

# 三维测量中的照相机单机定标原理和实验研究\*

王莉, 朱仁江, 戴特力

(重庆师范大学 物理与信息技术学院, 重庆 400047)

摘要: 在分析了普通数码相机中的 CCD 的透视投影矩阵的内外参数, 及它们的相互关系的基础上, 研究了单个 CCD 用作三维测量的快速定标方法。校正实验采用 VC++ 程序提取靶图基点的像素坐标值, 用最小二乘法求解构造透视投影矩阵元。实验结果表明, 本方法效果理想, 精度较高。

关键词: 被动三维参量; CCD 定标; 最小二乘法

中图分类号: TP391

文献标识码: A

文章编号: 1672-6693(2005)03-0090-04

## The Principle and Experimental Study in 3D Measure of Single Camera Calibration

WANG Li, ZHU Ren-jiang, DAI Te-li

(College of Physics and Information Technology, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: After analyzing the intrinsic and external parameters of projection matrix of average digital camera, and the relations of them, a fast calibration method in 3D by single camera has been studied. Picking up the basic points from the target map by VC++, the projection matrix has been constituted by the least-squares methods during the calibration experiment. The results of experiment indicate the method is good and its precision is rather high.

Key words: passive 3D measure; CCD calibration; least-squares methods

本文提出了一种单个照相机的快速定标方法, 定标靶图为平面型(二维), 要求照相机的镜头与靶图平面保持垂直, 使得  $Z_r$  为定值, 从而简化了计算量。照相机获取的图像传入计算机, 采用 VC++ 程序提取靶图基点在位图上像素坐标值。用最小二乘法求出透视投影矩阵元后, 再根据计算出的投影矩阵, 反求靶图上非基点视觉坐标。实验结果证明校正效果理想, 精度较高。

### 1 被动三维测量照相机单机校正理论基础

1.1 归一化成像坐标系与世界坐标系之间的转换  
如图 1 所示, 理想的归一化图像平面  $(\hat{c} - \hat{u}\hat{v})$  平行于照相机的物理成像平面  $(c - uv)$ , 且共  $Z$  轴, 也就是照相机上的光轴。归一化图像平面的  $\hat{c}$  点到世界坐标系的原点  $o$  距离为单位 1, 由透视方程可得:  $\hat{u} = \frac{x}{z}$  和  $\hat{v} = \frac{y}{z}$ 。这里  $P(x, y, z, 1)^T$  为图 1 中世界坐标

系  $(o - xyz)$  的齐次坐标;  $\hat{p}(\hat{u}, \hat{v}, 1)^T$  为图 1 中归一化图像平面坐标系  $(\hat{c} - \hat{u}\hat{v})$  的坐标;  $p(u, v, 1)^T$  为图 1 中物理成像平面坐标系  $(c - uv)$  的坐标, 物理成像平面坐标系也就是通常所说的照相机的坐标系<sup>[1]</sup>。

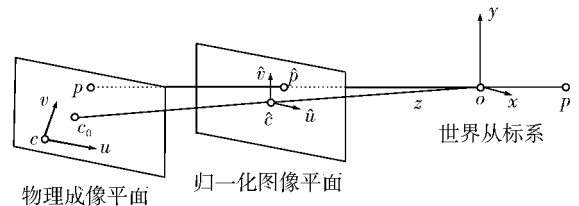


图 1 物理成像和归一化成像坐标系

### 1.2 照相机的内参数

照相机的坐标系与世界坐标系之间的映射关系为:

$$\begin{cases} u = \frac{kfx}{z} \\ v = \frac{lfy}{z} \end{cases} \quad (1)$$

式(1)中  $u, v$  表示以像素为单位的图像坐标值,

\* 收稿日期: 2005-03-25 修回日期: 2005-06-08

作者简介: 王莉(1976-), 女, 四川达州人, 硕士研究生, 主要研究方向为信息光学。

由于每个像素不是标准的正方形,  $k^{-1}, l^{-1}$  分别表示物理像面上每个像素的长和宽, 简化  $a = kf, \beta = kl$ , 照相机坐标系的原点  $c_0$  并没有在光轴  $c_0(0, 0)$  上, 而是在点  $c_0(u_0, v_0)$  上<sup>[2]</sup>, 故式(1)可表示为:  $u = \frac{ax}{z}$

+  $u_0$  和  $v = \frac{\beta y}{z} + v_0$ , 由于制造原因, 照相机坐标系的两个坐标轴之间不是  $90^\circ$ , 而是  $\theta$  (接近  $90^\circ$ ), 即为

$$\begin{cases} u = \frac{ax}{z} - \frac{ay \cot \theta}{z} + u_0 \\ v = \frac{\beta y}{z \sin \theta} + v_0 \end{cases} \quad (2)$$

将式(2)改写成齐次坐标形式

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{z} \begin{pmatrix} a & -a \cot \theta & u_0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta}{\sin \theta} & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = (K \ 0)^w P \quad (3)$$

式(3)中  $K$  称为内参数矩阵, 共含有 5 个内部参数 ( $\alpha, \beta, u_0, v_0, \theta$ ),  ${}^w P$  为  $P$  点在世界坐标系中的齐次坐标<sup>[3]</sup>。

### 1.3 照相机的外参数

世界坐标系的一点  $P$  在照相机坐标系表示为:  ${}^c p = ({}^c_w R \quad {}^c O_w) \begin{pmatrix} {}^w P \\ 1 \end{pmatrix}$ , 这里  $({}^c_w R \quad {}^c O_w)$  为世界坐标系到照相机坐标系的变换矩阵,  $R = {}^c_w R$ , 为旋转矩阵,  $t = {}^c O_w$  为平移矢量。代入式(3), 可得

$$p = \frac{1}{z} MP \quad (4)$$

式(4)中透视投影矩阵  $M$  可改写成为

$$M = K \otimes (R \ t) = \begin{pmatrix} \alpha r_1^T - a \cot \theta r_2^T + u_0 r_3^T & \alpha t_x - a \cot \theta t_y + u_0 t_z \\ \frac{\beta}{\sin \theta} r_2^T + v_0 r_3^T & \frac{\beta}{\sin \theta} t_y + v_0 t_z \\ r_3^T & t_z \end{pmatrix} \quad (5)$$

式(5)中  $R = \begin{pmatrix} r_1^T \\ r_2^T \\ r_3^T \end{pmatrix}$ ,  $t = \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix}$ ,  $\otimes$  表示矩阵直积, 由此可

以看出投影矩阵共有 6 个外参数 ( $r_1^T, r_2^T, r_3^T, t_x, t_y, t_z$ )。

### 1.4 照相机校正方程组

为了表达方便,  $3 \times 4$  投影矩阵  $M$  可表示为  $M^T = (m_1, m_2, m_3)$ , 其中  $m_1, m_2, m_3$  均是 4 分量的行矢量, 代表  $M$  的一行。将投影方程  $p = \frac{1}{z} MP$  用于靶图上选中的基点  $P_i (i = 1, \dots, 6)$ , 可得下列线性方程组

$$\begin{matrix} pm = 0 & (6) \\ \text{式(6)中 } p = \begin{pmatrix} p_1^T & 0^T & -u_1 P_1^T \\ 0^T & P_1^T & -v_1 P_1^T \\ P_n^T & 0^T & -u_n P_n^T \\ 0^T & P_n^T & -v_n P_n^T \end{pmatrix}, \text{投影点 } P^i \text{ 为第 } i \text{ 个} \end{matrix}$$

基点的 4 个齐次坐标构成的列矢量,  $u_i, v_i$  为第  $i$  个基点在照相机坐标系上的像素坐标值, 在图像上读出其值。  $3 \times 4$  投影矩阵  $M$  共有 11 个独立的参数 (5 个内部参数, 6 个外部参数), 世界坐标系中的每一点都对应两个线性方程, 只需选取世界坐标系上的  $n \geq 6$  点的坐标值 ( $x, y, z$ ), 和与其相应的照相机坐标系上的图像坐标 ( $u, v$ ), 便可求出它的投影矩阵  $M$ , 从已知的投影矩阵便可推算出照相机的内外参数。

## 2 被动三维测量中照相机单机校正实验

### 2.1 实验装置和原理

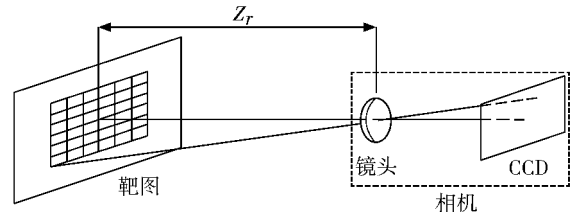


图2 实验装置图

实验装置是由靶图、数码相机及平台构成。靶图平面调整到与相机光轴垂直的位置, 测量靶图表面到相机镜头中央的距离为  $Z_r$ , 然后在同一个位置上拍摄 10 张照片。在一个平面靶图上人为选定 8 个基点, 这 8 个基点的世界坐标值与图像坐标值均可读测, 根据这两个坐标系的影射关系, 算出其投影矩阵。再由这个求出投影矩阵, 根据其它非基点在位图上的像素坐标值, 反求其世界坐标值, 并计算其误差。

由式(4)可得  $u = \frac{m_1 \cdot P}{m_3 \cdot P}$ ,  $v = \frac{m_2 \cdot P}{m_3 \cdot P}$ 。其中  $m_1 = (m_{11}, m_{12}, m_{13}, m_{14})$ ,  $m_2 = (m_{21}, m_{22}, m_{23}, m_{24})$ ,  $m_3 = (m_{31}, m_{32}, m_{33}, m_{34})$ , 简化其形式可得

$$\lambda \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 \cdot P \\ m_3 \cdot P \\ m_2 \cdot P \\ m_3 \cdot P \end{pmatrix} \quad (7)$$

即为  $v(m_1 \cdot P) - u(m_2 \cdot P) = 0$  (8)

式(7)中的  $\lambda$  为系数, 由于是平面靶图, 选取的基点  $z_i = 0$ , 这里将世界坐标系简化为二维;  $Z$  轴共

轴,且 CCD 与靶图平面之间的  $Z$  轴距离固定,这里实测值  $z_r = 100$  cm。为了采用最小二乘法,将其方程变为式(10)

由式(8)可得

$$\begin{pmatrix} v_1x_1 & v_1y_1 & v_1 & -u_1x_1 & -u_1y_1 & -u_1 \\ v_2x_2 & v_2y_2 & v_2 & -u_2x_2 & -u_2y_2 & -u_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_nx_n & v_ny_n & v_n & -u_nx_n & -u_ny_n & -u_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{12} \\ m_{14} \\ m_{21} \\ m_{22} \\ m_{24} \end{pmatrix} = 0 \quad (9)$$

式(9)移项可得

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n & y_n & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_n & y_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{12} \\ m_{14} \\ m_{21} \\ m_{22} \\ m_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \\ v_n \end{pmatrix} \quad (10)$$

解线性方程的最小二乘问题的方法<sup>[4]</sup>如下:1)超定方程组  $AX = B$ ,其中  $A$  为  $m \times n$  ( $m \geq n$ ) 的矩阵,且列线性无关;2)首先对矩阵  $A$  进行奇异值分解; $A = U \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^T$ ;3)然后利用奇异值分解式计算  $A$  的广义逆  $A^+$ ;  $A^+ = V_1 \Sigma^{-1} U_1^T$ ;4)最后利用广义逆  $A^+$  求超定方程组  $X = A^+ B$ 。

由于一个点对应两个线形方程,投影矩阵里只有 6 个未知数 ( $m_{11}, m_{12}, m_{14}, m_{21}, m_{22}, m_{24}$ ),在理论上只需找到  $n \geq 3$  的点的图像坐标及它们的世界坐标,便可求得投影矩阵,本试验取了 8 个点,使得这个方程为线性方程,为过度约束,即超定方程。在拍

摄的 10 张靶图照片中,采用平均法取其固定点所在像素的平均值 ( $u, v$ ),最后用最小二乘法算出投影矩阵。

### 2.2 实验步骤

1)在平面靶图上标定坐标,这个靶图由  $16 \times 10$  个  $1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}$  的黑白相间的方块构成,这个平面靶图的原点定在靶图的左上角。

2)靶图放置在数码相机的前方,且保持平面靶图垂直于数码相机的镜头的光轴,镜头与靶图之间的距离为  $100 \text{ cm}$ ,其目的是固定  $Z_r = 100 \text{ cm}$ ,让世界坐标系与照相机坐标系共  $Z$  轴。

3)相机固定在一个位置上,保持镜头光轴与靶图平面垂直,拍摄靶图照片 10 张,再将这些照片传入给电脑。

4)通过 VC++ 的图像处理程序<sup>[5]</sup>,电脑里可以找到靶图上任意一点在照相机 CCD 像面上的像素的坐标 ( $u, v$ );这样连续找 8 个固定点在照相机坐标系上的坐标 ( $u, v$ )。

5)重复上面的操作,在这 10 张照片上确定这 8 个固定点在照相机坐标系上的坐标 ( $u, v$ )。

6)采用平均法取这 8 个固定点所对应的像素平均值 ( $u, v$ )。

7)根据这 8 个点的世界坐标值及其像素平均值输入程序,用最小二乘法程序算出投影矩阵。

8)用计算出的投影矩阵检验世界坐标系与照相机坐标系的影射关系,计算出误差。

### 2.3 实验数据

实验数据如表 1 所示。

### 2.4 实验结果

根据表 1 的实验数据所算出的投影矩阵  $M$  为

表 1 8 个基点的世界坐标和图像坐标

世界坐标	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$
投影坐标	(1,1)	(3,3)	(3,6)	(5,2)	(4,5)	(7,3)	(6,5)	(7,1)
1 ( $u, v$ )	(63,60)	(161,157)	(161,305)	(260,106)	(211,255)	(359,156)	(310,255)	(359,56)
2 ( $u, v$ )	(64,60)	(162,157)	(162,305)	(260,107)	(211,256)	(359,155)	(310,255)	(359,57)
3 ( $u, v$ )	(64,60)	(162,156)	(162,305)	(260,106)	(211,255)	(359,156)	(310,254)	(358,57)
4 ( $u, v$ )	(63,60)	(162,156)	(162,304)	(260,106)	(211,255)	(359,155)	(310,254)	(359,56)
5 ( $u, v$ )	(63,60)	(161,156)	(162,305)	(260,106)	(211,255)	(359,155)	(310,254)	(359,57)
6 ( $u, v$ )	(63,60)	(161,157)	(162,305)	(260,106)	(212,255)	(359,155)	(310,254)	(358,56)
7 ( $u, v$ )	(63,60)	(161,156)	(162,305)	(260,106)	(211,255)	(359,155)	(310,254)	(359,56)
8 ( $u, v$ )	(63,60)	(162,157)	(162,304)	(260,106)	(211,255)	(359,155)	(310,254)	(358,56)
9 ( $u, v$ )	(63,60)	(162,157)	(162,305)	(260,106)	(211,255)	(359,155)	(310,254)	(358,57)
10 ( $u, v$ )	(63,60)	(162,156)	(162,305)	(260,107)	(211,255)	(359,155)	(310,254)	(358,57)
平均值	(63.2,60)	(161.6,156.5)	(161.9,304.8)	(260,106.2)	(211.9,255.9)	(359,155.8)	(310,254.8)	(358.5,56.5)

$$M = \begin{pmatrix} 4.949265646e+001 & 1.5061447e-001 & 1.3577608e+001 \\ -4.95302364e-001 & 4.9353791e+001 & 1.0451162e+001 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 2.5 实验验证

根据已知的世界坐标  $(x, y)$  和投影矩阵  $M$  及  $Z_r$ , 由式(4)可得对应点在照相机坐标系上的图像坐标。验证结果如表 2。

表 2 由世界坐标推算图像坐标

$(x, y)$	计算值 $(u, v)$	实际值 $(u, v)$	误差/pixel	
			$u(-\text{实际值} - \text{计算值})$	$v(-\text{实际值} - \text{计算值})$
(8,5)	(408.5, 253.3)	(408, 254)	-0.5	0.7
(7,6)	(359.3, 303.1)	(359, 304)	-0.3	0.9
(9,10)	(458.5, 499.5)	(458, 500)	-0.5	0.5
(5,5)	(260.7, 254.7)	(261, 255)	0.3	0.3
(9,6)	(457.9, 302.1)	(457, 303)	-0.9	0.9
(3,7)	(162.4, 354.4)	(162, 355)	-0.4	0.6
(4,2)	(210.9, 107.2)	(210, 108)	-0.9	0.8

由投影矩阵  $M$ , 可得其逆矩阵:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 2.029750e-002 & -6.194249e-005 & -2.749440e-001 \\ 2.037006e-004 & 2.026125e-002 & -2.145193e-001 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

由式(4)可得  $M^{-1}zp = P$  (11)

已知图像坐标、投影逆矩阵及  $Z_r$ , 由式(11)可得对应点的世界坐标, 验证结果如表 3。

## 2.6 实验结论

本文提出了一种不用结构光对摄像机内外参数快速定标方法。该方法只需保持照相机镜头与平面模板垂直, 保证共  $Z$  轴, 从而减少了投影矩阵的未知矩阵元, 简化了算法。实验结果证明定标误差在

像素的小数级。其误差的原因是由于图形噪声的存在, 影响了计算精度, 如果将输入电脑的靶图照片预先进行图像去噪处理后, 计算精度会大大提高。

表 3 由图像坐标推算世界坐标

$(u, v)$	计算值 $(x, y)$	实际值 $(x, y)$	误差/cm	
			$x(-\text{实际值} - \text{计算值})$	$y(-\text{实际值} - \text{计算值})$
(113, 109)	(2.012, 2.017)	(2, 2)	-0.012	-0.017
(211, 255)	(3.992, 4.995)	(4, 5)	0.008	0.005
(310, 205)	(6.004, 4.002)	(6, 4)	-0.004	-0.002
(405, 155)	(7.934, 3.009)	(8, 3)	0.066	-0.009
(503, 303)	(9.916, 6.027)	(10, 6)	0.084	-0.027
(359, 256)	(6.996, 5.046)	(7, 5)	0.004	-0.046
(457, 402)	(8.976, 8.024)	(9, 8)	0.023	-0.024

## 参考文献:

- [1] FORSYTH D A, PONCE J. Computer Vision: A Modern Approach[M]. 北京:清华大学出版社, 2004.
- [2] REICH C, RITTER R, THESING J. 3-D Shape Measurement of Complex Objects by Combining Photogrammetry and Fringe Projection[J]. Optical Engineering, 2000, 39(1): 224-231.
- [3] INFORM D, REICH C. 3D - measurement of Complex Objects[A]. In Proc SPIE[C]. 1996, 2787:53-61.
- [4] 徐士良. 常用算法程序集[M]. 北京:清华大学出版社, 2004.
- [5] 何斌, 马天予, 王运坚. Visual C++ 数字图像处理[M]. 北京:人民邮电出版社, 2003.

(责任编辑 李若溪)