2005 年 12 月 重庆师范大学学报(自然科学版) Dec. 2005
第 22 卷 第 4 期 Journal of Chongqing Normal University(Natural Science Edition) Vol. 22 No. 4

数列与相应函数列的上、下极限间关系探讨*

沈 波
(达州职业技术学院 公共课教研室, 四川 达州 635000)

摘 要:在数学分析中,数列上、下极限的计算有一定的难度,本文就几种特殊情况,通过对数列上、下极限与相应函数列的上、下极限之间一些定理的证明及应用举例,从而总结出在计算函数列的上、下极限时的简便算法。

关键词:上极限;下极限;函数列极限;连续

中图分类号:O171 **文献标识码**:A **文章编号**:1672-6693(2005)04-0100-03

The Connection of Have Limit and Make Limit of Several and the Ones of Corresponding Function

SHEN Bo
(Teaching and Research Section of Public Lesson, Dazhou Profession Technology College, Dazhou Sichuan 635000, China)

Abstract: In maths, it is difficult to calculate have limit and make limit of several. Now on the special circumstances of several, we put forward a simple and convenient algorithm about limit.

Key words: have limit; make limit; function arranges limit; succession

1 主要定理及证明

定理 1[1] 设 $\{x_n\}$ 为一实数列,且 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = a$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = b$($a$、$b$ 为有限数),又设函数 $f(x)$ 在包含 a、b 的区间(m,M)上单调,在点 $x=a$、b 处连续,则

1)当 $f(x)$ 单调递增时,有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, f(x_n) = f(\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n) = f(a),$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, f(x_n) = f(\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n) = f(b)。$$

2)当 $f(x)$ 单调递减时,有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, f(x_n) = f(\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n) = f(b),$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, f(x_n) = f(\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n) = f(a)。$$

证明 1)因为函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处连续,故对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$($\delta<\min\{a-m, M-a\}$),使得当 $|x-a|<\delta$ 时,有 $f(a)-\varepsilon<f(x)<f(a)+\varepsilon$ 成立。取 a_1、a_2 满足 $a-\delta<a_1<a<a_2<a+\delta$,由函数 $f(x)$ 是单调递增的,知

$$f(a)-\varepsilon<f(a_1)\leqslant f(x)\leqslant f(a_2)<f(a)+\varepsilon \qquad (x\in[a_1,a_2])$$

成立。另一方面,由 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = a$,可知在数列 $\{x_n\}$ 中大于 a_1 的项有无穷多项,大于 a_2 的项至多为有限多项,从而在 $\{f(x_n)\}$ 中大于或等于 $f(a_1)$ ($>f(a)-\varepsilon$)的项有无穷多项,大于或等于 $f(a_2)$ ($<f(a)+\varepsilon$)的项至多有限多项,这就证明了

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, f(x_n) = f(\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n) = f(a)。$$

类似可证 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, f(x_n) = f(\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n) = f(b)$。

2)因为函数 $f(x)$ 在点 $x=b$ 处连续,故对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$($\delta<\min\{b-m, M-b\}$),使得当 $|x-b|<\delta$ 时,有

$$f(b)-\varepsilon<f(x)<f(b)+\varepsilon$$

成立。取 b_1、b_2 满足 $b-\delta<b_1<b<b_2<b+\delta$,由 $f(x)$ 是单调递减的,知

$$f(b)-\varepsilon<f(b_2)\leqslant f(x)\leqslant f(b_1)<f(b)+\varepsilon \qquad (x\in[b_1,b_2])$$

成立。另一方面,由 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = b$,可知在数列 $\{x_n\}$ 中小于 b_2 的项有无穷多项;小于 b_1 的项至多为有限多项。从而在 $\{f(x_n)\}$ 大于或等于 $f(b_2)$ ($>f(b)-$

---

* 收稿日期:2005-04-21
作者简介:沈波(1971-),女,四川大竹人,讲师,研究方向为数学分析教学法。

ε)的项有无穷多项;大于或等于 $f(b_1)$($<f(b)+\varepsilon$)的项至多有限多项。这就证明了

$$\varlimsup_{n\to\infty} f(x_n)=f(\varliminf_{n\to\infty} x_n)=f(b)。$$

类似可证 $\varliminf\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n)=f(a)$。 证毕

注意 定理1中函数 $f(x)$ 的单调性、连续性两个条件缺一不可,否则将产生矛盾[2],例如:

1)函数

$$f(x)=\begin{cases}x, & 当\ x\leqslant 1\ 时\\ x+1, & 当\ x>1\ 时\end{cases}$$

在($-\infty$,$+\infty$)内严格单调递增,在点 $x=1$ 处不连续,而数列 $x_n=1+\frac{1}{n}$($n=1、2、\cdots$)的上极限为1。若利用定理1的结论计算,则有

$$\varlimsup_{n\to\infty} f(x_n)=f(\varlimsup_{n\to\infty} x_n)=f(1)=1;$$

同时 $f(x_n)>2$($n=1、2、\cdots$),所以有 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} f(x_n)\geqslant 2$,从而产生矛盾。

2)函数 $f(x)=\cos x$ 在($-\pi$,π)内不严格单调。取数列 $x_n=\frac{(-1)^{[\frac{n}{3}]}+(-1)^{[\frac{n+1}{3}]}}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$,其中 $\left[\frac{n}{3}\right]$,$\left[\frac{n+1}{3}\right]$ 分别表示 $\frac{n}{3}$,$\frac{n+1}{3}$ 的最大整数部分,它有聚点 $-\frac{\pi}{2}$、0、$\frac{\pi}{2}$。故 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n=\frac{\pi}{2}$,$\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n=-\frac{\pi}{2}$。若按定理1计算,则有 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} f(x_n)=0$,而事实上 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} f(x_n)=1$,这也产生了矛盾[3]。

定理2 设 $\{x_n\}$ 为一实数列,且 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$,$\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty$,如果 $f(x)$ 是定义在($-\infty$,$+\infty$)上的实函数,且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$,$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$,($a$、$b$ 为有限数),则

1)当 $f(x)$ 在($-\infty$,$+\infty$)上单调递增时,有

$$\varlimsup_{n\to\infty} f(x_n)=f(\varlimsup_{n\to\infty} x_n)=a,\varliminf_{n\to\infty} f(x_n)=f(\varliminf_{n\to\infty} x_n)=b$$

2)当 $f(x)$ 在($-\infty$,$+\infty$)上单调递减时,有

$$\varlimsup_{n\to\infty} f(x_n)=f(\varliminf_{n\to\infty} x_n)=b,\varliminf_{n\to\infty} f(x_n)=f(\varlimsup_{n\to\infty} x_n)=a$$

证明 1)若 $f(x)$ 在($-\infty$,$+\infty$)上单调递增,且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$,$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$,则有 $b\leqslant f(x)\leqslant a$($x\in(-\infty,+\infty)$)。对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $X_1>0$,使得当 $x>X_1$ 时有 $a-\varepsilon<f(x)\leqslant a$ 成立。取 $A>X_1$,则有 $f(A)>a-\varepsilon$,又由于 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$,故在 $\{x_n\}$ 中有无穷多项大于 A,从而由 $f(x)$ 单调递增可知,在 $\{f(x_n)\}$ 中有无穷多项大于或等于 $f(A)$($>a-\varepsilon$),即在 $\{f(x_n)\}$ 中有无穷多项大于 $a-\varepsilon$,其所有项都不超过 a。故有 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n)=a$。

类似可证 $\varliminf\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n)=b$。

2)如果 $f(x)$ 在($-\infty$,$+\infty$)上单调递减,且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$,$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$,则有 $a\leqslant f(x)\leqslant b$($x\in(-\infty,+\infty)$),对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $X_2>0$,使得当 $x<-X_2$ 时,有 $b\geqslant f(x)>b-\varepsilon$。

取 $B<-X_2$,则有 $f(B)>b-\varepsilon$,又由于 $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty$,故在 $\{x_n\}$ 中小于 B 的项有无穷多项,而由 $f(x)$ 单调递减可知,在 $\{f(x_n)\}$ 中大于或等于 $f(B)$($>b-\varepsilon$)的项有无穷多项,即在 $\{f(x_n)\}$ 中大于 $b-\varepsilon$ 的项有无穷多项,其所有项都不超过 b。

故有 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n)=b$。

类似可证 $\varliminf\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n)=a$。 证毕

定理3 设 $\{x_n\}$ 为一实数列,且 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$,$\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty$,则

1)当 $f(x)$ 在($-\infty$,$+\infty$)上单调递增,且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$,$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ 时,有

$$\varlimsup_{n\to\infty} f(x_n)=f(\varlimsup_{n\to\infty} x_n)=+\infty,\varliminf_{n\to\infty} f(x_n)=f(\varliminf_{n\to\infty} x_n)=-\infty。$$

2)当 $f(x)$ 在($-\infty$,$+\infty$)上单调递减,且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$,$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ 时,有

$$\varlimsup_{n\to\infty} f(x_n)=f(\varliminf_{n\to\infty} x_n)=+\infty,\varliminf_{n\to\infty} f(x_n)=f(\varlimsup_{n\to\infty} x_n)=-\infty。$$

证明 1)由条件可知,对任意的 $M>0$,存在 $X_1>0$,使得当 $x>X_1$ 时,有 $f(x)>M$。又因为 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$,所以在 $\{x_n\}$ 中有无穷多项大于 X_1,从而由 $f(x)$ 单调递增可知,在 $\{f(x_n)\}$ 中有无穷多项大于或等于 $f(X_1)$($>M$)。故有

$$\varlimsup_{n\to\infty} f(x_n)=f(\varlimsup_{n\to\infty} x_n)=f(+\infty)=+\infty。$$

类似可证

$$\varliminf_{n\to\infty} f(x_n)=f(\varliminf_{n\to\infty} x_n)=f(-\infty)=-\infty。$$

2)由已知条件可知,对任意的 $M>0$,存在 $X_2>0$,使得当 $x<-X_2$ 时,有 $f(x)>M$。取 $B_2<-X_2$,则 $f(B_2)>M$。又因为 $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty$,所以在 $\{x_n\}$ 中有无穷多项小于 B_2。再由 $f(x)$ 单调递减可知,在 $\{f(x_n)\}$ 中有无穷多项大于或等于 $f(B_2)$($>M$),故有

$$\varlimsup_{n\to\infty} f(x_n)=f(\varliminf_{n\to\infty} x_n)=f(-\infty)=+\infty。$$

类似可证

$$\varliminf_{n\to\infty} f(x_n)=f(\varlimsup_{n\to\infty} x_n)=f(+\infty)=-\infty。$$ 证毕

2　应用举例

若上面 3 个定理中所述情况交替出现时，则可利用定理中的有关条件及结论加以解决。利用以上结论，在求数列的上、下极限时，显得极为简便，下面举例说明。

例　求下列数列的上、下极限[4]。

$$1)\left\{\arctan\left[(-1)^n\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right]\right\};$$

$$2)\left\{\operatorname{arccot}\left[(-1)^n\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right]\right\};$$

$$3)\left\{\ln\left[1+\frac{1+(-1)^n}{2}n\right]\right\};$$

$$4)\left\{-\ln\left[1+\frac{1+(-1)^n}{2}n\right]\right\}。$$

解　令 $a_n=(-1)^n\dfrac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$，则有

$$\varlimsup_{n\to\infty}a_n=\varlimsup_{n\to\infty}(-1)^n\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=1,$$

$$\varliminf_{n\to\infty}a_n=\varliminf_{n\to\infty}(-1)^n\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=-1$$

而函数 $\arctan x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格单调增且连续；$\operatorname{arccot} x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格单调减且连续，由定理 1 得

$$1)\quad\varlimsup_{n\to\infty}\arctan\left[(-1)^n\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right]=$$

$$\arctan(\varlimsup_{n\to\infty}a_n)=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$$

$$\varliminf_{n\to\infty}\arctan\left[(-1)^n\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right]=$$

$$\arctan(\varliminf_{n\to\infty}a_n)=\arctan(-1)=-\frac{\pi}{4}。$$

$$2)\quad\varlimsup_{n\to\infty}\operatorname{arccot}\left[(-1)^n\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right]=$$

$$\operatorname{arccot}(\varliminf_{n\to\infty}a_n)=\operatorname{arccot}(-1)=\frac{3\pi}{4},$$

$$\varliminf_{n\to\infty}\operatorname{arccot}\left[(-1)^n\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right]=$$

$$\operatorname{arccot}(\varlimsup_{n\to\infty}a_n)=\operatorname{arccot}1=\frac{\pi}{4}。$$

又令 $b_n=1+\dfrac{1+(-1)^n}{2}n$，则 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$，$\varliminf\limits_{n\to\infty}b_n=1$。而函数 $\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续地单调递增，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$；函数 $-\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续地单调递减，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}(-\ln x)=-\infty$，由定理 2 及定理 3 可得

$$3)\varlimsup_{n\to\infty}\ln\left[1+\frac{1+(-1)^n}{2}n\right]=\ln[\varlimsup_{n\to\infty}b_n]=+\infty,$$

$$\varliminf_{n\to\infty}\ln\left[1+\frac{1+(-1)^n}{2}n\right]=\ln[\varliminf_{n\to\infty}b_n]=\ln 1=0。$$

$$4)\quad\varlimsup_{n\to\infty}\left\{-\ln\left[1+\frac{1+(-1)^n}{2}n\right]\right\}=$$

$$-\ln[\varliminf_{n\to\infty}b_n]=-\ln 1=0$$

$$\varliminf_{n\to\infty}\left\{-\ln\left[1+\frac{1+(-1)^n}{2}n\right]\right\}=-\ln[\varlimsup_{n\to\infty}b_n]=-\infty。$$

参考文献：

[1] 华东师范大学数学系. 数学分析(上)[M]. 北京：高等教育出版社，1997.

[2] 李开慧. 一个极限分布定理的注记[J]. 重庆师范学院学报(自然科学版)，1992，9(2)：86-88.

[3] 蔡邦元. 一个函数极限概念问题的探讨[J]. 重庆师范学院学报(自然科学版)，1992，10(2)：89-90.

[4] 江泽坚，吴智泉，周光亚. 数学分析(上)[M]. 北京：人民教育出版社，1978.

(责任编辑　黄　颖)