2006 年 3 月 重庆师范大学学报(自然科学版) Mar. 2006
第 23 卷 第 1 期 Journal of Chongqing Normal University(Natural Science Edition) Vol. 23 No. 1

有限个广义渐近拟非扩张型映象公共不动点的逼近*

向 长 合
(重庆师范大学 数学与计算机科学学院,重庆 400047)

摘　要:引入具混合误差的 N 步迭代序列,并在一般的 Banach 空间上给出了具混合误差的 N 步迭代序列强收敛于有限个具有公共不动点的广义渐近拟非扩张型映象的一个公共不动点的充分必要条件。本文的结果推广了大量现有成果。

关键词:Banach 空间;渐近非扩张映象;渐近拟非扩张型映象;迭代序列;公共不动点;混合误差
中图分类号:O177.91　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2006)01-0006-04

Approximation of Common Fixed Points of a Finite Family of Generalized Asymptotically Quasi-nonexpansive Type Mappings

XIANG Chang-he
(College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract:This paper introduces N-step iterative sequence with mixed errors and gives a necessary and sufficient condition for the N-step iterative sequence with mixed errors to converges strongly to a common fixed point of a finite family of generalized asymptotically quasi-nonexpansive type mappings in a general Banach space. The result presented in this paper extends a great deal of the achievement now existed.

Key words:Banach space;asymptotically nonexpansive mappings;asymptotically quasi-nonexpansive type mappings;iterative sequence;common fixed point;mixed error

最近,文献[1]引入一类非常广泛的广义渐近拟非扩张型映象,并讨论了其不动点的逼近问题,得到如下主要结论。

定理 1[1]　设 E 是 Banach 空间,$T: E\to E$ 是广义渐近拟非扩张型映象,其渐近系数 k_n 满足 $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n-1)<\infty$。若 T 在 $F(T)$ 中的点处一致连续,任取一点 $x_0\in E$,$\{x_n\}$ 是由下式定义的具混合误差的 Ishikawa 迭代序列[2]

$$\begin{cases} x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n T^n y_n+u_n, \\ y_n=(1-\beta_n)x_n+\beta_n T^n x_n+v_n\ (n\geqslant 0), \end{cases}$$

其中 $\{\alpha_n\}$、$\{\beta_n\}$ 是 $[0,1]$ 中的两个数列且 $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n$ 收敛,$\{u_n\}$、$\{v_n\}$ 是 E 中两个点列,且 $\{v_n\}$ 有界同时 $\sum_{n=0}^{\infty}\|u_n\|$ 收敛。则 $\{x_n\}$ 强收敛于 T 在 E 中一个不动点的充要条件是 $\liminf_{n\to\infty} D(x_n,F(T))=0$,其中 $D(y,S)$ 表示点 y 到集合 S 的距离,即 $D(y,S)=\inf_{s\in S}\|y-s\|$。

受文献[3]的启发,本文进一步对有限个具有公共不动点的广义渐近拟非扩张型映象讨论其不动点的迭代逼近问题。所得结果是对文献[1～8]等的相应结论的推广。

---

* 收稿日期:2005-05-25
资助项目:国家自然科学基金项目(No. 10471159)
作者简介:向长合(1963-),男,四川岳池人,副教授,研究方向为非线性分析及微分方程。

1 预备知识

定义1 设 E 是Banach空间，C 是 E 中的非空子集，T 是从 C 到 C 的映象，$F(T)$ 是 T 的所有不动点构成的集合，

1)称 T 是渐近非扩张映象[4]，如果存在 $\{k_n\}\subset[1,\infty)$，$\lim\limits_{n\to\infty}k_n=1$，使得

$$\|T^nx-T^ny\|\leqslant k_n\|x-y\|,\ \forall n\geqslant1,\ \forall x,y\in C;$$

2)称 T 是渐近非扩张型映象[5]，如果 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sup\limits_{x,y\in C}(\|T^nx-T^ny\|^2-\|x-y\|^2)\leqslant0$；

3)称 T 是渐近拟非扩张映象[6]，如果 $F(T)$ 非空且存在 $\{k_n\}\subset[1,\infty)$，$\lim\limits_{n\to\infty}k_n=1$，使得

$$\|T^nx-p\|\leqslant k_n\|x-p\|,\ \forall x\in C,\ \forall p\in F(T),\ \forall n\geqslant1;$$

4)称 T 是渐近拟非扩张型映象[7]，如果 $F(T)$ 非空且 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sup\limits_{x\in C,p\in F(T)}(\|T^nx-p\|^2-\|x-p\|^2)\leqslant0$；

5)称 T 是广义渐近非扩张型映象[1]，如果存在 $\{k_n\}\subset[1,\infty)$，$\lim\limits_{n\to\infty}k_n=1$，使得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup_{x,y\in C}(\|T^nx-T^ny\|-k_n\|x-y\|)\leqslant0;$$

6)称 T 是广义渐近拟非扩张型映象[1]，如果 $F(T)$ 非空且存在 $\{k_n\}\subset[1,\infty)$，$\lim\limits_{n\to\infty}k_n=1$，使得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup_{x\in C,p\in F(T)}(\|T^nx-p\|-k_n\|x-p\|)\leqslant0。$$

注1 当 C 是 E 中有界子集时，渐近拟非扩张映象以及具有不动点的渐近非扩张映象和渐近非扩张型映象均属于渐近拟非扩张型映象且广义渐近非扩张型映象等价于渐近非扩张型映象，广义渐近拟非扩张型映象等价于渐近拟非扩张型映象。在一般情况下，渐近拟非扩张映象、渐近拟非扩张型映象以及具有不动点的渐近非扩张映象、渐近非扩张型映象和广义渐近非扩张型映象都是广义渐近拟非扩张型映象的特例[1]。

命题1 设 C 是Banach空间 E 中的非空子集，$T_1,T_2,\cdots,T_N:C\to C$ 是 N 个广义渐近拟非扩张型映象，其公共不动点集 $F=\bigcap\limits_{i=1}^{N}F(T_i)$ 非空，则存在 $\{k_n\}\subset[1,\infty)$，$\lim\limits_{n\to\infty}k_n=1$，使得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup_{1\leqslant i\leqslant N,x\in C,p\in F}(\|T_i^nx-p\|-k_n\|x-p\|)\leqslant0。$$

将此命题中的 k_n 称为 $T_1,T_2,\cdots,T_N$ 的公共渐近系数。

证明 由于 T_i 是广义渐近拟非扩张型映象，所以，存在 $\{k_n^{(i)}\}\subset[1,\infty)$，$\lim\limits_{n\to\infty}k_n^{(i)}=1$，使得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup_{x\in C,p\in F(T_i)}(\|T_i^nx-p\|-k_n^{(i)}\|x-p\|)\leqslant0,(\forall i=1,2,\cdots,N)。$$

取 $k_n=\max\{k_n^{(i)}:1\leqslant i\leqslant N\}$，则 $\{k_n\}\subset[1,\infty)$，$\lim\limits_{n\to\infty}k_n=1$，且

$$\sup_{x\in C,p\in F}(\|T_i^nx-p\|-k_n\|x-p\|)\leqslant\sup_{x\in C,p\in F(T_i)}(\|T_i^nx-p\|-k_n^{(i)}\|x-p\|),(\forall i=1,2,\cdots,N),$$

则 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sup\limits_{1\leqslant i\leqslant N,x\in C,p\in F}(\|T_i^nx-p\|-k_n\|x-p\|)\leqslant\max\limits_{1\leqslant i\leqslant N}\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sup\limits_{x\in C,p\in F(T_i)}(\|T_i^nx-p\|-k_n^{(i)}\|x-p\|)\leqslant0$。 证毕

定义2 设 E 是一Banach空间，$T_1,T_2,\cdots,T_N$ 是 N 个从 E 到 E 的映象，$\{x_n\}$ 是由下式归纳定义的迭代序列

$$\begin{cases}y_{n1}=(1-\beta_{n1})x_n+\beta_{n1}T_1^nx_n+v_{n1}\\ y_{n2}=(1-\beta_{n2})x_n+\beta_{n2}T_2^ny_{n1}+v_{n2}\\ \cdots\qquad\cdots\qquad\cdots\\ y_{n,N-1}=(1-\beta_{n,N-1})x_n+\beta_{n,N-1}T_{N-1}^ny_{n,N-2}+v_{n,N-1}\\ x_{n+1}=(1-\beta_{nN})x_n+\beta_{nN}T_N^ny_{n,N-1}+v_{nN}\end{cases}\quad(n\geqslant1)\tag{1}$$

其中 x_1 是 E 中给定的一点，$\{v_{ni}\}_{n=1}^{\infty}$ 是 E 中有界点列且 $\{\beta_{ni}\}_{n=1}^{\infty}\subset[0,1]$ $(i=1,2,\cdots,N)$，则 $\{x_n\}$ 称为具混合误差的 N 步迭代序列。

本文的目的就是对 N 个具有公共不动点的广义渐近拟非扩张型映象研究上述具混合误差的 N 步迭代序列的收敛性。为此，需要如下一些引理。

引理 1[8]　设 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$、$\{c_n\}$ 是 3 个非负数列,满足

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n < \infty,\ \sum_{n=n_0}^{\infty} c_n < \infty,\ a_{n+1} \leqslant (1+b_n)a_n + c_n \qquad (n \geqslant n_0)$$

其中 n_0 是某非负整数,则极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在。

引理 2　设 E 是赋范线性空间,$T_1,T_2,\cdots,T_N$ 是 N 个从 E 到 E 的具有公共不动点的映象,若 $T_1,T_2,\cdots,T_N$ 在公共不动点集 $F=\bigcap\limits_{i=1}^{N} F(T_i)$ 中的点处一致连续,即 $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$,当 $x\in E$, $p\in F$ 且 $\|x-p\|<\delta$ 时,有 $\|T_i x - T_i p\| = \|T_i x - p\| < \varepsilon$ $(\forall i=1,2,\cdots,N)$,则 F 是 E 中的闭子集。

证明　设 $\{p_n\}$ 是 F 中任一点列且在 E 中强收敛于点 p^*。

由于 $T_1,T_2,\cdots,T_N$ 在点集 F 中的点处一致连续,任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当 $x\in E$, $p\in F$,且 $\|x-p\|<\delta$ 时,有 $\|T_i x-p\|<\varepsilon$ $(\forall i=1,2,\cdots,N)$。

取 $\varepsilon_1=\min\{\varepsilon,\delta\}>0$,因为 $\{p_n\}$ 在 E 中强收敛于点 p^*,存在自然数 n_0,当 $n\geqslant n_0$ 时,$\|p^*-p_n\|<\varepsilon_1\leqslant\delta$,从而 $\|T_i p^*-p_n\|<\varepsilon$ $(\forall i=1,2,\cdots,N)$。由此得

$$\|T_i p^* - P^*\| \leqslant \|T_i p^* - p_{n_0}\| + \|p_{n_o} - p^*\| < \varepsilon + \varepsilon_1 \leqslant 2\varepsilon \ (\forall i=1,2,\cdots,N)$$

由 ε 的任意性知 $T_i p^* = p^*$ $(\forall i=1,2,\cdots,N)$,即 $p^*\in F$。　**证毕**

2　主要结论

定理 2　设 E 是 Banach 空间,$T_1,T_2,\cdots,T_N: E\to E$ 是 N 个具有公共不动点的广义渐近拟非扩张型映象,其公共渐近系数 k_n 满足 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(k_n-1)<\infty$ 若 $T_1,T_2,\cdots,T_N$ 在公共不动点集 $F=\bigcap\limits_{i=1}^{N}F(T_i)$ 中的点处一致连续,任取一点 $x_1\in E$, $\{x_n\}$ 是由定义 2 定义的具混合误差的 N 步迭代序列且满足 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\beta_{nN}<+\infty$, 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|v_{nN}\|<+\infty$。则 $\{x_n\}$ 强收敛于 $T_1,T_2,\cdots,T_N$ 在 E 中一个公共不动点的充要条件是 $\liminf\limits_{n\to\infty} D(x_n,F)=0$,其中 $D(y,F)$ 表示点 y 到集合 F 的距离,即 $D(y,F)=\inf\limits_{p\in F}\|y-p\|$。

证明　必要性显然,下面证明充分性。

设 $\liminf\limits_{n\to\infty} D(x_n,F)=0$,首先证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty} D(x_n,F)$ 存在且等于零。由 $\{v_{ni}\}_{n=1}^{\infty}$ 是 E 中有界点列 $(i=1,2,\cdots,N-1)$,而 $\{k_n\}\subset[1,\infty)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} k_n=1$,设

$$M=\sup\{\|v_{ni}\|: n\geqslant 1, 1\leqslant i\leqslant N-1\},\ K=\sup\{k_n: n\geqslant 1\} \tag{2}$$

任意给定 $\varepsilon>0$,因为 $T_1,T_2,\cdots,T_N: E\to E$ 是 N 个具有公共不动点的广义渐近拟非扩张型映象,由命题 1,存在自然数 $n_0=n_0(\varepsilon)$,当 $n\geqslant n_0$ 时,有

$$\|T_i^n x - p\| - k_n\|x-p\| < \varepsilon,\ \forall x\in E,\ \forall p\in F,\ \forall i=1,2,\cdots,N \tag{3}$$

注意到 $\{k_n\}\subset[1,\infty)$,任取 $p\in F$,当 $n\geqslant n_0$ 时,由(1)、(2)式和(3)式,有

$$\begin{aligned}
&\|y_{n1}-p\| = \|(1-\beta_{n1})(x_n-p)+\beta_{n1}(T_1^n x_n - p)+v_{n1}\| \leqslant \\
&(1-\beta_{n1})\|x_n-p\| + \beta_{n1}(\|T_1^n x_n-p\| - k_n\|x_n-p\|) + \beta_{n1}k_n\|x_n-p\| + \|v_{n1}\| \leqslant \\
&(1-\beta_{n1})k_n\|x_n-p\| + \beta_{n1}\varepsilon + \beta_{n1}k_n\|x_n-p\| + M \leqslant k_n\|x_n-p\| + M + \varepsilon \\
&\|y_{n2}-p\| = \|(1-\beta_{n2})(x_n-p)+\beta_{n2}(T_2^n y_{n1}-p)+v_{n2}\| \leqslant \\
&(1-\beta_{n2})\|x_n-p\| + \beta_{n2}(\|T_2^n y_{n1}-p\| - k_n\|y_{n1}-p\|) + \beta_{n2}k_n\|y_{n1}-p\| + \|v_{n2}\| \leqslant \\
&(1-\beta_{n2})k_n^2\|x_n-p\| + \beta_{n2}\varepsilon + \beta_{n2}k_n(k_n\|x_n-p\|+M+\varepsilon) + M \leqslant k_n^2\|x_n-p\| + (K+1)(M+\varepsilon)
\end{aligned}$$

如此进行下去,有

$$\|y_{n,N-1}-p\| \leqslant k_n^{N-1}\|x_n-p\| + (K+1)^{N-2}(M+\varepsilon)$$

则

$$\begin{aligned}
&\|x_{n+1}-p\| = \|(1-\beta_{nN})(x_n-p)+\beta_{nN}(T_N^n y_{n,N-1}-p)+v_{nN}\| \leqslant \\
&(1-\beta_{nN})\|x_n-p\| + \beta_{nN}(\|T_N^n y_{n,N-1}-p\| - k_n\|y_{n,N-1}-p\|) + \beta_{nN}k_n\|y_{n,N-1}-p\| + \|v_{nN}\| \leqslant \\
&(1-\beta_{nN})k_n^N\|x_n-p\| + \beta_{nN}\varepsilon + \beta_{nN}k_n(k_n^{N-1}\|x_n-p\| + (K+1)^{N-2}(M+\varepsilon)) + \|v_{nN}\| \leqslant \\
&k_n^N\|x_n-p\| + \beta_{nN}[\varepsilon + K(K+1)^{N-2}(M+\varepsilon)] + \|v_{nN}\| = (1+b_n)\|x_n-p\| + c_n,\ (\forall n\geqslant n_0, \forall p\in F)
\end{aligned} \tag{4}$$

其中 $0\leqslant b_n=k_n^N-1\leqslant NK^{N-1}(k_n-1)$，$c_n=\beta_{nN}[\varepsilon+K(K+1)^{N-2}(M+\varepsilon)]+\|v_{nN}\|$。

注意到 b_n 和 c_n 均与点 p 无关，当 $n\geqslant n_0$ 时，由(4)式，有 $D(x_{n+1},F)\leqslant(1+b_n)D(x_n,F)+c_n$，由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(k_n-1)$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}b_n$ 收敛；再由条件1)、2)，知 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}c_n$ 收敛，由引理1，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}D(x_n,F)$ 存在。再根据假设 $\liminf\limits_{n\to\infty}D(x_n,F)=0$ 得

$$\lim_{n\to\infty}D(x_n,F)=0 \tag{5}$$

然后证明 $\{x_n\}$ 是 E 中 Cauchy 点列。由(5)式，存在自然数 $n_1\geqslant n_0$，当 $n\geqslant n_1$ 时，有 $D(x_n,F)<\varepsilon$，从而存在 $p_n\in F$，使得

$$\|x_n-p_n\|<\varepsilon \tag{6}$$

由(4)式，当 $n\geqslant n_1$ 时，有 $\|x_{n+m}-p_n\|\leqslant(1+b_{n+m-1})\|x_{n+m-1}-p_n\|+c_{n+m-1}$，$\forall m\geqslant1$，则

$$\begin{aligned}\|x_{n+m}-x_n\|&\leqslant\|x_{n+m}-p_n\|+\|p_n-x_n\|\leqslant(1+b_{n+m-1})\|x_{n+m-1}-p_n\|+c_{n+m-1}+\|x_n-p_n\|\leqslant\\&(1+b_{n+m-1})[(1+b_{n+m-2})\|x_{n+m-2}-p_n\|+c_{n+m-2}]+c_{n+m-1}+\|x_n-p_n\|\leqslant\\&(1+b_{n+m-1})\cdots(1+b_n)\|x_n-p_n\|+(1+b_{n+m-1})\cdots(1+b_{n+1})c_n+\cdots+(1+b_{n+m-1})c_{n+m-2}+c_{n+m-1}+\|x_n-p_n\|\leqslant\\&\exp\Big(\sum_{k=n}^{\infty}b_k\Big)\Big(\|x_n-p_n\|+\sum_{k=n}^{\infty}c^k\Big)+\|x_n-p_n\|\end{aligned} \tag{7}$$

由于 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}b_n$ 及 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}c_n$ 收敛，故存在自然数 $n_2\geqslant n_1$，当 $n\geqslant n_2$ 时，有

$$\sum_{k=n}^{\infty}b_k<\ln2,\ \sum_{k=n}^{\infty}c_k<\varepsilon \tag{8}$$

因此，由(6)、(7)式和(8)式，当 $n\geqslant n_2$ 且 $m\geqslant1$ 时，有 $\|x_{n+m}-x_n\|\leqslant2(\varepsilon+\varepsilon)+\varepsilon=5\varepsilon$。即 $\{x_n\}$ 是 Banach 空间 E 中 Cauchy 点列，必在 E 中强收敛于一点 x^*。

最后证明 $x^*\in F$。由于 $|D(x_n,F)-D(x^*,F)|\leqslant\|x_n-x^*\|$，由此及(5)式，得

$$D(x^*,F)=\lim_{n\to\infty}D(x_n,F)=0$$

根据引理2，F 是 E 中的闭子集，从而 $x^*\in F$，即 $\{x_n\}$ 强收敛于 F 中一点 x^*。 证毕

注2 在定义2中取 $N=2$，$\beta_{n1}=\beta_n$，$\beta_{n2}=\alpha_n$，$v_{n1}=v_n$，$v_{n2}=u_n$ 且 $T_1=T_2=T$，则定理2退化为定理1，即，定理1实际上是本文定理2的推论。

参考文献：

[1] 向长合. Banach空间上广义渐近拟非扩张型映象不动点的逼近[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版)，2005，22(4)：6-9.

[2] ZHOU H Y，CHO Y J，CHANG S S. Approximating the Fixed Points of φ-hemicontractions by the Ishikawa Iterative Process with Mixed Errors in Normed Linear Spaces [J]. Nonlinear Anal TMA，2001，47：4819-4826.

[3] CHANG S S，LEE H W J，CHO Y J. On the Convergence of Finite Steps Iterative Sequences for Asymptotically Nonexpansive Mappings[J]. Dynamics of Continuous，Discrete and Impulsive Systems. 2004，11(A)：589-600.

[4] GOEBEL K，KIRK W A. A Fixed Point Theorem for Asymptotically Nonexpansive Mappings [J]. Proc Amer Math Soc，1972，35：171-174.

[5] KIRK W A. Fixed Point Theorems Non-Lipschitzian Mappings of Asymptotically Nonexpansive Type [J]. Israel J Math，1974，17：339-346.

[6] LIU Q H. Iterative Sequences for Asymptotically Quasi-nonexpansive Mappings with Error Member of Uniformly Convex Banach Spaces [J]. J Math Anal Appl，2002，266：468-471.

[7] CHANG S S，KIM J K，KANG S M. Approximating Fixed Points of Asymptotically Quasi-nonexpansive Type Mappings by the Ishikawa Iterative Sequences with Mixed Errors[J]. Dynamic Systems and Applications，2004，13：179-186.

[8] ZHOU Y Y，CHANG S S. Convergence of Implicit Iterative Process for a Finite Family of Asymptotically Nonexpansive Mappings in Banach Spaces [J]. Numer Funct Anal and Optimiz，2002，23：911-921.

(责任编辑 黄 颖)