古典概型中随机事件相互独立性与素数的关系*

王毅刚
(华南师范大学 数学科学学院概率统计系, 广州 510631)

摘　要:本文在古典概型和概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$[1]上, 讨论随机事件相互独立与素数的关系。利用古典概型概率计算方法,证明概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$恰有n个相互独立的随机事件的充要条件是样本空间Ω的样本点个数可以分解成n个素数的乘积。

关键词:概率空间;概率;样本空间;σ-代数;随机事件;相互独立性;素数
中图分类号:O211.1　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2005)03-0070-02

The Relationship Between Independent Random Events and Prime Numbers in Classic Probability Model

WANG Yi-gang
(College of Mathematics Science, South China Normal University, Guangzhou 510631, China)

Abstract: On the basis of classic probability model and probability space$(\Omega,\mathscr{F},P)$, this thesis discusses the relationship between independent random events and prime numbers. We have proved that probability space $(\Omega,\mathscr{F},P)$ just has n independent random events only if the element number in sample space Ω may be resolved into the product of n prime numbers, by means of probability calculate method of classic probability model.

Key words: probability space; probability; sample space; σ-algebra; random event; indeptndent; prime number

定义 1　若A是一个集合,其元素个数为n,记$\#A=n$。

定义 2　$(\Omega,\mathscr{F},P)$是一个概率空间,其中$\#\Omega=m$,$\mathscr{F}=\{A\mid A\subset\Omega\}$,称$\mathscr{F}$的任一元素$A$为事件,也称$A$为$\sigma$-代数$\mathscr{F}$中的事件,$\#A=n$,$P(A)=\frac{n}{m}$。称$\Omega$为样本空间,$\mathscr{F}$是事件域。

显然定义 2 是一个古典概型。

本文均在古典概型和概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上讨论,样本空间元素个数均为有限,且样本空间元素个数不小于 1。

定义 3　若A和B均是σ-代数$\mathscr{F}$中的事件,且$P(AB)=P(A)P(B)$,称A和B是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上相互独立的事件,或简称A和B相互独立,否则称A和B不相互独立。

定义 4　若A是σ-代数$\mathscr{F}$中的事件,且$A\neq\emptyset$,$A\neq\Omega$,称A为随机事件。

引理 1　相互独立的两个随机事件的交积非空。

证明　设A和B是相互独立的随机事件,用反证法,若$AB=\emptyset$,则$P(AB)=0$,因为$P(A)>0$,$P(B)>0$,所以$P(A)P(B)>0$,从而$P(A)P(B)>P(AB)$,于是A和B不相互独立,这与A和B相互独立的假设矛盾。　证毕

定理 1　若概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上存在 2 个相互独立的随机事件A和B,设$\#\Omega=m$,$\#A=m_1$和$\#B=m_2$,m_1和m_2的素数分解式分别为$p_1p_2\cdots p_s$[2]和$q_1q_2\cdots q_t$,则$p_1p_2\cdots p_s$和$q_1q_2\cdots q_t$中必有p_i和q_j,使p_i和q_j整除m,其中$1\leqslant i\leqslant s$,$1\leqslant j\leqslant t$。

证明　设$\#AB=r$,由引理 1 知$AB\neq\emptyset$

则
$$1\leqslant r\leqslant\min\{m_1,m_2\}$$
由A和B是随机事件有$m_k<m$,$k=1、2$

因为

* 收稿日期:2005-01-21　修回日期:2005-04-05
作者简介:王毅刚(1964-),男,江苏苏州人,讲师,硕士,主要研究方向为应用统计。

$$P(AB)=\frac{r}{m},P(A)=\frac{m_1}{m},P(B)=\frac{m_2}{m}$$

又因为 $P(AB)=P(A)P(B)$，所以$\frac{r}{m}=\frac{m_1}{m}\frac{m_2}{m}$，$m=\frac{m_1m_2}{r}$，从而 $r<\min\{m_1,m_2\}$

$$mr=p_1p_2\cdots p_sq_1q_2\cdots q_t$$

设 r 的素数分解式为 $r_1r_2\cdots r_u$，则

$$r_k\mid p_1p_2\cdots p_sq_1q_2\cdots q_t,k=1、2、\cdots、u$$

因为 r_k 为素数，$k=1、2、\cdots、u$，所以 r_k 等于 p_1，p_2，$\cdots$，p_s，q_1，q_2，$\cdots q_t$ 中的一个，$k=1、2、\cdots、u$。

因为 $r<\min\{m_1,m_2\}$，所以 m_1 和 m_2 不可能整除 r，从而 $p_1p_2\cdots p_s$ 和 $q_1q_2\cdots q_t$ 中必有 p_i 和 q_j，使 p_i 和 q_j 整除 m，其中 $1\leqslant i\leqslant s$，$1\leqslant j\leqslant t$。 证毕

定理2 设$\#\Omega=m$，n 为不小于2的自然数，则概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$存在 n 个相互独立的随机事件的充要条件是 m 可以分解成 n 个大于1的自然数的乘积。

证明 必要性。由 n 为不小于2的自然数，设随机事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，设$\#A_k=r_k$，$k=1、2、\cdots、n$，由定理1，r_k 中必有素数 p_k 整除 m，$k=1、\cdots、n$，从而 $p_1p_2\cdots p_n\mid m$，于是 m 可以分解成 n 个大于1的自然数的乘积。

充分性。设 $m=p_1p_2\cdots p_n$，$1<p_k<m$，p_k 为自然数，$k=1、\cdots、n$。设

$\Omega=\{a_{i_1i_2\cdots i_n}\mid i_j=1、2、\cdots、p_j,j=1、2、\cdots、n\}$

因为 $A_k=\{a_{i_1i_2\cdots i_{k-1}1i_{k+1}\cdots i_n}\mid i_j=1、2、\cdots、p_j,j\neq k,j=1、2、\cdots、n\}$，$k=1、2、\cdots、n$，所以 A_k 为随机事件，$k=1、2、\cdots、n$，计算可得 $P(A_k)=\frac{1}{p_k}$，因为对任意 $s\in\{2,3,\cdots,n\}$，任意 $r_k\in\{1,2,3,\cdots,n\}$，$k=1、2、\cdots、s$，$r_1<r_2<\cdots<r_s$，$P(A_{r_1}A_{r_2}\cdots A_{r_s})=\frac{1}{p_{r_1}p_{r_2}\cdots p_{r_s}}=P(A_{r_1})P(A_{r_2})\cdots P(A_{r_s})$

所以随机事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立。 证毕

定理3 设$\#\Omega=m$，n 为不小于2的自然数，则概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$恰有 n 个相互独立的随机事件的充要条件是 m 可以分解成 n 个素数的乘积。

证明 必要性。n 为不小于2的自然数，由定理2，m 可分成 n 个数的乘积，设这 n 个数为 $p_1,p_2,\cdots,p_n$，若 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 中有非素数 p_j，则 $p_j=pq$，p 和 q 为大于1自然数，从而 m 可以分解成 $n+1$ 个大于1的自然数的乘积，由定理2，则概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$存在 $n+1$ 个相互独立的随机事件[3]，这与概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$恰有 n 个相互独立的随机事件矛盾。

充分性。用反证法，n 为不小于2的自然数，由定理2，则概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$存在 n 个相互独立的随机事件，若存在 s 个相互独立的随机事件，且 $s>n$，由定理2，m 可以分解成 s 个大于1的自然数的乘积，从而 m 可以分解成大于 n 个素数的乘积，由自然数分解成素数的乘积是唯一的，这与 m 可以分解成 n 个素数的乘积矛盾。所以概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$恰有 n 个相互独立的随机事件。 证毕

定理4 设$\#\Omega=m$，则概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$不存在两个相互独立的随机事件的充要条件是 m 为素数。

证明 必要性。用反证法，若 m 不是素数，则存在大于1的自然数 p 和 q，使 $m=pq$，由定理2，概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$存在两个相互独立的随机事件，这与概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$不存在两个相互独立的随机事件矛盾。

充分性。若概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$存在两个相互独立的随机事件，由定理2，则 m 不是素数，这与 m 是素数矛盾。 证毕

参考文献：

[1] 魏宗舒. 概率论与数理统计教程[M]. 北京：高等教育出版社，1983.

[2] 孙本旺译. 数学分析[M]. 湖南：湖南人民出版社，1981.

[3] 高世泽. 关于不尽相异元素排列概率问题的注记[J]. 重庆师范学院学报(自然科学版)，1995，12(1)：30-32.

(责任编辑 游中胜)

Φ-强单调半连续映象的 Browder 变分不等式解的 Ishikawa 迭代算法*

罗春林，姚益民
(康定民族师范专科学校 数学系，四川 626001)

摘　要：在 Hilbert 空间 H 中，在 T：$H\to H$ 有界，Φ-强单调和半连续条件下，利用次微分 $\partial\varphi$ 算子的性质，将求变分不等式 $\langle Tu\text{-}f, y-u\rangle\geqslant\varphi(u)-\varphi(y)$，$\forall y\in X$ 的解转化成求集值 Φ-强伪压缩映象的不动点，得到 Browder 变分不等式 $\langle Tu-f, y-u\rangle\geqslant\varphi(u)-\varphi(y)$，$\forall y\in H$ 的带有误差的 Ishikawa 迭代算法，在适当假设下证明了该迭代算法强收敛于不等式的唯一解。本文结果改进和推广了文献中部分已知的结果。

关键词：Hilbert 空间；Φ-强单调；Φ-强伪压缩；Ishikawa 迭代算法；半连续；Browder 变分不等式
中图分类号：O177.91　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1672-6693(2005)03-0072-04

The Ishikawa Iterative Algorithms to Solutions of Browder Variational Inequalities with Φ-Strongly Monotone and Semicontinuous Mapping

LUO Chun-lin, *YAO Yi-min*
(Department of Mathematics, Kangding Nationals Teachers College, Kangding Sichuan 626001, China)

Abstract: In Hilbert space H, we obtain the Ishikawa iterative algorithms with errors to solutions of Browder variational inequalities $\langle Tu-f, y-u\rangle\geqslant\varphi(u)-\varphi(y)$, $\forall y\in H$ with Φ-Strongly Monotone, bounded and Semi-continuous Mapping T: $H\to H$. The results of this paper improve and generalize many known results in the literature.

Key words: Hilbert space; Φ-strongly monotone; Φ-strongly pseudo contractive; Ishikawa iterative algorithms; demicontinuous; Browder variational inequalities

定理 1[1]　设 X 是可分自反 Banach 空间，设 T：$X\to X^*$ 是有界单调半连续映象，φ：$X\to(-\infty, +\infty]$ 是真凸下半连续泛函，设存在 $v_0\in X$ 满足条件

$$\frac{\langle Tv, v-v_0\rangle+\varphi(v)}{\|v\|}\to+\infty, v\in X, \|v\|\to\infty \tag{1}$$

则对给定的 $f\in X^*$，存在 $u\in X$ 满足变分不等式

$$\langle Tu-f, y-u\rangle\geqslant\varphi(u)-\varphi(y), \forall y\in X \tag{2}$$

称 T 有界是指对任意 $D\subseteq X$ 有界，则 T 的像 $T(D)$ 亦有界。显然，若 T 是 Lipshitz 连续的，则 T 必有界。

在 Hilbert 空间中，Noor、Zhang、周武、毕中胜在 T 强单调、Lipschitz 连续时，利用辅助变分原理或利用次微分 $\partial\varphi$ 的预解算子技巧，给出了求变分不等式(2)解的迭代算法[3~7]。

本文在 Hilbert 空间 H 中，在 T 是 Φ-强单调、有界、半连续条件下，利用次微分 $\partial\varphi$ 算子的性质，将求变分不等式(2)的解转化成求集值 Φ-强伪压缩映象的不动点，给出 Browder 变分不等式(2)的带有误差的 Ishikawa 迭代算法。该算法将文献[2~8]中要求算子 T：$H\to H$ 满足强单调和 Lipschitz 连续性条件分别降到 Φ-强单调、有界半连续，从而改进和推广了文献[2~8]等的相应结果。

* 收稿日期：2005-01-12
资助项目：四川省教委自然科学基金重点资助项目(NO. 2003407)
作者简介：罗春林(1965-)，男，四川广安人，副教授，主要研究方向为泛函分析。

1 预备知识

设 H 是实 Hilbert 空间,$\langle \cdot , \cdot \rangle$ 和 $\| \cdot \|$ 分别表示 H 的内积和范数。需要讨论的问题是,在 Hilbert 空间中,设映象 $T: H \to H$ 和泛函 $\varphi: H \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$,对任意的 $f \in H$,求 $u \in H$ 使

$$\langle Tu - f, y - u \rangle \geqslant \varphi(u) - \varphi(y), \forall y \in H \tag{3}$$

为了得到主要结果,需要下列概念和结果。

定义1 称集值映象 $A: H \to 2^H$ 是 Φ-强单调的,如果存在严格增加泛函 $\Phi: [0, \infty) \to [0, \infty)$,满足 $\Phi(0)=0$,Φ 严格增加,且 $\Phi(x) \to +\infty, x \to \infty$,使得对 $\forall x, y \in H, \forall f_1 \in A(x), \forall f_2 \in A(y)$ 满足

$$\langle f_1 - f_2, x - y \rangle \geqslant \Phi(\| x - y \|) \| x - y \|$$

则称集值映象 $S: H \to 2^H$ 是 Φ-强伪压缩的,如果 $I - S$ 是 Φ-强单调的,其中,I 为恒等映象。

当 A 是单值映象时,就得到单值映象的 Φ-强单调和 Φ-强伪压缩的定义。集值映象 $S: H \to 2^H$ 是 Φ-强伪压缩的当且仅当对 $\forall x, y \in H, \forall \zeta \in S(x), \forall \eta \in S(y)$ 满足 $\langle \zeta - \eta, x - y \rangle \leqslant \| x - y \|^2 - \Phi(\| x - y \|) \| x - y \|$,其中,$\Phi$ 满足 $\Phi(x) \to +\infty$,当 $x \to \infty$。

定义2[9] 设 X 是 Banach 空间,$\varphi: X \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ 是一真泛函。若存在 $f \in X^*$,使得 $\varphi(y) - \varphi(x_0) \geqslant (f, y - x_0), \forall y \in X$。则称 φ 在 x_0 处是次可微的,并称 f 为 φ 在 x_0 处的次梯度。在 x_0 处的一切次梯度的集合用 $\partial\varphi(x_0)$ 记之,称为 φ 在 x_0 处的次微分。

引理1[10] 设 X 是自反严格凸 Banach 空间,$\varphi: X \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ 是一真凸下半连续泛函。则 $\partial\varphi: X \to 2^{X^*}$ 是极大单调映象。

引理2 $q \in H$ 是变分不等式(3)的解的充分必要条件是,$q \in H$ 是集值映象 $S: \mathrm{dom}(\partial\varphi) \to 2^H$ 的不动点,即 $q \in S(q)$,其中 $S(u)$ 定义为 $S(u) = u + f - Tu - \partial\varphi(u)$。

证明 必要性。设 $q \in H$ 是变分不等式(3)的解,故有

$$\langle Tq - f, y - q \rangle \geqslant \varphi(q) - \varphi(y), \forall y \in H \tag{4}$$

由 φ 的次微分的定义和上式得 $f - Tq \in \partial\varphi(q)$,则有

$$q \in q + f - Tq - \partial\varphi(q) = S(q) \tag{5}$$

即 q 是映象 S 的不动点。

充分性。设 q 是映象 S 的不动点,所以有(5)式成立,则 $0 \in f - Tq - \partial\varphi(q)$,即 $f - Tq \in \partial\varphi(q)$。由 φ 的次微分的定义可知(4)式成立,所以 q 是变分不等式(3)的解。 证毕

引理3 若 $T: H \to H$ 是 Φ-强单调的,$\varphi: H \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ 是真凸下半连续泛函,则集值映象 $S(u) = u + f - Tu - \partial\varphi(u)$ 是 Φ-强伪压缩的。

证明 对任意 $u_1, u_2 \in D(\partial\varphi)$,任取 $f_1 \in S(u_1), f_2 \in S(u_2)$,则存在 $j_1 \in \partial\varphi(u_1), j_2 \in \partial\varphi(u_2)$,使 $f_1 = u_1 + f - Tu_1 - j_1, f_2 = u_2 + f - Tu_2 - j_2$。再由 T 的 Φ-强单调性和 $\partial\varphi$ 的单调性有

$$\langle f_1 - f_2, u_1 - u_2 \rangle = \langle u_1 - u_2 - (Tu_1 - Tu_2) - (j_1 - j_2), u_1 - u_2 \rangle =$$

$$\| u_1 - u_2 \|^2 - (Tu_1 - Tu_2, u_1 - u_2) - (j_1 - j_2, u_1 - u_2) \leqslant \| u_1 - u_2 \|^2 - \Phi(\| u_1 - u_2 \|) \| u_1 - u_2 \|$$

由 u_1, u_2, f_1, f_2 的任意性知,$S(u)$ 是 Φ-强伪压缩的。 证毕

2 主要结果

定理2 设 $T: H \to H$ 是 Φ-强单调、有界和半连续的,$\varphi: H \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ 是真凸下半连续泛函,则变分不等式(3)有唯一的解 q。

证明 唯一性。设变分不等式(3)有两个解 u_1, u_2,则有

$$\langle Tu_1, y - u_1 \rangle \geqslant \varphi(u_1) - \varphi(y) \quad \forall y \in K \tag{6}$$

$$\langle Tu_2, y - u_2 \rangle \geqslant \varphi(u_2) - \varphi(y) \quad \forall y \in K \tag{7}$$

在(6)式中取 $y = u_2$,在(7)式中取 $y = u_1$,然后相加并注意到 T 的 Φ-强伪单调性得

$$0 \leqslant \langle Tu_1 - Tu_2, u_2 - u_1 \rangle = -\langle Tu_1 - Tu_2, u_1 - u_2 \rangle \leqslant -\Phi(\| u_1 - u_2 \|) \| u_1 - u_2 \|$$

由 $\Phi(x)$ 的严格递增性知 $u_1 = u_2$。

存在性。由定理 1,只须验证(1)式成立。因为 φ 是真凸下半连续的,由文献[2]中定理 1.4.8(Ⅳ)知,存在 $h\in H, r\in\mathbf{R}$,使 $\varphi(v)\geqslant(h,v)+r, \forall v\in H$。对固定的 $v_0\in\mathrm{dom}(\partial\varphi)$,由 T 的 Φ-强单调性和上式有

$$\langle Tv,v-v_0\rangle+\varphi(v)\geqslant\langle Tv-Tv_0,v-v_0\rangle+(h,v)+r+\langle Tv_0,v\rangle-\langle Tv_0,v_0\rangle\geqslant$$
$$\Phi(\|v-v_0\|)\|v-v_0\|-\|h\|\cdot\|v\|-|r|-\|Tv_0\|\cdot\|v\|-\|Tv_0\|\cdot\|v_0\|\geqslant$$
$$\Phi(\|v-v_0\|)\|v-v_0\|-\|v\|(\|h\|+\|Tv_0\|)-|r|-\|Tv_0\|\cdot\|v_0\|\geqslant\Phi(\|v-v_0\|)(\|v\|-\|v_0\|)-\|v\|p+t$$

其中,$p=(\|h\|+\|Tv_0\|), t=-|r|-\|Tv_0\|\cdot\|v_0\|$ 都为常数。由 $\Phi(x)$ 的性质有

$$\frac{\langle Tv,v-v_0\rangle+\varphi(v)}{\|v\|}\geqslant\Phi(\|v-v_0\|)\left(1-\frac{\|v_0\|}{\|v\|}\right)-p+\frac{t}{\|v\|}\to+\infty\quad(\|v\|\to\infty)$$

所以变分不等式(3)的解存在且唯一。　　证毕

定理 3　设 H 是可分的 Hilbert 空间,$T:H\to H,\varphi:H\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ 满足定理 2 的条件。$S(u)=u+f-Tu-\partial\varphi(u), u\in\mathrm{dom}(\partial\varphi)$。设 $\{u_n\},\{v_n\}$ 是 H 中两个序列,$\{\alpha_n\},\{\beta_n\}$ 是[0,1]中两个序列,满足条件 1) $\alpha_n\to0$,$\beta_n\to0(n\to\infty)$,且 $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$;2) $\|u_n\|=o(\alpha_n)$,且 $\|v_n\|\to0(n\to\infty)$。

对任意给定的 $x_0\in H$,定义具误差的 Ishikawa 迭代序列 $\{x_n\}$ 如下

$$\begin{cases}x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n\eta_n+u_n,\text{存在 }\eta_n\in S(y_n),\forall n\geqslant0\\ y_n=(1-\beta_n)x_n+\beta_n\zeta_n+v_n,\text{存在 }\zeta_n\in S(x_n)\end{cases}\tag{8}$$

使 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty},\{y_n\}_{n=0}^{\infty}\subset\mathrm{dom}(\partial\varphi)$ 和 $\{\zeta_n\}_{n=0}^{\infty}\{\eta_n\}_{n=0}^{\infty}$ 有界,则 $\{x_n\}$ 强收敛于变分不等式(3)的唯一解 q。

证明　因 $\{\zeta_n\}_{n=0}^{\infty},\{\eta_n\}_{n=0}^{\infty}$ 有界,令

$$d=\max\{\sup_{n\geqslant0}\{\|\zeta_n-q\|\},\sup_{n\geqslant0}\{\|\eta_n-q\|\}\}+\|x_0-q\|\tag{9}$$

$$M=d+\sum_{n=0}^{\infty}\|u_n\|+1\tag{10}$$

由(8)~(10)式和归纳法容易得到

$$\|x_n-q\|\leqslant d+\sum_{n=0}^{\infty}\|u_n\|\leqslant M\quad\forall n\geqslant0\tag{11}$$

因此有

$$\max\{\|(1-\alpha_n)(x_n-q)+\alpha_n(\eta_n-q)\|,1\}\leqslant\max\{M,1\}=M,\forall n\geqslant0\tag{12}$$

$$\max\{\|(1-\beta_n)(x_n-q)+\beta_n(\eta_n-q)\|,1\}\leqslant\max\{M,1\}=M,\forall n\geqslant0\tag{13}$$

由 $S(x)$ 的 Φ-强伪压缩性有

$$\langle\eta_n-q,x_{n+1}-q\rangle=\langle\eta_n-q,y_n-q\rangle+\langle\eta_n-q,x_{n+1}-y_n\rangle\leqslant\|y_n-q\|^2-\Phi(\|y_n-q\|)\|y_n-q\|+d_n\tag{14}$$

其中 $d_n=\langle\eta_n-q,x_{n+1}-y_n\rangle$。下证 $\lim\limits_{n\to\infty}d_n\to0$,已知 $\{x_n\},\{\zeta_n\},\{\eta_n\},\{u_n\},\{v_n\}$ 都是有界序列,由条件 1)、2)及(8)式有

$$\begin{aligned}&\|x_{n+1}-y_n\|=\|(\beta_n-\alpha_n)x_n+\alpha_n\eta_n-\beta_n\zeta_n+u_n-v_n\|\leqslant\\&|(\beta_n-\alpha_n)|\cdot\|x_n\|+\alpha_n\|\eta_n\|+\beta_n\|\zeta_n\|+\|u_n\|-\|v_n\|\to0,(n\to\infty)\end{aligned}\tag{15}$$

所以

$$|d_n|=|\langle\eta_n-q,x_{n+1}-y_n\rangle|\leqslant M\|x_{n+1}-y_n\|\to0,(n\to\infty)$$

由(8)~(13)式,知

$$\begin{aligned}&\|y_n-q\|^2=\|(1-\beta_n)(x_n-q)+\beta_n(\zeta_n-q)+v_n\|^2\leqslant\\&\|(1-\beta_n)(x_n-q)+\beta_n(\zeta_n-q)\|^2+2\langle(1-\beta_n)(x_n-q)+\beta_n(\zeta_n-q)+v_n,v_n\rangle\leqslant\\&(1-\beta_n)^2\|(x_n-q)\|^2+2\beta_n(1-\beta_n)\langle(x_n-q),(\zeta_n-q)\rangle+\beta_n^2\|(\zeta_n-q)\|^2+4M\|v_n\|\leqslant\\&\|(x_n-q)\|^2+2\beta_nM^2+\beta_n^2M^2+4M\|v_n\|\end{aligned}\tag{16}$$

由(15)、(16)式可知

$$\langle\eta_n-q,x_{n+1}-q\rangle\leqslant\|(x_n-q)\|^2-\Phi(\|y_n-q\|)\|y_n-q\|+d_n+2\beta_nM^2+\beta_n^2M^2+4M\|v_n\|\tag{17}$$

由 $\|u_n\|=o(\alpha_n)$,可设 $\|u_n\|=\alpha_n\varepsilon_n$,其中,$\varepsilon_n\to0(n\to0)$,再由(8)~(13)及(17)式得

$$\begin{aligned}&\|x_{n+1}-q\|^2=\|(1-\alpha_n)(x_n-q)+\alpha_n(\eta_n-q)+u_n\|^2\leqslant\\&\|(1-\alpha_n)(x_n-q)+\alpha_n(\eta_n-q)\|^2+2\langle(1-\alpha_n)(x_n-q)+\alpha_n(\eta_n-q)+u_n,u_n\rangle\leqslant\\&(1-\alpha_n)^2\|x_n-q\|^2+2\alpha_n\langle\eta_n-q,(1-\alpha_n)(x_n-q)+\alpha_n(\eta_n-q)\rangle+4M\|u_n\|\leqslant\\&(1-\alpha_n)^2\|x_n-q\|^2+2\alpha_n\langle\eta_n-q,x_{n+1}-q-u_n\rangle+4M\|u_n\|\leqslant\\&(1-\alpha_n)^2\|x_n-q\|^2+2\alpha_n[\|(x_n-q)\|^2-\Phi(\|y_n-q\|)\|y_n-q\|+d_n+M\|u_n\|+\\&2\beta_nM^2+\beta_n^2M^2+4M\|v_n\|]+4M\alpha_n\varepsilon_n\leqslant\|x_n-q\|^2-2\alpha_n\Phi(\|y_n-q\|)\|y_n-q\|+\alpha_n\lambda_n\end{aligned}\tag{18}$$

其中 $\lambda_n = \alpha_n M + 2(d_n + M\|u_n\| + 2\beta_n M^2 + \beta_n^2 M^2 + 4M\|v_n\|) + 4M\varepsilon_n$,由于 $\alpha_n \to 0, d_n \to 0, \beta_n \to 0, u_n \to 0, \|v_n\| \to 0, \varepsilon_n \to 0(n \to 0)$,有 $\lambda_n \to 0$。

设 $\sigma = \inf\{\|y_n - q\| : n \geqslant 0\}$,则 $\sigma \geqslant 0$。下证 $\sigma = 0$。假设不然,$\sigma > 0$,则 $\|y_n - q\| \geqslant \sigma, \forall n \geqslant 0$。由 Φ 的严格递增性可知,$\Phi(\|y_n - q\|) \geqslant \Phi(\sigma) > 0, \forall n \geqslant 0$。因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n = 0$,所以存在正整数 N,使得当 $n > N$ 时,$\lambda_n < \Phi(\sigma)\sigma$,从而由(18)式有 $\|x_{n+1} - q\| \leqslant \|x_n - q\|^2 - \alpha_n \Phi(\sigma)\sigma, \forall n \geqslant N$。对此式移项求和可得 $\Phi(\sigma)\sigma\sum\limits_{n=N}^{\infty}\alpha_n \leqslant \|x_n - q\|$。这与条件 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n = \infty$ 矛盾,故必有 $\sigma = 0$ 成立。从而必有 $\{y_{n_j}\} \subset \{y_n\}$,使

$$\|y_{n_j} - q\| \to 0, (n_j \to \infty) \tag{19}$$

由(8)~(11)式有 $\|y_n - q\| = \|(x_n - q) - \beta_n(x_n - \zeta_n) + v_n\| \geqslant \|x_n - q\| - \beta_n\|x_n - q\| - \beta_n\|\zeta_n - q\| - \|v_n\|$

从而有 $\|x_{n_j} - q\| \leqslant \|y_{n_j} - q\| + 2\beta_{n_j}M + \|v_{n_j}\|$。由(19)式及条件1)、2)可知 $\|x_{n_j} - q\| \to 0, (n_j \to \infty)$。又因为 $\|y_n - q\| = \|y_n - x_{n+1} + x_{n+1} - q\| \geqslant \|x_{n+1} - q\| - \|y_n - x_{n+1}\| = \|x_{n+1} - q\| - \gamma_n$,其中 $\gamma_n = \|y_n - x_{n+1}\|$,由(15)式可得 $\gamma_n \to 0(n \to \infty)$。因为 $\|x_{n_j} - q\| \to 0, (n_j \to \infty), \lambda_n \to 0, \gamma_n \to 0, (n \to 0)$ 所以 $\forall \varepsilon > 0$,存在正整数 n_{j_0},使 $\forall n \geqslant n_{j_0}$ 有

$$\|x_{n_{j_0}} - q\| < \varepsilon, \lambda_n < 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{\varepsilon}{2}, \gamma_n < \frac{\varepsilon}{2} \tag{20}$$

下面证明

$$\|x_{n_{j_0}+k} - q\| < \varepsilon, \forall k \geqslant 1 \tag{21}$$

首先证明 $\|x_{n_{j_0}+1} - q\| < \varepsilon$,假设 $\|x_{n_{j_0}+1} - q\| \geqslant \varepsilon$ 则由(23)和(24)式有 $\|y_{n_{j_0}} - q\| \geqslant \|x_{n_{j_0}+1} - q\| - \gamma_{j_{n_0}} \geqslant \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$,从而由 Φ 的严格增加性质可知,$\Phi(\|y_{n_{j_0}} - q\|) \geqslant \Phi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) > 0$。于是从(18)、(20)式可得

$$\|x_{n_{j_0}+1} - q\|^2 \leqslant \|x_{n_{j_0}} - q\|^2 + \alpha_{n_{j_0}}\lambda_{n_{j_0}} - 2\alpha_{n_{j_0}}\Phi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon^2$$

与假设矛盾,故必有 $\|x_{n_{j_0}+1} - q\|^2 \leqslant \varepsilon$ 成立,按照同样的方法,由归纳法可证,$\forall k \geqslant 1$,$\|x_{n_{j_0}+k} - q\| < \varepsilon$ 成立。即(21)式成立。最后,由(21)式及 ε 的任意性可知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = q$。 证毕

参考文献:

[1] BROWDER F R. Existence and Approximation of Solutions of Nonlinear Variational Inequalities[J]. Proc Natl Acad Sci USA, 1966,56:1080-1086.

[2] 张石生. 变分不等式和相补问题理论及应用[M]. 上海:上海科学技术文献出版社,1991.

[3] NOOR M A, NOOR K I, RASSIAS T M. Analysis, Geometry and Group: A Riemann Legacy Volume[M]. Florida:Hadronic Press,1993.

[4] NOOR M A. A New Iterative Method for Monotone Mixed Varitational Inequalitites[J]. Comput Modelling, 1997, 26(7): 29-34.

[5] ZHANG X. Some New Iterative Algorithms for Monotone Mixed Veriational Inegualitiex[J]. Appl Math Chinese Univ Ser B, 2002, 17(1):80-84.

[6] 周武,冀小明. 关于一类变分不等式的带有误差项的 Ishikawa 迭代算法[J]. 四川大学学报(自然科学版),2002, 39(6): 1023-1026.

[7] 毕中胜,张超,葛瑜. 关于单调混合变分不等式的带有误差的 Mann 迭代算法[J]. 辽宁师范大学学报(自然科学版),2003, 26(1): 5-7.

[8] 王传伟. 一个求解变分不等式问题的投影算法[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2005,22(1):6-10.

[9] LIU L S. Ishikawa and Mann Iterative Process with Errors for Nonlinear Strongly Accretive Mappings in Banach Spaces[J]. J Math Anal Appl, 1995, 194:114-125.

[10] DING X P, Perturbed Proximal Point Algorithms for Generalized Quasivariational Inclusions[J]. J Math Anal Appl,1997, 210: 88-101.

(责任编辑 黄 颖)