# 向量损失函数下均值向量线性估计的可容许性*

李　璐[1]，刘万荣[2]
(1. 上海浦光中学，上海 200002；2. 湖南师范大学 数学与计算机科学学院数学系，长沙 410081)

**摘　要**：在向量损失函数下，讨论了模型 $(H)\begin{cases}EY=X\beta\\ \mathrm{Cov}Y=X\mathrm{diag}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)X'\end{cases}$ 中估计均值向量时，齐次线性估计在 $\mathscr{L}_1=\{LY:\ L$ 为元素均为非负的 $k\times n$ 矩阵$\}$ 中的容许性，及非齐次线性估计在 $\mathscr{L}_2=\{LY+C:L$ 为元素均非负的 $k\times n$ 矩阵，$C$ 为 $k$ 维元素均严格非负的列向量$\}$ 中的容许性，并获得了相应的充要条件。

**关键词**：向量损失函数；线性估计；可容许性
**中图分类号**：O212.1　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1672-6693(2005)03-0066-04

## Admissibility of a Linear Estimator of the Mean Parameter Under Vector Loss Function

*LI Lu*[1]，*LIU Wan-rong*[2]
(1. Puguang School of Shanghai, Shanghai 200002; 2. Dept. of Mathematics, Mathematics and Computer Science College, Hunan Normal University, Changsha 410081, China)

**Abstract**: Under the vector loss function, the paper discusses the admissibility of the mean paiameter in the special model $(H)\begin{cases}EY=X\beta\\ \mathrm{Cov}Y=X\mathrm{diag}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)X'\end{cases}$ the admissibility of homogeneous linear estimators in $\mathscr{L}_1=\{LY:\ L$ is the $k\times n$ matrix of the element not defeated by$\}$, and nonhomogeneous linear estimators in $\mathscr{L}_2=\{LY+C:L$ is the $k\times n$ matrix of the element not defeated by, $C$ is $k$ links the strict row vector quantity not defeated by of element$\}$. It gets several necessary and sufficient conditions.

**Key words**: vector loss function; linear estimator; admissibility

参数估计的容许性问题一直以来都倍受关注，二次损失函数和矩阵损失函数是研究容许性常用的损失函数，文献[1]、[2]中对线性模型中的参数估计在这两种损失函数下的可容许性进行了系统的研究和总结。文献[3]提出向量损失函数后，在向量损失函数下研究线性估计的可容许性引起了统计学者的兴趣，文献[3～6]在向量损失函数下对部分统计模型参数估计的可容许性进行了研究。文献[7]在矩阵损失函数下，对更广泛的模型中的均值向量的线性估计的可容许性进行了研究。本文在向量损失函数下，对文献[7]中提出的模型中的均值向量的线性估计的可容许性进行讨论，得出了几个估计量可容许的条件，推广了文献[3]的结论。

## 1　基本定义及引理

**定义 1**　记 $d=(d_1,d_2,\cdots,d_n)'$，$g(\theta)=(g_1(\theta),g_2(\theta),\cdots,g_n(\theta))'$，用 $d$ 估计 $g(\theta)$ 时，向量损失函数为

$$L(d,g(\theta))=((d_1-g_1(\theta))^2,(d_2-g_2(\theta))^2,\cdots,(d_n-g_n(\theta))^2)' \tag{1}$$

**定义 2**　设 $d(y)\in\mathscr{L}$($\mathscr{L}$ 为给定的估计类)，$d(y)$ 在损失函数(1)式下的风险函数为

$$R(d;g(\theta))=(E(d_1-g_1(\theta))^2,E(d_2-g_2(\theta))^2,\cdots,E(d_n-g_n(\theta))^2)'=(R_1(d;g(\theta)),R_2(d;g(\theta)),\cdots,R_n(d;g(\theta)))'$$

**定义 3**　在损失函数(1)式下，如果对任意的 $\theta$，都有 $R_i(\tilde{d};g(\theta))\leqslant R_i(d;g(\theta))$，$i=1、2、\cdots、n$，且对某个 $i_0$ 及 $\theta_0$ 等号不成立，则称 $\tilde{d}(y)$ 优于 $d(y)$；如果不存在 $\tilde{d}(y)\in\mathscr{L}$，使得 $\tilde{d}(y)$ 优于 $d(y)$，就称 $d(y)$ 是 $g(\theta)$

* 收稿日期：2005-02-28
资助项目：高校博士点专项科研基金(NO. 20040542006)
作者简介：李璐(1979-)，女，湖南湘潭人，硕士，主要研究方向为数理统计。

在 $\mathscr{L}$ 中的容许估计,且记为 $d(y)\underset{\sim}{\mathscr{L}}g(\theta)$。当 $d(y)$ 是 $g(\theta)$ 在一切估计类中的容许估计时,记为 $d(y)\sim g(\theta)$。

文献[7]中提出了如下模型,设 $Y=(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)'$ 相互独立,满足 $\begin{cases}EY=X\beta\\ \mathrm{Cov}Y=X\mathrm{diag}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)X'\end{cases}$,其中 $X$ 是已知的元素非负且对角线元素为正的 $n$ 阶满秩矩阵,$\beta=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)'$,$\beta_i>0$,$i=1、2、\cdots、n$ 为未知参数,将此特定模型记为模型($H$)。该模型在实际的问题中应用广泛。例如,在模型中取 $X=I_n$(单位矩阵),就得到 Poisson 分布模型;在模型中取 $X=\mathrm{diag}(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n)$,$\theta_i>0(i=1、2、\cdots、n)$ 为已知,就得到一个 $\Gamma$-分布模型。文献[8~10]在常用损失函数下分别研究了 Poisson 分布,$\Gamma$-分布中参数的可容许问题。

同时,文献[7]中还考虑了 $S\beta$ 的线性估计在以下估计类中的可容许性,这里 $S$ 是 $k\times n$ 实矩阵,$\mathscr{L}_1=\{LY$: $L$ 为元素均为非负的$k\times n$ 矩阵$\}$,$\mathscr{L}_2=\{LY+C$: $L$ 为元素均非负的 $k\times n$ 矩阵,$C$ 为 $k$ 维元素均严格非负的列向量$\}$。

记
$$\Lambda_1=\{l'Y:\ l=(l_1,l_2,\cdots,l_n)',l_i\geqslant0,i=1、2、\cdots、n\}$$
$$\Lambda_2=\{l'Y+c:\ l=(l_1,l_2,\cdots,l_n)',l_i\geqslant0,i=1、2、\cdots、n,c>0\}$$
$$d(y)=(d_1(y),d_2(y),\cdots,d_k(y))',g(\theta)=(g_1(\theta),g_2(\theta),\cdots,g_k(\theta))'$$

**引理1** 在损失函数(1)式下,用 $d(y)$ 估计 $g(\theta)$,则

1) $d(y)$ 是 $g(\theta)$ 在 $\mathscr{L}_1$ 中的容许估计当且仅当在平方损失函数 $(d_i-g_i(\theta))^2$ 下,$d_i(y)$ 是 $g_i(\theta)$ 在 $\Lambda_1$ 中的容许估计,$i=1、2、\cdots、k$;

2) $d(y)$ 是 $g(\theta)$ 在 $\mathscr{L}_2$ 中的容许估计当且仅当在平方损失函数 $(d_i-g_i(\theta))^2$ 下,$d_i(y)$ 是 $g_i(\theta)$ 在 $\Lambda_2$ 中的容许估计,$i=1、2、\cdots、k$。

## 2 主要结果和证明

本文在向量损失函数下,考虑了模型($H$)中齐次线性估计在 $\mathscr{L}_1$ 中的容许性和非齐次线性估计在 $\mathscr{L}_2$ 中的容许性,并获得了相应的充要条件。记模型($H$)中 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$,其中 $X_i$ 为矩阵 $X$ 的第 $i$ 个列向量。

### 2.1 齐次线性估计的可容许性

**引理2** 设 $l'Y,\tilde{l}'Y\in\Lambda_1$,估计 $s'\beta$,则在平方损失 $(l'Y-s'\beta)^2$ 下,$\tilde{l}'Y$ 优于 $l'Y$ 的充要条件是
$$\begin{cases}X_i'\tilde{l}\leqslant X_i'l,i=1、2、\cdots、n\\ \beta'(X'\tilde{l}-s)(X'\tilde{l}-s)'\beta\leqslant\beta'(X'l-s)(X'l-s)'\beta\end{cases}$$
且至少对某个 $i_0$ 及 $\beta_0$ 等号不成立,其中 $l,\tilde{l},s$ 均为 $n$ 维列向量。

**证明** 由 $R(l;\beta)=E(l'Y-s'\beta)^2=l'X\mathrm{diag}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)X'l+\beta'(X'l-s)(X'l-s)'\beta$,可知 $\tilde{l}'Y$ 优于 $\tilde{l}Y$,即 $R(\tilde{l}'Y,s'\beta)\leqslant R(l'Y,s'\beta)$,$\forall\beta$,且等号不恒成立。也即是等价于
$$\begin{cases}\tilde{l}'X\mathrm{diag}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)X'\tilde{l}\leqslant l'X\mathrm{diag}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)X'l & (2)\\ \beta'(X'\tilde{l}-s)(X'\tilde{l}-s)'\beta\leqslant\beta'(X'l-s)(X'l-s)'\beta & (3)\end{cases}$$
且至少对某个 $\beta^*$ 等号不成立。对此等价式的证明如下。

1) 必要性。显然。

2) 充分性。假设 $\tilde{l}'Y$ 优于 $l'Y$,若(2)式不成立,则存在某个 $\beta^{(0)}=(\beta_1^{(0)},\beta_2^{(0)},\cdots,\beta_n^{(0)})'\in\mathbf{R}_n^+$,使
$$\tilde{l}'X\mathrm{diag}(\beta_1^{(0)},\beta_2^{(0)},\cdots,\beta_n^{(0)})X'\tilde{l}>l'X\mathrm{diag}(\beta_1^{(0)},\beta_2^{(0)},\cdots,\beta_n^{(0)})X'l$$
取适当小正数 $\varepsilon$,令 $\tilde{\beta}=\varepsilon\beta^{(0)}$,则有 $R(\tilde{l}'Y,s'\tilde{\beta})>R(l'Y,s'\tilde{\beta})$,与假设相矛盾,若(3)式不成立,则存在某个 $\beta^{(1)}=(\beta_1^{(1)},\beta_2^{(1)},\cdots,\beta_n^{(1)})'\in\mathbf{R}_n^+$,使得 $\beta^{(1)}{}'(X'\tilde{l}-s)(X'\tilde{l}-s)'\beta^{(1)}>\beta^{(1)}{}'(X'l-s)(X'l-s)'\beta^{(1)}$,取适当大正数 $\delta$,令 $\bar{\beta}=\delta\beta^{(1)}$,则有 $R(\tilde{l}'Y,s'\bar{\beta})>R(l'Y,s'\bar{\beta})$ 与假设相矛盾。又有(2)式成立等价于 $\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i\tilde{l}'X_iX_i'\tilde{l}\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_il'X_iX_i'l$,$\forall\beta$。上式即为 $\tilde{l}'X_iX_i'\tilde{l}\leqslant l'X_iX_i'l$,$\forall i$,又由于 $X_i'\tilde{l}\geqslant0$,$X_i'l\geqslant0$,所以有 $X_i'\tilde{l}\leqslant X_i'l'$,$\forall i$。因此 $\tilde{l}'Y$ 优于 $l'Y$ 等价于 $\begin{cases}X_i\tilde{l}\leqslant X_i'l,i=1、2、\cdots、n\\ \beta'(X\tilde{l}-s)(X'\tilde{l}-s)'\beta\leqslant\beta'(X'l-s)(X'l-s)'\beta\end{cases}$,且至少对某个 $i_0$ 及 $\beta_0$ 等号不成立。 证毕

**引理3** 设 $l'Y=(l_1,l_2,\cdots,l_n)Y\in\Lambda_1$,估计 $s'\beta$,这里 $s$ 为 $n$ 维列向量。则在平方损失函数下,若 $X_i'l\geqslant s_i$,$i=1、2、\cdots、n$,且至少有一个 $i$ 使不等号成立,则 $l'Y$ 非容许。

**证明** 选取 $\tilde{l}'=s'X^{-1}$,此时必有 $X_i'\tilde{l}\leqslant X_i'l$,$i=1、2、\cdots、n$,且至少对一个 $i$ 等号不成立;

$0=\beta'(X'\tilde{l}-s)(X'\tilde{l}-s)'\beta\leqslant\beta'(X'l-s)(X'l-s)'\beta$,对一切 $\beta\in(\mathbf{R}^+)^n$ 成立。因此,$\tilde{l}'Y$ 优于 $l'Y$,即 $l'Y$ 非容许。　证毕

**引理 4**　设 $l'Y=(l_1,l_2,\cdots,l_n)Y\in\Lambda_1$,估计 $s'\beta$,这里 $s$ 为 $n$ 维列向量。则在平方损失函数下,若 $X'l=s$,则 $l'Y$ 容许。

**证明**　反设 $l'Y$ 非容许,则存在 $\tilde{l}'Y\in\Lambda_1$ 优于 $l'Y$,即有

$$\beta'(X'\tilde{l}-s)(X'\tilde{l}-s)'\beta\leqslant\beta'(X'l-s)(X'l-s)'\beta=0$$

对一切 $\beta\in(\mathbf{R}^+)^n$ 成立。此时 $X'\tilde{l}=s=X'l$,即有 $\tilde{l}=l$,矛盾。因此 $l'Y$ 容许。　证毕

**引理 5**　设 $l'Y=(l_1,l_2,\cdots,l_n)Y\in\Lambda_1$,估计 $s'\beta$,$s=(s_1,s_2,\cdots,s_n)'$,在平方损失函数下,若 $X'l\neq s$,且存在 $i_0$ 使 $X_{i_0}'l<s_{i_0}$成立,则 $l'Y$ 容许。

**证明**　反设 $l'Y$ 非容许,则存在 $\tilde{l}'Y\in\Lambda_1$ 优于 $l'Y$,由引理 3 知

$$X_i'\tilde{l}\leqslant X_i'l,i=1、2、\cdots、n \tag{4}$$

$$\beta(X'\tilde{l}-s)(X'\tilde{l}-s)'\beta\leqslant\beta'(X'l-s)(X'l-s)'\beta,\text{对一切}\beta\in(\mathbf{R}^+)^n\text{ 成立} \tag{5}$$

不妨设 $i_0=1$ 有 $X'_1<s_1$ 成立,则由(4)式可知 $l'X_1<s_1$,固定 $\beta_1$,令 $\beta_i\to0,i=2、3、\cdots、n$,则由(5)式可得 $(X_1'\tilde{l}-s_1)^2\beta_1^2\leqslant(X_1'l-s_1)^2\beta_1^2$,即 $(X_1'\tilde{l}-s_1)^2\leqslant(X_1'l-s_1)^2$,由 $X_1'\tilde{l}\leqslant X_1'l\leqslant s_1$ 可知,只有 $X_1'l=X_1'\tilde{l}$ 时,上式才能成立。设

$$\Psi=\begin{pmatrix}0 & (X_1'l-s_1)(X_2'l-X_2'\tilde{l}) & \cdots & (X_1'\tilde{l}-s_1)(X_n'l-X_n'C)\\ (X_1'l-s_1)(X_2'l-X_2'\tilde{l}) & (X_2'l-s_2)^2-(X_2'\tilde{l}-s_2)^2 & \cdots & \begin{matrix}(X_2'l-s_2)(X_n'l-s_n)-\\(X_2'\tilde{l}-s_2)(X_n'\tilde{l}-s_2)(X_n'\tilde{l}-s_n)\end{matrix}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ (X_1'l-s_1)(X_n'l-X_n'\tilde{l}) & (X_2'l-s_2)(X_n'l-s_n)-(X_2'\tilde{l}-s_2)(X_n'\tilde{l}-s_2) & \cdots & (X_n'l-s_n)^2-(X_n'\tilde{l}-s_n)^2\end{pmatrix}$$

此时(5)式变为 $\beta'\Psi\beta\geqslant0$,对一切 $\beta\in(\mathbf{R}^+)^n$ 成立。则必有 $X_i'l\leqslant X_i'\tilde{l},i=2、3、\cdots、n$,因为若存在某个 $i_1$ 不成立,不妨设 $i_1=2$,即 $X_2'l\leqslant X_2'\tilde{l}$。固定 $\beta_1,\beta_2$,令 $\beta_i\to0,i=3、4、\cdots、n$,则(5)式变为

$$(\beta_1\quad\beta_2)\begin{pmatrix}0 & (X_1'l-s_1)(X_2'l-X_2'\tilde{l})\\ (X_1'l-s_1)(X_2'l-X_2'\tilde{l}) & (X_2'l-s_2)^2-(X_2'\tilde{l}-s_2)^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}\geqslant0$$

即

$$\beta_2^2((X_2'l-s_2)^2-(X_2'\tilde{l}-s_2)^2)+2\beta_1\beta_2(X_1'l-s_1)(X_2'l-X_2'\tilde{l})\geqslant0$$

由于 $\beta_1,\beta_2\in\mathbf{R}^+$,故有 $(X_1'l-s_1)(X_2'l-X_2'\tilde{l})\geqslant0$,即 $X_2'l\leqslant X_2'\tilde{l}$,这与假设相矛盾。综上所述,知 $X_i'l=X_i'\tilde{l},i=1、2、\cdots、n$,即 $X'l=X'\tilde{l}$,则 $l=\tilde{l}$,于是有 $l'Y=\tilde{l}'Y$,$l'Y$ 容许。　证毕

由上面的引理可得如下结论。

**定理 1**　设 $l'Y=(l_1,l_2,\cdots,l_n)Y\in\Lambda_1$,估计 $s'\beta$,$s=(s_1,s_2,\cdots,s_n)'$,则 $l'Y$ 在平方损失函数下是 $s'\beta$ 在 $\Lambda_1$ 中的容许估计的充要条件是:1) $X'l=s$;或 2) $X'l\neq s$,但存在某个 $i_0$,使得 $X_{i_0}'l<s_{i_0}$成立。

**定理 2**　设 $L'Y=(l_1,l_2,\cdots,l_k)'Y\in\mathscr{L}_1$,估计 $S\beta$,$S=(s_1,s_2,\cdots,s_k)'$,其中 $L,S$ 为元素均非负的 $k\times n$ 阶矩阵,$l_i,s_i,i=1、2、\cdots、k$ 分别为 $L,S$ 的第 $i$ 行元素构成的列向量。则 $LY$ 在向量损失函数下是 $S\beta$ 在 $\mathscr{L}_1$ 中的容许估计的充要条件是:1) $X'l_i=s_i$;或 2) $X'l_i\neq s_i$,但存在某个 $i_o$,使得 $X'_{i_0}l_i<s_{ii_0}$成立($s_{ii_0}$为 $s_i$ 的第 $i_0$ 个分量元素。对一切 $i$ 均成立,$i=1、2、\cdots、k$)。

**证明**　由引理 1 知,$LY$ 在向量损失函数下是 $S\beta$ 在 $\mathscr{L}_1$ 中的容许估计问题,可以转化为 $k$ 个线性函数在平方损失函数下在 $\Lambda_1$ 中的容许估计问题。再由定理 1 可知结论成立。　证毕

在模型($H$)中取 $X=I_n$ 时($I_n$ 表示 $n\times n$ 阶单位矩阵),得到 Poisson 分布均值齐次线性估计可容许的充要条件,与文献[3]中定理 2.2 相同。

### 2.2　非齐次线性估计的容许性

$l'Y+c$ 在 $\Lambda_2=\{l'Y+c:\ l=(l_1,l_2,\cdots,l_n)',l_i\geqslant0,i=1、2、\cdots、n,c>0\}$ 中,估计 $s'\beta$,其中 $s=(s_1,s_2,\cdots,s_n)'$为 $n$ 维列向量,则在平方损失下,有

$$R(l,c;\beta)=E(l'Y+c-s'\beta)^2=E(l'Y-l'X\beta+c-s'\beta)^2=$$

$$l'X\mathrm{diag}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)X'l+((l'X-s')\beta+c)^2=\beta\begin{pmatrix}(l'X_1)^2\\(l'X_2)^2\\ \vdots\\(l'X_n)^2\end{pmatrix}+((l'X-s')\beta+c)^2 \tag{7}$$

**引理 6** 在平方损失函数下,$l'Y+c$ 在 $\Lambda_2$ 中是 $s'\beta$ 的容许估计充要条件是:$l'Y$ 在 $\Lambda_1$ 中是 $s'\beta$ 的容许估计。

**证明** 必要性。假设 $l'Y+c$ 在 $\Lambda_2$ 中是 $s'\beta$ 的容许估计。若 $l'Y$ 非容许,由定理 1 可知 $X_i'l \geqslant s_i$,$i=1$、2、…、$n$ 且至少有一个 $i$ 使不等号成立。取 $X'l=s$,有$((l'X-s')\beta+c)^2>c^2$ 且 $X_i'l \geqslant s_i = X_i'\tilde{l}$,由(7)式及引理 2 得到 $\tilde{l}'Y+c$ 优于 $l'Y+c$,即 $l'Y+c$ 非容许。与假设相矛盾。

充分性。假设 $l'Y$ 在 $\Lambda_1$ 中是 $s'\beta$ 的容许估计。若定理 1 中条件 1)成立,则由 $c>0$、(7)式及引理 2,知 $s'X^{-1}Y+c$ 容许;若定理 1 中条件 2)成立,如果 $l'Y+c$ 非容许,则存在 $\tilde{l}'Y+b$ 优于 $l'Y+b$。即有

$$\beta'\begin{pmatrix}(\tilde{l}'X_1)^2\\(\tilde{l}'X_2)^2\\\vdots\\(\tilde{l}'X_n)^2\end{pmatrix} \leqslant \beta'\begin{pmatrix}(\tilde{l}'X_1)^2\\(\tilde{l}'X_2)^2\\\vdots\\(\tilde{l}'X_n)^2\end{pmatrix}+((\tilde{l}'X-s')\beta+b)^2 \leqslant \beta'\begin{pmatrix}(l'X_1)^2\\(l'X_2)^2\\\vdots\\(l'X_n)^2\end{pmatrix}+((l'X-s')\beta+c)^2 \tag{8}$$

对一切 $\beta \in (\mathbf{R}^+)^n$ 成立。

因为 $l'Y$ 在 $\Lambda_1$ 中容许,则不妨设 $X_1'l<s_1$,则存在 $\beta_0 \in (\mathbf{R}^+)^n$,使得$(l'X-s)\beta_0+c=0$。取 $\beta_0$ 第一个分量元素为$\frac{-c}{l'X_1-s_1}$,其它分量元素趋向零。于是有$\frac{-c}{l'X_1-s_1}\cdot(\tilde{l}'X_1)^2 \leqslant \frac{-c}{l'X_1-s_1}\cdot(l'X_1)^2$,即 $\tilde{l}'X_1 \leqslant l'X_1$。根据引理 2 及(8)式知,必有$((\tilde{l}'X-s')\beta)^2 \leqslant ((l'X-s')\beta)^2$,又有 $X'_1l<s_1$,固定 $\beta_1$,令 $\beta_i \to 0$,$i=2$、3、…、$n$,有$(X_1'\tilde{l}-s_1)^2 \leqslant (X_1'l-s_1)^2$ 成立,即 $X_1'\tilde{l} \geqslant X_1'l$,于是 $X_1'\tilde{l}=X_1'l$。仿照引理 5 的证明,可以得到 $X_i'\tilde{l} \geqslant X_i'l$,$i=2$、3、…、$n$。如果对于 $i>2$ 有 $X_i'l>s_i$,不妨设 $i=2$,固定 $\beta_2$,令 $\beta_i \to 0$,$i=1$、3、4、…、$n$,结合$((\tilde{l}'X-s')\beta)^2 \leqslant ((l'X-s')\beta)^2$,有$(X_2'\tilde{l}-s_2)^2 \leqslant (X_2'l-s_2)^2$,因为 $X_2'\tilde{l} \geqslant X_2'l>s_2$,所以 $X_2'\tilde{l}=X_2'l$。

可知定理 1 的条件 2)成立时,有 $X'\tilde{l}=X'l$,即 $\tilde{l}=l$,将此式代入(8)式,可得$((\tilde{l}'X-s')\beta+b)^2 \leqslant ((l'X-s')\beta+c)^2$ 对一切 $\beta \in (\mathbf{R}^+)^n$ 成立。

取 $\beta_0$ 第一个分量元素为$\frac{-c}{l'X_1-s_1}$,其它分量元素为零。于是有$\left((X_1'l-s_1)\frac{-c}{l'X_1-s_1}+b\right)^2 \leqslant 0$ 等价于 $c=b$,即 $\tilde{l}'Y+b=l'Y+c$。所以条件 2)成立时,$\tilde{l}'Y$ 在 $\Lambda_1$ 中是 $s'\beta$ 的容许估计必有 $l'Y+c$ 在 $\Lambda_2$ 中是 $s'\beta$ 的容许估计。 证毕

可结合引理 1 及引理 6 得出下述定理。

**定理 3** 设 $LY+C \in \mathscr{L}_2$,估计 $S\beta$,其中 $L,S$ 为 $k\times n$ 阶矩阵,则 $LY+C$ 在向量损失函数下是 $S\beta$ 在 $\mathscr{L}_2$ 中的容许估计的充要条件是:$LY$ 在向量损失函数下是 $S\beta$ 在 $\mathscr{L}_1$ 中的容许估计。

在模型$(H)$中取 $X=I_n$ 时($I_n$ 表示 $n\times n$ 阶单位矩阵),得到 Poisson 分布均值的非齐次线性估计可容许的充要条件,与文献[3]中的定理 3.1 相同。

**参考文献:**


[1] RAO C R. Estimation of Parameters in a Linear Mode[J]. Ann Statist,1976(4):1023-1037.
[2] 陈希孺. 线性模型参数的估计理论[M]. 北京:科学出版社,1985.
[3] 赵建昕. 向量损失函数下 Poisson 参数估计的线性容许性[J]. 青岛大学学报,1999,12(1):18-23.
[4] 赵建昕. 向量损失函数下一般期望向量线性估计的可容许性[J]. 青岛大学学报,1999,12(3):23-27.
[5] 赵建昕. 向量损失函数下参数估计的容许性[J]. 应用概率统计,2002,18(2):134-140.
[6] 赵建昕. 张立振,于尚易. 向量损失函数下 2 个尺度参数估计的线性容许性[J]. 青岛大学学报,2003,33(6):983-988.
[7] 钟学军. 矩阵损失下均值向量的线性可容许估计[J]. 数学年刊,1997(6):719-724.
[8] BROWN L D,FARREL R H. All Admissible Linear Estimators of a Multivariate Poisson Mean[J]. Ann Statist,1985,13(1):282-294.
[9] BROWN L D,FARREL R H. Complete Class Theorems for Estimation of Multivariate Poisson Mean and Related Problems Multivariate Poisson Mean[J]. Ann Statist,1985,13(3):706-726.
[10] FARREL R H,KLONECKI W,ZONTEK S. All Admissible Linear Estimators of the Vector of Gamma Scale Parameters with Application to Random Effects Models[J]. Ann Statist,1989,17:268-281.


(责任编辑 黄 颖)