G(\langle a\rangle)$上的陪集置换表示，易看到如果 G 不可解，则 G/T 同构于 PSL(2,7)或 Aut(PSL(2,7))，从而$|T|=7$ 或 14，表示 G 有一个阶为 7 的正规子群 H。G 作用在 H 上有，$G/C_G(H)\leqslant\mathrm{Aut}(H)\cong Z_6$，则 $C_G(H)$有一个截断同构于PSL(2,7)。设 x 是 $C_G(H)$的一个 4 阶元素，则$\langle x,H\rangle$中存在阶为 28 的元素，与 $k=14$ 矛盾。

3)若 $k=18$，有$|a|=k=18$，则 $C_G(a)$是$\{2,3\}$-群。假设$|C_G(a)|=2^{\alpha}\cdot3^{\beta}$，其中$(1\leqslant\alpha\leqslant3,2\leqslant\beta\leqslant3)$。若 $r=1$、2、3，由(1)式，则 G 是$\{2,3\}$-群，可解。若 $r=7$，则 G 中存在指数为 7 的极大 Hall-子群。因而 G 的任何一个阶被 7 整除的截断都有一个指数为 7 的 Hall-子群。故 G 不可能有一个截断与 PSL(2,8)同构。因此若 G 不可解，则 G 有一个截断同构于 PSL(2,7)。故 G 存在一个正规群列$H\trianglelefteq K\trianglelefteq G$，使 $K/H\cong\mathrm{PSL}(2,7)$，而且 3 整除$|H|$或者$|G/K|$。因为 Out(PSL(2,7))的阶是 2，如果 3 整除$|G/K|$，则存在阶为 3 的元素平凡的作用在 K/H 上，表明 G 存在阶为 21 的元素，矛盾。因此$|H|=9$，但这隐含了 G 有阶为 21 的元素，也与 $k=18$ 矛盾。　　证毕

根据引理 4 ~7，可得定理 1。由定理 1，可得下面的推论，即 Thompson 猜想成立的一个条件。

推论　设 G 和 M 是同阶型群，M 是有最高阶元素个数为 42 的有限群，则 G 可解。

参考文献

[1] 徐明曜. 有限群导引[M]. 北京：北京科学出版社，1999.

[2] 杨成. 最高阶元素个数不同的有限群[J]. 数学年刊，1993，14A(5)：561-576.

[3] 刘奉举. 最高阶元素个数为 8 的有限群[J]. 河北大学学报版(自然科学版)，1996，16(3)：57-59.

[4] 姜友谊. 最高阶元素个数小于 20 的有限群是可解群[J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，1998，23(4)：379-384.

[5] 姜友谊. 最高阶元素个数为 $2p^2$ 的有限群是可解群[J]. 数学年刊，2000，21(A)(1)：61-64.

[6] 杨成. $\pi_e(G)=\{1,2,3,5,6\}$的有限群[J]. 工程数学学报，2000，17(4)：105-108.

[7] 姜友谊. 最高阶元素个数为 32 的有限群是可解群[J]. 河北大学学报版(自然科学版)，1999，19(3)：215-219.

[8] 姜友谊，杜祥林. 最高阶元素个数为 $2p^3$ 的有限群是可解群[J]. 四川大学学报(自然科学版)，2003，40(2)：185-189.

[9] 韩章家，陈贵云. 最高阶元素个数为 $2pq$ 的有限群可解[J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2004，29(2)：198-200.

[10] 何承春，陈贵云，韩章家. 极大幂零子群的阶为素数幂的有限群[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版)，2004，21(1)：17-19.

[11] BRANDL，SHI Wujie. Finite Groups Whose Elements Order are Consecutive Integers[J]. J Alg，1991，143(2)：388-400.

(责任编辑　黄　颖)