

两个不同边界问题的静电场统一描述的实例*

蒋明宇, 胡先权, 杨 英

(重庆师范大学 物理学与信息技术学院, 重庆 400047)

摘要:对偏心圆柱面带电导体和分离圆柱面带电导体这两个不同边界问题的静电场进行了统一的描述,严格地求出了电势函数和电场线函数,作出了相应的等势线簇图形和电场线簇图形,并且进行了必要的讨论。

关键词:保角映射;拉普拉斯方程;精确解;等势线簇图形;电场线簇图形

中图分类号:O441.1

文献标识码:A

文章编号:1672-6693(2005)03-0087-03

An Actual Example of Uniform Representation of Two Different Boundaries Problems in Static Electricity Field

JIANG Ming-yu, HU Xian-quan, YANG Ying

(College of Physics and Information Technology, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: The uniform representation of the solution of equipotential surfaces of two parallel charged cylinder conductors with eccentric and separated axes has obtained. By means of combination of conformal mapping, separation of variables, and software package facility of Mathematica 5.0, we have obtained the exact solution of the electrical potential functions and power line functions and plotted the relative equipotential line maps and power line maps; Meanwhile, we have made the necessary discussion.

Key words: conformal mapping; Laplace's equation; exact solution; equipotential line maps; power line maps

1 两个不同静电场问题的统一求解

对于两个套在一起的偏心圆柱带电导体面之间夹层区域静电场的求解(图1),以及两个分离圆柱带电导体面之间区域静电场的求解(图2),参考文献[1]、[2]将此两个不同区域及边界的静电场问题统一地进行了求解。采用保角映射与分离变量相结合的方法,严格、统一地求出了上述两个问题的电势函数,作出了相应的等势线簇图形。作为对拙文[1]、[2]的补充,本文通过寻找共轭调和函数的方法求得了相应边界问题的电场线函数及方程,作出了相互正交的等势线簇与电场线簇图形。

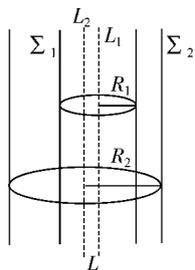


图1 小圆柱套在大圆柱内部

了相互正交的等势线簇与电场线簇图形。

上述图1和图2所示的两问题实际上是平面场问题,图1、图2可分别简化为平面图如图3、图4所示。从而归结为求解如下的拉普拉斯方程:

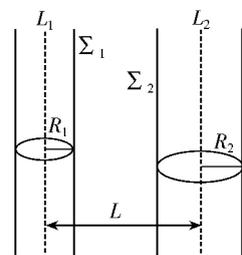


图2 两圆柱互相分离

$$\nabla^2 V = 0$$

$$V_{\text{在边界}C_1\text{上}} = V_1$$

$$V_{\text{在边界}C_2\text{上}} = V_2$$

采用保角映射与分离变量相结合^[1,2],可求得两个分离圆柱带电导体面之间复连通区域静电场的电势分布函数为

$$V(x, y) = C_0 + \frac{A_0}{2} \ln \frac{(x-x_1)^2 + y^2}{(x-x_2)^2 + y^2} \quad (1)$$

* 收稿日期:2004-10-22 修回日期:2005-05-20

资助项目:重庆市教育委员会科学技术研究项目(NO:20030806)

作者简介:蒋明宇(1977-),男,重庆人,硕士研究生,助理实验师,主要从事电磁场理论研究。

其中

$$x_1 = \frac{L^2 + R_1^2 - R_2^2 - \sqrt{-4L^2R_1^2 + (-L^2 - R_1^2 + R_2^2)^2}}{2L} \quad (2)$$

$$x_2 = \frac{L^2 + R_1^2 - R_2^2 + \sqrt{-4L^2R_1^2 + (-L^2 - R_1^2 + R_2^2)^2}}{2L} \quad (3)$$

A_0, C_0 的表达式为

$$C_0 = \frac{2V_1 \operatorname{arcoth} \left[\frac{(L + R_1 - R_2)(L - R_1 - R_2)}{(L + R_1 + R_2)(L + R_2 - R_1)} \right]^{\frac{1}{2}} + 2V_2 \operatorname{arcoth} \left[\frac{(L + R_2 - R_1)(L - R_1 - R_2)}{(L + R_1 + R_2)(L - R_2 + R_1)} \right]^{\frac{1}{2}}}{\operatorname{arcosh} \left(\frac{L^2 - R_1^2 - R_2^2}{2R_1R_2} \right)} \quad (4)$$

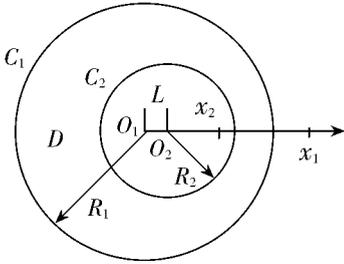


图3 图1的简化图

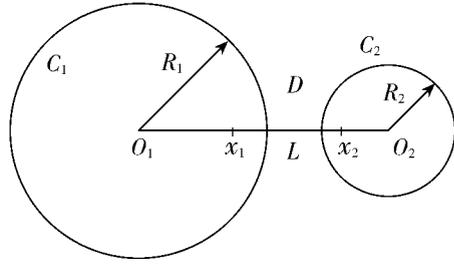


图4 图2的简化图

$$A_0 = \frac{V_2 - V_1}{\operatorname{arcosh} \left(\frac{L^2 - R_1^2 - R_2^2}{2R_1R_2} \right)} \quad (5)$$

2 等势线的描绘

令(1)式中 $V(x, y) = C$ (常数), 即可得到分离圆柱面带电导体之间复连通区域的等势线簇函数即等势线方程。该函数为隐函数, 本文采用 Mathematica 5.0 绘图函数库中的 ImplicitPlot 命令绘制二维的隐函数图形^[3], 以及可视化技术^[4]。选择两圆柱相关参数: $L = 5\text{m}$, $R_1 = 2.0\text{m}$, $V_1 = 10.0\text{V}$, $R_2 = 1.0\text{m}$, $V_2 = 2.0\text{V}$; 等势线常数 C 分别等于 2.0, 3.0, 4.0, 5.0, 6.0, 7.0, 8.0, 9.0, 10.0V, 并且将(9), (10)式代入(8)式中, 即可作出9条相应的等势线, 如图5所示。

经过类似的步骤, 可求出图3的电势 $V(x, y)$ 的分布, 事实上, 只须将上述(2)式和(3)式表示的 x_1, x_2 的符号更改为 x_2, x_1 代入(1)式即可。选择两圆柱相关参数: $L = 1\text{m}$, $R_1 = 4.0\text{m}$, $V_1 = 2.0\text{V}$, $R_2 = 2.0\text{m}$, $V_2 = 10.0\text{V}$; 等势线常数 C 分别等于 2.0, 3.0, 4.0, 5.0, 6.0, 7.0, 8.0, 9.0, 10.0V, 并且将(9), (10)式代入(8)式中, 即可作出9条相应的等势线, 如图6所示。

3 电场线簇的描绘

根据解析函数的实部函数与虚部函数对应的曲线簇在空间处处正交的性质, 很容易由 V 作为解析函数的实部, 通过构造一个解析函数而求出其虚

部, 也即得到 V 的共轭调和函数, 此即电势函数 V 相应的电场线函数。它所表示的曲线簇与 V 曲线簇在空间处处正交。

$$\text{设复变函数 } \omega = f(z) = V + iU \quad (6)$$

令(1)式表示的电势函数 V 作为(6)式的实部, 则(6)式称为静电场问题的复位势函数^[5,6], 其中的 U 即为相应的电场线函数。

利用柯西—黎曼方程^[7]及其等价运算, 可求得该静电场问题的电场线函数主值

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{A_0(x - x_1)}{(x - x_1)^2 + y^2} - \frac{A_0(x - x_2)}{(x - x_2)^2 + y^2} \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= \frac{A_0y}{(x - x_1)^2 + y^2} - \frac{A_0y}{(x - x_2)^2 + y^2} \end{aligned} \quad (7)$$

柯西—黎曼方程

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad (8)$$

所以

$$\begin{aligned} U &= \int \frac{\partial V}{\partial x} dy = A_0 \int \frac{(x - x_1)}{(x - x_1)^2 + y^2} dy - \int \frac{(x - x_2)}{(x - x_2)^2 + y^2} dy = \\ &A_0 \arctan \frac{y}{x - x_1} - A_0 \arctan \frac{y}{x - x_2} + c(x) \end{aligned} \quad (9)$$

又

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= -A_0 \frac{y/(x - x_1)^2}{1 + (y/(x - x_1))^2} + A_0 \frac{y/(x - x_2)^2}{1 + (y/(x - x_2))^2} = \\ &\frac{-A_0y}{(x - x_1)^2 + y^2} + \frac{-A_0y}{(x - x_2)^2 + y^2} + c'(x) \end{aligned}$$

由上式及(7)、(8)式可知

$$c'(x) = 0 \Rightarrow c(x) = c$$

因而相应的电场线函数为

$$U(x, y) = A_0 \arctan \frac{y}{x - x_1} - A_0 \arctan \frac{y}{x - x_2} \quad (10)$$

其中 A_0 满足(5)式。利用等势线描绘中的相关常数, 并且令电场线函数分别等于 $U = 0.68, 1.3, 2.0$,

3.0, 4.0, 5.0, 6.0, 7.0, 8.0, 9.0, 9.6, 10.3V/m, 即可作出 12 条相应的电场线曲线, 如图 7 中实线簇所示。图 7 完整地描绘出了分离圆柱面带电导体之间复连通区域的静电场图形。

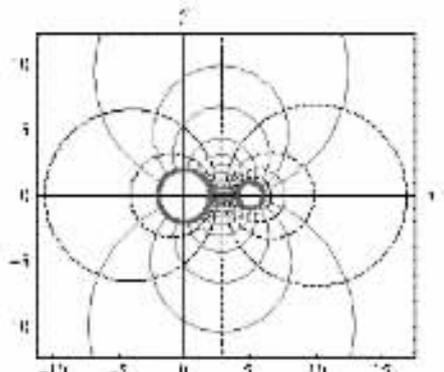
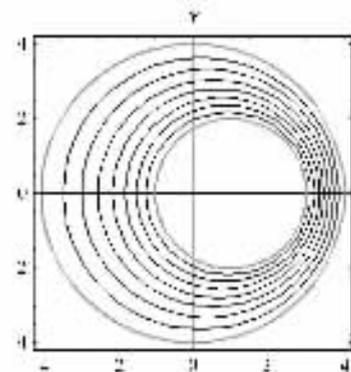
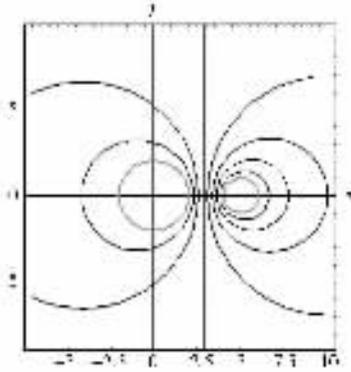


图 5 分离圆柱面带电导体的等势线簇

图 6 同心圆柱面带电导体的等势线簇

图 7 分离圆柱面带电导体的电场线簇和等势线簇

4 讨论

1) 虽然常数 C_0, A_0, x_1, x_2 的表达式较复杂, 但它们都是用初等函数表示的。因此, 由(1)式决定的 $x-y$ 平面的电势分布 $V(x, y)$ 仍是初等函数, 并且是经严格推导出来的。通过对(1)式的 V 进行梯度运算: $V = -\nabla V$, 还可求出电场强度, 并且场强 E 的精确解也是初等函数。

2) 由(1)式不难推出等势线簇方程

$$\left[x - \frac{Cx_2 + x_1}{C-1} \right]^2 + y^2 = \left(\frac{Cx_2 - x_1}{C-1} \right)^2 + \frac{x_1^2 - x_2^2}{C-1} \quad (11)$$

其中常数 C 与等势线对应的电势 V_0 , 以及(4)、(5)式表示的 C_0, A_0 有如下关系

$$C = \exp[2(V_0 - C_0)/A_0]$$

3) (4)式所表示的等势线的几何图形代表 $x-y$ 平面的圆簇(圆, 直线), 可由 Mathematica5.0 描绘出的隐函数图形给予充分证实。当等势线常数 C 分别等于 2.0, 10.0V 时, 描绘出的图形确为两导体圆柱(等势体)的圆截面, $C = 5.0V$ 时, 等势线为直线(可视为曲率无限大的圆周), 当标度足够大时, 其余等势线均可描绘为闭合圆周曲线。基于同样的理由, 可以说明图 6 的等势线图形与(11)式是完全一致的, 均代表圆簇。

4) 由(10)式不难推出电场线簇方程

$$\left(x - \frac{x_1 + x_2}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{x_1 - x_2}{2 \tan(E_0/A_0)} \right)^2 =$$

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right)^2 + \left(\frac{x_1 - x_2}{2 \tan(E_0/A_0)} \right)^2 - x_1 x_2 \quad (12)$$

其中 E_0 为电场线簇常数。 E_0 取不同的值, 则画出空间不同方位走向的电场线。(12)式表示的电场线簇亦为圆簇。

参考文献:

[1] 胡先权, 胡文江, 马勇. 偏心圆柱面与分离圆柱面带电导体等势面的统一描述[J]. 大学物理, 2004, 23(8): 20-23.

[2] 胡先权, 胡文江, 邓树申. 偏心圆柱面静电场的求解[J]. 重庆师范学院学报(自然科学版), 1999, 16(3): 6-10.

[3] 洪维恩. 数学运算大师 - Mathematica 4[M]. 魏宝琛改编. 北京: 人民邮电出版社, 2002. 229-249.

[4] 阎贵卿, 阎毅. 近代数学物理理论计算与可视化技术[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 2000. 236-251.

[5] 梁昆森. 数学物理方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 1998. 21-26, 196-197.

[6] FEYNMAN R P. The Feynman Lectures On Physics[M]. Addison-Wesley Publishing Co, 1966.

[7] 吴崇试. 数学物理方法[M]. 北京: 北京大学出版社, 1999. 17-21.

(责任编辑 许文昌)