2005 年 9 月 重庆师范大学学报(自然科学版) Sep. 2005
第 22 卷 第 3 期 Journal of Chongqing Normal University(Natural Science Edition) Vol. 22 No. 3

# 基于迭代计算的一个不等式和极限*

林 银 河[1,2]

(1. 重庆师范大学 数学与计算机科学学院, 重庆 400047; 2. 丽水学院 数学系, 浙江 丽水 323000)

**摘 要**:提出对于轨道 $Orb_f(x)$ 的 $\omega$-极限集($\alpha$-极限集)中任意点 $x_0$ 都是迭代序列 $\{f^n(x)\}(\{f^{-n}(x)\})$ 的某一子列的极限,并给出文献[1]中一个具体不等式的更严密的形式;对文献[1~3]的结论作了进一步推广,设 $f,\varphi,\Psi$ 都是定义在区间 $I$ 上可迭代的函数,而且对一切 $x\in I$,有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\Psi(x)$,那么 1)如果 $\varphi,\Psi$ 都递减,则当 $n$ 为偶数时,$(\varphi\circ\Psi)^{\frac{n}{2}}(x)\leqslant f^n(x)\leqslant(\Psi\circ\varphi)^{\frac{n}{2}}(x)$;当 $n$ 为奇数时,$\varphi\circ(\Psi\circ\varphi)^{\frac{n-1}{2}}(x)\leqslant f^n(x)\leqslant\Psi\circ(\varphi\circ\Psi)^{\frac{n}{2}}(x)$;2)如果 $\varphi,\Psi$ 都递增,则 $\varphi^n(x)\leqslant f^n(x)\leqslant\Psi^n(x)$。

**关键词**:函数;迭代;不等式;极限

**中图分类号**:O192 **文献标识码**:A **文章编号**:1672-6693(2005)03-0076-04

# An Inequality and Limit Based on the Calculation of Iteration

*LIN Yin-he*[1,2]

(1. College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047;
2. Dept. of Mathematics, Lishui College, Lishui Zhejiang 323000, China)

**Abstract**: In this paper the author think that arbitrary point $x_0$ in $\omega$- limit set($\alpha$- limit set) of the oribit $Orb_f(x)$ is the limit of certain sub-sequence of $\{f^n(x)\}(\{f^{-n}(x)\})$. Meanwhile, they give a more disscussion about the result in [1] and [5]. If $f,\varphi,\Psi$ are iterational functions on $I$, for all $x\in I$, such as $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\Psi(x)$, then two possibilities: 1) If $\varphi,\Psi$ are decreasing, when $n$ is an even number, then $(\varphi\circ\Psi)^{\frac{n}{2}}(x)\leqslant f^n(x)\leqslant(\Psi\circ\varphi)^{\frac{n}{2}}(x)$; When $n$ is an odd number, then $\varphi\circ(\Psi\circ\varphi)^{\frac{n-1}{2}}(x)\leqslant f^n(x)\leqslant\Psi\circ(\varphi\circ\Psi)^{\frac{n}{2}}(x)$; 2) If $\varphi,\Psi$ are increasing, then $\varphi^n(x)\leqslant f^n(x)\leqslant\Psi^n(x)$.

**Key words**: function; iteration; inequality; limit

设$(X,\Gamma)$是一个拓扑空间,$f:X\to X$ 是 $X$ 到自身的一个映射。记 $f^n(x)=f\circ(f^{n-1}(x))$;$f^0(x)=x$($n$ 为正整数)。称 $f^n(x)$ 为 $f(x)$ 的 $n$ 次迭代,并称 $n$ 为 $f^n$ 关于 $f$ 的迭代指数。从定义可见,$f^0=id$,$f^m\circ f^n=f^{m+n}$,其中 $id$ 表示恒同映射。

一些简单的初等函数经过 $n$ 次迭代之后,它的结构与性质都将可能变得十分复杂。同时,当 $n\to\infty$ 时它的极限还会出现许多意料不到的结果。文献[1]在关于迭代的计算方面仅研究了不动点法与共轭相似法,同时在共轭相似法中没有涉及如何求桥函数的问题,文献[4]~[6]对自映射作了讨论。本文进一步论证了应用归纳法对于一些函数迭代的讨论是非常有效的,并且说明一个函数 $f$ 通过不同的桥函数 $h$ 可以获得不同的函数 $g$ 与 $f$ 共轭。事实上,求桥函数并没有一般的方法。针对具体函数 $f$,通过 $g=h\circ f\circ h^{-1}$,尽可能使 $g$ 易于求迭代为前提来考虑所需的桥函数 $h$。至于无法求出迭代结果时,对其迭代考虑极限与估计有时成为必需。本文不仅讨论了轨道 $Orb_f(x)$ 的 $\omega$-极限集($\alpha$-极限集)中任意点都是迭代序列 $\{f^n(x)\}(\{f^{-n}(x)\})$ 的某一子列的极限的问题,而且对文献[1]中给出的如果 $\varphi(x)$,$\Psi(x)$ 都是增函数并且 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\Psi(x)$ 时,则 $\varphi^n(x)\leqslant f^n(x)\leqslant\Psi^n(x)$ 成立这个命题的条件推广到更为一般的情况,并给出了严格证明。至于文献

* 收稿日期:2004-11-09 修回日期:2005-06-20
资助项目:重庆市教委科学研究项目(05JWSK054)
作者简介:林银河(1965-),男,浙江景宁人,讲师,硕士,主要研究方向为拓扑动力系统。

[1]在没有任何条件下要证明不等式$\frac{x}{\sqrt{1+3nx^2}}<\underbrace{\sin\sin\cdots\sin}_{n}x<\frac{x}{\sqrt{1+\frac{nx^2}{5}}}$成立,其实存在不妥之处。例如$x=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$时不等式都不成立。经过研究之后指出不仅需补充$x$的范围,而且在给出一个$x$的具体取值范围时将各项加上了绝对值。

# 1 迭代的计算

## 1.1[1] 不动点法

设$x_0$为$f$的不动点,即$f(x_0)=x_0$,那么$f^n(x_0)=x_0$,因此如果能断定一个函数$f$迭代的基本代数形式,可以通过设置待定常数,并用$f$的不动点$x_0$来确定这些常数。

**例1**[1] 设$f(x)=ax+b$,$a$、$b\in\mathbf{R}$,$a\neq 1$,求$f^n(x)$。

**解** 首先,$f$是线性的,可以肯定$f^n$也是线性的,不妨设$f^n(x)=a^nx+B$,其中$B$是待定的。从$f(x)=x$解出$f$的不动点$x_0=\frac{b}{1-a}$,由此也必有$f^n(x_0)=x_0$,即有$a^n\cdot\frac{b}{1-a}+B=\frac{b}{1-a}$,从而解得$B=\frac{b-a^nb}{1-a}$,所以$f^n(x)=a^nx+\frac{b-a^nb}{1-a}$。

## 1.2 数学归纳法

通过对一个给定的函数简单迭代$f^2(x)$或$f^3(x)$的计算结果,从中发现$f^n(x)$的可能结果,然后用数学归纳法加以证明之。

**例2** 设$f(x)=\frac{x}{a+bx}$,$a$、$b\in\mathbf{R}$,$ab\neq 0$,求$f^n(x)$。

**解** 首先经过计算可得

$$f^2(x)=\frac{x}{a^2+(1+a)bx},$$

$$f^3(x)=\frac{x}{a^3+(1+a+a^2)bx},$$

若
$$f^n(x)=\frac{x}{a^n+(1+a+\cdots+a^{n-1})bx},$$

则

$$f^{n+1}(x)=\frac{\frac{x}{a+bx}}{a^n+(1+a+\cdots+a^{n-1})b\cdot\frac{x}{a+bx}}=\frac{x}{a^n(a+bx)+(1+a+\cdots+a^{n-1})x}=\frac{x}{a^n+(1+a+\cdots+a^{n-1}+a^n)bx}$$

由归纳法可得

$$f^n(x)=\frac{x}{a^n+(1+a+\cdots+a^{n-1})bx}\quad(n=1,2,\cdots)$$
成立。

## 1.3[1] 共轭相似法

如果存在可逆函数$h(x)$,使函数$f$与$g$满足$f=h^{-1}\circ g\circ h$,就称$f$与$g$共轭,记为$f\sim g$,这里函数$h$称为$f$与$g$的桥函数。

设$f\sim g$,$h$为桥函数,那么由$f=h^{-1}\circ g\circ h$可导出$f^n=h^{-1}\circ g^n\circ h$。

常常利用这一性质,设法通过桥函数将一个复杂函数的迭代转化为与它共轭的较简单的函数迭代,而且$f=h^{-1}\circ g\circ h$,可得$g=h\circ f\circ h^{-1}$。由此可见,当选择不同的桥函数$h$时,就可以得到不同的函数$g$与$f$共轭。所以,共轭相似法关键是要选择合适的桥函数$h$,使得与$f$相似的函数$g$尽可能简单,并使它的迭代能容易计算出来。应该说求合适的桥函数没有一个普遍适用的方法,通常只能根据具体问题进行考虑。

**例3** 设$f(x)=x+3\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt[3]{x}+1$,计算$f^n(x)$的表达式。

**解** 令$h(x)=x^{\frac{1}{3}}$,$h^{-1}(x)=x^3$,从而

$$g(x)=h(x)\circ f(x)\circ h^{-1}(x)=x+1$$

于是$f(x)=h^{-1}(x)\circ g(x)\circ h(x)$,$g^n(x)=x+n$

$$f^n(x)=h^{-1}(x)\circ g^n(x)\circ h(x)=(\sqrt[3]{x}+n)^3。$$

**例4** 设$f(x)=\arccos(\sin x)$,计算$f^n(x)$的表达式。

**解** 令$h(x)=\cos^2x$,$h^{-1}(x)=\arccos\sqrt{x}$

从而 $$g(x)=h(x)\circ f(x)\circ h^{-1}(x)=1-x$$

于是 $$f(x)=h^{-1}(x)\circ g(x)\circ h(x),$$
$$f^n(x)=h^{-1}(x)\circ g^n(x)\circ h(x)$$

当$n$为奇数时,$g^n(x)=1-x$;当$n$为偶数时,$g^n(x)=x$。故有

$$f^n(x)=\begin{cases}\arccos(\sin x) & n\text{ 为奇数时}\\ \arccos(\cos x) & n\text{ 为偶数时}\end{cases}。$$

# 2 极限与不等式

**命题1** 在度量空间中对任意$x_0\in\omega_f(x)$或$x_0\in\alpha_f(x)$,存在序列$n_i\to\infty$,使

$$\lim_{i\to+\infty}f^{n_i}(x)=x_0 \text{ 或 } \lim_{i\to+\infty}f^{-n_i}(x)=x_0。$$

**证明**　$\omega_f(x)=\bigcap\limits_{n\in\mathbf{N}}\overline{\{f^k(x):k\geqslant n\}}$,

$\alpha_f(x)=\bigcap\limits_{n\in\mathbf{N}}\overline{\{f^{-k}(x):k\geqslant n\}}$

若 $x_0\in\omega_f(x)$,那么对一切 $n\in\mathbf{N}$,都有 $x_0\in\overline{\{f^k(x):k\geqslant n\}}$。由于 $x_0\in\overline{\{f^k(x):k\geqslant 1\}}$,则存在 $f^{n_1}(x)\in B(x_0,1)$,而 $x_0\in\overline{\{f^k(x):k\geqslant n_1\}}$,则存在 $f^{n_2}(x)\in B(x_0,\frac{1}{2})$ 且 $n_2>n_1$。一般地,由于 $x_0\in\overline{\{f^k(x):k\geqslant n_{i-1}\}}$,则存在 $f^{n_i}(x)\in B(x_0,\frac{1}{i})$ 且 $n_i>n_{i-1}$。从而有 $|f^{n_i}(x)-x_0|<\frac{1}{i}$,因此有 $\lim\limits_{i\to\infty}f^{n_i}(x)=x_0$。同理当 $x_0\in\alpha_f(x)$,则 $\lim\limits_{i\to\infty}f^{-n_i}(x)=x_0$。　　证毕

这个命题表明对于 $\omega_f(x)$ 或 $\alpha_f(x)$ 中任意一点 $x_0$,都有迭代序列 $\{f^n(x)\}$ 或 $\{f^{-n}(x)\}$ 的一个子列以 $x_0$ 为极限。

命题 2　设 $f,\varphi,\Psi$ 都是定义在区间 $I$ 上可以迭代的函数,而且对一切 $x\in I$,有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\Psi(x)$,那么

1)若 $\varphi,\Psi$ 都递减,则 $n$ 为偶数时,$(\varphi\circ\Psi)^{\frac{n}{2}}(x)\leqslant f^n(x)\leqslant(\Psi\circ\varphi)^{\frac{n}{2}}(x)$[5];$n$ 为奇数时,$\varphi\circ(\Psi\circ\varphi)^{\frac{n-1}{2}}(x)\leqslant f^n(x)\leqslant\Psi\circ(\varphi\circ\Psi)^{\frac{n}{2}}(x)$;

2)[1] 如果 $\varphi,\Psi$ 都递增,则 $\varphi^n(x)\leqslant f^n(x)\leqslant\Psi^n(x)$。

**证明**　1)仅对 $n$ 为偶数时加以证明,$n$ 为奇数的情况类似。

由已知,有

$$\varphi(f(x))\leqslant f(f(x))\leqslant\Psi(f(x))\tag{1}$$

由于 $\varphi,\Psi$ 都递减,结合已知条件有

$$\varphi(\Psi(x))\leqslant\varphi(f(x));\Psi(f(x))\leqslant\Psi(\varphi(x))\tag{2}$$

因此由(1)、(2)式得,当 $n=2$ 时,$(\varphi\circ\Psi)^{\frac{n}{2}}(x)\leqslant f^n(x)\leqslant(\Psi\circ\varphi)^{\frac{n}{2}}(x)$ 成立,当 $n=2k$ 时,又有 $(\varphi\circ\Psi)^{\frac{n}{2}}(x)\leqslant f^n(x)\leqslant(\Psi\circ\varphi)^{\frac{n}{2}}(x)$ 成立。

即

$$(\varphi\circ\Psi)^k(x)\leqslant f^{2k}(x)\leqslant(\Psi\circ\varphi)^k(x)\tag{3}$$

成立。

由已知,有

$$\varphi(f^{2k}(x))\leqslant f^{2k+1}(x)=f(f^{2k}(x))\leqslant\Psi(f^{2k}(x))$$

由于 $\varphi,\Psi$ 都递减,再结合(3)式得

$$\Psi(f^{2k}(x))\leqslant\Psi[(\varphi\circ\Psi)^k(x)],$$
$$\varphi(f^{2k}(x))\geqslant\varphi[(\Psi\circ\varphi)^k(x)]$$

即有

$$\varphi[(\Psi\circ\varphi)^k(x)]\leqslant f^{2k+1}(x)\leqslant\Psi[(\varphi\circ\Psi)^k(x)]\tag{4}$$

又由已知可得

$$\varphi(f^{2k+1}(x))\leqslant f(f^{2k+1}(x))=f^{2k+2}(x)\leqslant\Psi(f^{2k+1}(x))\tag{5}$$

由于 $\varphi,\Psi$ 都递减,结合(4)式得

$$\Psi(f^{2k+1}(x))\leqslant\Psi\{\varphi[(\Psi\circ\varphi)^k(x)]\}=(\Psi\circ\varphi)^{k+1}(x)\tag{6}$$
$$\varphi(f^{2k+1}(x))\geqslant\varphi\{\Psi[(\varphi\circ\Psi)^k(x)]\}=(\varphi\circ\Psi)^{k+1}(x)\tag{7}$$

由(5)、(6)、(7)式得

$$(\varphi\circ\Psi)^{k+1}(x)\leqslant f^{2k+2}(x)\leqslant(\Psi\circ\varphi)^{k+1}(x)$$

成立,即 $n=2k+2$ 时也成立。由归纳法当 $n$ 为偶数时,总有 $(\varphi\circ\Psi)^{\frac{n}{2}}(x)\leqslant f^n(x)\leqslant(\Psi\circ\varphi)^{\frac{n}{2}}(x)$。

2)由已知当 $n=1$ 时结论显然成立。

设 $n=k$ 时成立,即

$$\varphi^k(x)\leqslant f^k(x)\leqslant\Psi^k(x)\tag{8}$$

那么

$$\varphi(f^k(x))\leqslant f^{k+1}(x)=f(f^k(x))\leqslant\Psi(f^k(x))\tag{9}$$

而由 $\varphi,\Psi$ 都递增及(8)式可得

$$\begin{aligned}&\varphi(f^k(x))\geqslant\varphi(\varphi^k(x))=\varphi^{k+1}(x);\\&\Psi(f^k(x))\leqslant\Psi(\Psi^k(x))=\Psi^{k+1}(x)\end{aligned}\tag{10}$$

由(9)、(10)式可得当 $n=k+1$ 时 $\varphi^n(x)\leqslant f^n(x)\leqslant\Psi^n(x)$ 成立,从而对一切 $n$ 有 $\varphi^n(x)\leqslant f^n(x)\leqslant\Psi^n(x)$。　　证毕

例 5　设 $f(x)=\sin x$,$f^n(x)=\underbrace{\sin\sin\cdots\sin x}_{n}$,求证 $\frac{|x|}{\sqrt{1+3nx^2}}\leqslant|f^n(x)|\leqslant\frac{|x|}{\sqrt{1+\frac{nx^2}{5}}}$ 在 $|x|\leqslant\frac{\sqrt{10}}{2}$ 时成立。

**证明**　若 $x\geqslant 0$,则要使不等式

$$1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6\geqslant\frac{20-9x^2}{20+x^2}\tag{11}$$

成立,经过化简可得,(11)式等价于不等式 $240+10x^2-x^4\geqslant 0$,即

$$x^2\leqslant 5+\sqrt{265}\tag{12}$$

同时,要使不等式

$$1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4\leqslant\frac{4+x^2}{4+3x^2}\tag{13}$$

成立,经过化简可得,(13)式等价于不等式

$$x^2<\frac{32}{3}\tag{14}$$

由 $\cos x$ 的 Talyor 展开式

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\frac{1}{8!}x^8-\cdots(x\in\mathbf{R})$$

可得

$$\begin{aligned}&\cos x\geqslant 1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6,\\&\cos x\leqslant 1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4\end{aligned}\tag{15}$$

当 $x^2 \leqslant 10$ 时,(12)、(14)式都成立,再由(15)式得

$$\frac{20-9x^2}{20+x^2} \leqslant \cos x \leqslant \frac{4+x^2}{4+3x^2} \tag{16}$$

将 $x^2 \leqslant 10$ 及(16)式中 $x$ 换成 $2x$,得 $(2x)^2 \leqslant 10$,即 $x^2 \leqslant \frac{5}{2}$ 时有

$$\frac{20-9\times 4x^2}{20+x^2} \leqslant \cos 2x \leqslant \frac{4+4x^2}{4+3\times 4x^2}$$

整理之后可得,当 $0 \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{10}}{2}$ 时,有

$$\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}} \leqslant \sin x \leqslant \frac{x}{\sqrt{1+\frac{x^2}{5}}}$$

如果令　$\Phi(x) = \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}, \Psi(x) = \frac{x}{\sqrt{1+\frac{x^2}{5}}}$

经过求导数运算可得

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(1+3x^2)^2}}, \Psi(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{x^2}{5}\right)^2}}$$

从而在 $\left[0, \frac{\sqrt{10}}{2}\right]$ 上,$\Phi(x)$ 与 $\Psi(x)$ 都递增,对于 $\Phi(x)$,令 $h(x) = x^2, h^{-1} = \sqrt{x}$,则有 $g(x) = h(x) \circ \Phi(X) \circ h^{-1}(x) = \frac{x}{1+3x}$。根据例 2 可得 $g^n(x) = \frac{x}{1+3nx}$,从而

$$\Phi^n(x) = h^{-1}(x) \circ g^n(x) \circ h(x) = \frac{x}{\sqrt{1+3nx^2}},$$

同理　$$\Psi^n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+\frac{nx^2}{5}}}$$

由命题 2 的结论 2)可得,当 $x \in \left[0, \frac{\sqrt{10}}{2}\right]$ 时,有

$$\frac{x}{\sqrt{1+3nx^2}} \leqslant f^n(x) \leqslant \frac{x}{\sqrt{1+\frac{nx^2}{5}}} \tag{17}$$

当 $x \in \left[-\frac{\sqrt{10}}{2}, 0\right]$ 时, $-x \in \left[0, \frac{\sqrt{10}}{2}\right]$,将 $-x$ 代入(14)式并注意到 $f^n(-x) = -f^n(x)$,有

$$\frac{-x}{\sqrt{1+3nx^2}} \leqslant -f^n(x) \leqslant \frac{-x}{\sqrt{1+\frac{nx^2}{5}}}$$

总之,当 $|x| \leqslant \frac{\sqrt{10}}{2}$ 时,

$$\frac{|x|}{\sqrt{1+3nx^2}} \leqslant f^n(x) \leqslant \frac{|x|}{\sqrt{1+\frac{nx^2}{5}}} \tag{18}$$

成立。

同时,由(18)式即可得 $\forall x \in \left[-\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{\sqrt{10}}{2}\right]$,都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x) = 0$。　证毕

致谢:本文撰写过程中得到了金渝光教授的悉心指导,特此表示感谢!

## 参考文献:

[1] 张伟年. 动力系统基础[M]. 北京:高等教育出版社,2001.
[2] 金渝光. 关于一类自映射轨道的研究[J]. 应用数学学报,2002(2):381-382.
[3] 金渝光. 关于自映射扰动的稳定性[J]. 重庆师范学院学报(自然科学版),1996(4):52-54.
[4] 金渝光. 无异状点的一类自映射——中心和深度[J]. 重庆大学学报(自然科学版),2002(2):128-129.
[5] 金蕾. 迭代的计算与估计[J]. 数学的实践与认识,2004,34(4):170-175.

(责任编辑　黄　颖)