r-预不变凸函数的一个充分条件*

赵 克 全
(重庆师范大学 数学与计算机科学学院, 重庆 400047)

摘 要:Avriel 在文献[1]中指出 r-凸函数必为拟凸函数,反之不然。同时给出了拟凸函数为 r-凸函数的一个充分条件。类似地,本文先指出 r-预不变凸函数必是预拟不变凸函数,同时利用 Mohan 和 Neogy 在文献[2]中引入的条件 C 给出了 r-预不变凸函数的一个充分条件。

关键词:凸集;不变凸集;r-凸函数;拟凸函数;r-预不变凸函数;预拟不变凸函数
中图分类号:O221.2 **文献标识码**:A **文章编号**:1672-6693(2006)01-0010-04

A Sufficient Condition of *r*-preinvex Functions

ZHAO Ke-quan
(College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract:Avriel has pointed out that r- convex functions must be quasiconvex functions,but the converse stalement is not true in paper[9]. At the same time,quasi-convex function should be an essential condition provided for r-convex function. Similarily,in this paper,in the first,we point out that r- preinvex functions must be prequasiinvex functions,the converse statement is not true;At the same time,a sufficient condition of r- preinvex functions is gived by making use of the condition C which Mohan and Neogy introduced in paper[6].

Key words:convex sets invex sets;r- convex functions;quasiconvex functions;r- preinvex functions;prequasi-invex functions

凸性在数学规划及最优化理论中占有十分重要的地位,但凸性的局限性也是十分明显的。为满足解决实际问题的需要,各种广义凸性的概念相继被提出。

作为对凸函数的推广,Avriel 在文献[1]中提出一类新的广义凸函数——r-凸函数,并证明了凸函数一定是 r-凸函数,r-凸函数一定是拟凸函数,反之不一定成立。并讨论了在可微情形下,r-凸函数的一些重要性质,尤其是给出了定义在开凸集 X 上的二次连续可微实质函数 f 为 r-凸函数,即 $\forall x,x\in X,Q(x)=r\nabla f(x)\cdot(\nabla f(x)^{\mathrm{T}}+\nabla^2 f(x)$ 是半正定矩阵;杨晓琪在文献[3]中给出了 r-凸函数的两个等价条件,讨论了 r-凸函数的一些运算性质以及二次函数的 r-凸性;Antczak 在文献[4]中给出了 r-凸函数的定义并讨论了它的一些性质特征;作为对文献[1]中 r-凸函数、文献[4]中 r-不变凸函数、文献[5]和文献[2]中不变凸函数和预不变凸函数的推广,Antczak 在文献[6]中通过文献[7]中引入 p-不变凸集的概念,在函数 f 可微的条件给出了 (p,r)-不变凸函数的定义,在 f 为非可微条件下给出了 (p,r)-预不变凸函数的定义,同时讨论了 (p,r)-不变凸函数和 (p,r)-预不变凸函数的一些特征和函数 f 为 (p,r)-不变凸条件下非线形规划问题的最优化条件。并进一步讨论了 (p,r)-不变凸和 (p,r)-预不变凸函数在数学规划中的应用;文献[8,9]均对预不变凸函数的充分条件进行了讨论。

Avriel 在文献[10]中曾给出了凸函数和拟凸函数的一个等价条件。即若 X 为凸集,则

f 是凸函数等价于 $\forall x,y\in X,\phi(\lambda)=f(\lambda x+(1-\lambda)y)$ 为 $[0,1]$ 上的凸函数;

f 是拟凸函数等价于 $\forall x,y\in X,\phi(\lambda)=f(\lambda x+(1-\lambda)y)$ 为 $[0,1]$ 上的拟凸函数。

本文在此基础上首先分别给出了 r-预不变凸函数和预拟不变凸函数的一个等价条件,并利用此等价条

* 收稿日期:2005-11-02
作者简介:赵克全(1979-),男,四川南充人,硕士研究生,研究方向为广义凸性及其在最优化理论中的应用。

件讨论了 r-预不变凸函数之间的关系，给出了 r-预不变凸函数的一个充分条件。最后提出了 r-预不变凸函数的一个公开问题。

1 预备知识

定义1[10] X 为凸集，若 $\lambda x+(1-\lambda)y\in X,\ \forall x,y\in X,\ \forall\lambda\in[0,1]$

定义2[1] X 为凸集，r 为实数，称 f 为 r-凸集，若 $\forall x,y\in X,\lambda\in[0,1]$ 有

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\log(\lambda e^{rf(x)}+(1-\lambda)e^{rf(y)})^{\frac{1}{r}},\text{若 } r\neq 0;$$

$$f(y+\lambda(x-y))\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y),\text{若 } r=0。$$

定义3[10] X 为凸集，f 是 X 上的凸函数，若 $\forall x,y\in X,\ \forall\lambda\in[0,1]$，有

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\max\{f(x),f(y)\}。$$

注1 由凸函数、r-凸函数和预拟凸函数定义可知，凸函数一定是 r-凸函数，r-凸函数一定是拟凸函数，反之不一定成立。

定义4[11] 称 X 关于 η 为不变凸集，若存在向量值函数 η 使得

定义5[4] X 关于 η 为不变凸集，称 f 关于相同的 η 为 r-预不变凸函数，若 $\forall x,y\in X,\ \forall\lambda\in[0,1]$，有

$$f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant\log(\lambda e^{rf(x)}+(1-\lambda)e^{rf(y)})^{1/r},\text{若 } r\neq 0;$$

$$f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y),\text{若 } r=0。$$

定义6[2] X 关于 η 为不变凸集，称 f 关于相同的 η 为预拟不变凸函数，若 $\forall x,y\in X,\lambda\in[0,1]$，有

$$f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant\max\{f(x),f(y)\}。$$

注2 由不变凸函数、r-预不变凸函数和预拟不变凸函数的定义可知，预不变凸函数一定是 r-预不变凸函数，r-预不变凸函数一定是预拟不变凸函数，反之不一定成立。

条件1[2] $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$，$\eta(x,y)$ 满足条件1是指对 $\forall x,y\in\mathbf{R}^n,\lambda\in[0,1]$，$C_1:\eta(y,y+\lambda\eta(x,y))=-\lambda\eta(x,y)$；$C_2:\eta(x,y+\lambda\eta(x,y))=(1-\lambda)\eta(x,y)$。

条件2[12] $X\subseteq\mathbf{R}^n$ 关于 $\eta(x,y)$ 为不变凸集，称 $f(x):X\to\mathbf{R}$ 满足条件2是指

$$\forall x,y\in X,f(y+\eta(x,y))\leqslant f(x)。$$

2 主要结论及其证明

为证明本文的主要结论，首先给出下面的定理。

定理1 假设 X 关于 η 为不变凸集，称 f 满足条件2，η 满足条件1，则 f 关于相同的 η 是预不变凸函数，即等价于 $\forall x,y\in X,\phi(\alpha)=f(y+\alpha\eta(x,y))$ 在 $[0,1]$ 上是拟凸函数。

证明 显然由条件1可知，$\forall x,y\in X,\ \forall\alpha\in[0,1]$ 则

$$\eta(y+\alpha\eta(x,y),y)=\eta(y+\alpha\eta(x,y),y+\alpha\eta(x,y)+\eta(y,y+\alpha\eta(x,y)))=$$
$$-\eta(y,y+\alpha\eta(x,y))=\alpha\eta(x,y) \tag{1}$$

若 f 在 X 上关于相同的 η 为预拟不变凸函数，由定义，$\forall x,y\in X,\lambda\in[0,1]$，$f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant\max\{f(x),f(y)\}$。对 $\forall\alpha_1,\alpha_2\in[0,1]$，$\lambda\in[0,1]$，有

若 $\alpha_1=\alpha_2=0$，$\phi(\alpha_2+\lambda(\alpha_1-\alpha_2))=\phi(0)=f(y)=\max\{\phi(\alpha_1),\phi(\alpha_2)\}$；

若 $\alpha_1=\alpha_2=1$，$\phi(\alpha_2+\lambda(\alpha_1-\alpha_2))=\phi(1)=f(y+\eta(x,y))=\max\{\phi(\alpha_1),\phi(\alpha_2)\}$；

若 $\alpha_1=\alpha_2$，$\phi(\alpha_2+\lambda(\alpha_1-\alpha_2))=\phi(2)=f(y+\alpha_2\eta(x,y))=\max\{\phi(\alpha_1),\phi(\alpha_2)\}$。

不失一般性，下面假设 $\alpha_1>\alpha_2$，则 $\alpha_1-\alpha_2>0$。由 $\alpha_1,\alpha_2\in[0,1]$ 可知 $\alpha_2\neq 1$，故 $0<\dfrac{\alpha_1-\alpha_2}{1-\alpha_2}\leqslant 1$，则

$$\phi(\alpha_2+\lambda(\alpha_1-\alpha_2))=f(y+(\alpha_2+\lambda(\alpha_1-\alpha_2))\eta(x,y))=f(y+\alpha_2\eta(x,y)+\lambda(\alpha_1-\alpha_2)\eta(x,y)),$$

而

$$\eta(y+\alpha_1\eta(x,y),y+\alpha_2\eta(x,y))=\eta(y+\alpha_2\eta(x,y)+(\alpha_2-\alpha_1)\eta(x,y),y+\alpha_2(x,y))=$$

$$\eta(y+\alpha_2\eta(x,y)+\frac{\alpha_1-\alpha_2}{1-\alpha_2}\eta(x,y+\alpha_2\eta(x,y)),y+\alpha_2\eta(x,y))=$$

$$\frac{\alpha_1-\alpha_2}{1-\alpha_2}\eta(x,y+\alpha_2\eta(x,y))=(\alpha_1-\alpha_2)\eta(x,y),$$

故

$$\phi(\alpha_2+\lambda(\alpha_1-\alpha_2))=f(y+(\alpha_2+\lambda(\alpha_1-\alpha_2))\eta(x,y))=$$
$$f(y+\alpha_2\eta(x,y)+\lambda\eta(y+\alpha_{1\eta}(x,y),y+\alpha_2)\eta(x,y)))\leqslant$$
$$\max\{f(y+\alpha_1\eta(x,y)),f(y+\alpha_2\eta(x,y))\}=\max\{\phi(\alpha_1),\phi(\alpha_2)\}$$

则 $\phi(\alpha)$ 是拟凸函数。

若 $\alpha_1<\alpha_2$，则 $\alpha_2-\alpha_1>0$。由 $\alpha_1,\alpha_2\in[0,1]$，可知 $\alpha_1\neq 1$，故 $0<\frac{\alpha_2-\alpha_1}{1-\alpha_1}\leqslant 1$。而由条件1可知

$$\eta(y+\alpha_1\eta(x,y),y+\alpha_2\eta(x,y))=\eta(y+\alpha_1\eta(x,y),y+\alpha_1\eta(x,y)+(\alpha_2-\alpha_1)\eta(x,y))=$$
$$\eta(y+\alpha_1\eta(x,y),y\alpha_1\eta(x,y)+\frac{\alpha_2-\alpha_1}{1-\alpha_1}\eta(x,y+\alpha_1\eta(x,y)))=$$
$$\frac{\alpha_2-\alpha_1}{1-\alpha_1}\eta(x,y+\alpha_1\eta(x,y))=(\alpha_1-\alpha_2)\eta(x,y)。$$

故

$$\phi(\alpha_2+\lambda(\alpha_1-\alpha_2))=f(y+(\alpha_2+\lambda(\alpha_1-\alpha_2))\eta(x,y))=$$
$$f(y+\alpha_2\eta(x,y)+\lambda\eta(y+\alpha_1\eta(x,y),y+\alpha_2)\eta(x,y)))\leqslant$$
$$\max\{f(y+\alpha_1\eta(x,y)),f(y+\alpha_2\eta(x,y))\}=\max\{\phi(\alpha_1),\phi(\alpha_2)\}$$

故 $\phi(\alpha)$ 是拟凸函数。

反之，若 $\phi(\alpha)$ 是拟凸函数，则 $\forall\lambda\in[0,1]$，$\forall x,y\in X$，

$$f(y+\lambda\eta(x,y))=\phi(\lambda)=\phi(\lambda\cdot 1+(1-\lambda)0)\leqslant\max\{\phi(1),\phi(0)\}=$$
$$\max\{f(y+\eta(x,y)),f(y)\}\leqslant\max\{f(x),f(y)\}$$

故 f 关于相同的 η 为预拟不变凸函数。　　证毕

和定理1的结论类似，有下面的定理2和定理3。

定理2　若 X 关于 η 为不变凸函集，f 满足条件2，η 满足条件1，则 f 关于相同的 η 是预不变凸函数，即 $\forall x,y\in X,\phi(\alpha)=f(y+\alpha\eta(x,y))$ 在 $[0,1]$ 上是凸函数。

定理3　X 关于 η 为不变凸函集，η 满足条件1，f 满足条件2，则 f 关于相同的 η 是 r-预不变凸函数当且仅当 $\forall x,y\in X,\phi(\alpha)f(y+\alpha\eta(x,y))$ 在 $[0,1]$ 上是 r-凸函数。

注3　定理2和定理3的证明和定理1的是类似。

Avriel在文献[1]中指出 r-凸函数必为拟凸函数，反之不然。同时给出拟凸函数为 r-凸函数的一个充分条件，若 X 为开凸集，f 是定义在 X 上的二次连续可微实值拟凸函数，若存在实数 r^*，使得 $r^*=\sup\limits_{x\in X,\|z\|=1}\frac{-z^{\mathrm T}\nabla^2 f(x)z}{[z^{\mathrm T}\nabla f(x)]^2}(z^{\mathrm T}\nabla f(x)\neq 0)$，则 f 为 r^*-凸函数的。下面在 η 满足条件1和 f 满足条件2的假设下，给出了预拟不变凸函数 r-预不变凸函数的一个充分条件。

引理1[1]　ϕ 是定义在开凸集 X 上的二次连续可微实拟凸函数，若存在实数 r^*。使得 $r^*=\sup\limits_{x\in C}\frac{-z^{\mathrm T}\nabla^2\phi(x)z}{[z^{\mathrm T}\nabla\phi(x)]^2}$（其中 $z^{\mathrm T}\nabla\phi(x)\neq 0$），则 ϕ 为 r^*-凸函数的。

定理4　X 关于 η 为不变凸集，f 关于相同的 η 是二次连续可微的预拟不变凸函数，f 满足条件2，η 满足条件1，若满足下列条件，则 f 关于相同的 η 是 r^*-预不变凸函数。

1）存在实数 r^*，使得 $r^*=\sup\limits_{x,y\in X,\alpha\in[0,1]}\frac{-z^{\mathrm T}\eta(x,y)^{\mathrm T}\nabla^2 f(y+\alpha\eta(x,y))\eta(x,y)z}{[z^{\mathrm T}\eta(x,y)^{\mathrm T}\nabla f(y+\alpha\eta(x,y))]^2}(z^2\ \nabla f(x)\neq 0)$（其中 $z^{\mathrm T}\eta(x,y)^{\mathrm T}\nabla f(y+\alpha\eta(x,y))\neq 0$）；

2）对任意给定的 $x,y\in X$ 定义 $\phi(\alpha)=f(y+\alpha\eta(x,y))$，若 $\phi(\alpha)=f(y+\alpha\eta(x,y))$ 在 $(0,1)$ 上是 r^*-凸函数，$\phi(\alpha)=f(y+\alpha\eta(x,y))$ 在 $[0,1]$ 上是 r^*-凸函数。

证明　因为 f 关于 η 是二次连续可微的预拟不变凸函数，且 η 满足条件1，f 满足条件2，故由定理1可知，$\phi(\alpha)=f(y+\alpha\eta(x,y))$ 在 $[0,1]$ 上是二次连续可微的拟凸函数，故 $\phi(\alpha)=f(y+\alpha\eta(x,y))$ 在 $(0,1)$ 上是

二次连续可微的拟凸函数,而

$$\phi'(\alpha)=\eta(x,y)^{\mathrm{T}}\nabla f(y+\alpha\eta(x,y)),\phi''(\alpha)=\eta(x,y)^{\mathrm{T}}\nabla^2 f(y+\alpha\eta(x,y))\eta(x,y)。$$

由条件1),若存在实数 r^* 使得

$$r^*=\sup_{x,y\in X,\alpha\in[0,1]}\frac{-z^{\mathrm{T}}\eta(x,y)^{\mathrm{T}}\nabla^2 f(y+\alpha\eta(x,y))\eta(x,y)z}{[z^{\mathrm{T}}\eta(x,y)^{\mathrm{T}}\nabla f(y+\alpha\eta(x,y))]^2}=\sup_{\alpha\in[0,1]}\frac{-z^{\mathrm{T}}\eta\nabla^2\phi(\alpha)z}{[z^{\mathrm{T}}\nabla\phi(\alpha)]^2},$$

其中 $z^{\mathrm{T}}\eta(x,y)^{\mathrm{T}}\nabla f(y+\alpha\eta(x,y))\neq 0$,即 $\nabla\phi(\alpha)\neq 0$。由引理可知 $\phi(\alpha)=f(y+\alpha\eta(x,y))$ 在 $(0,1)$ 上是 r^*-凸函数。再由条件2)可知 $\phi(\alpha)=f(y+\alpha\eta(x,y))$ 在 $[0,1)$ 上是 r^*-凸函数。由定理3可知 f 关于相同的 η 为 r^*-预不变凸函数。 证毕

最后提出一个公开问题,即对于本文的定理4,若条件2)去掉,结论是否成立?

3 结束语

本文首先利用 Mohan 和 Neogy 在文献[2]中引入条件1和 Yang 在文献[12]中引入条件2分别给出了预拟不变凸函数和 r-预不变凸函数的一个等价条件。同时利用该等价条件对文献[1]中 Avrel 等人给出的结论了作出了进一步的讨论,给出了 r-预不变凸函数的一个充分条件。但遗憾的是在本文的定理4中,利用了条件2)。故本文最后提出了 r-预不变凸函数有关一个公开问题,即在定理4中,若条件2)去掉,结论是否成立。

参考文献:

[1] AVRIEL M. r-Convex Functions[J]. Mathematical Programming, 1972,2:309-323.

[2] MOHAN S R, NEOGY S K. OnInvex Sets and Preinvex Functions[J]. JAMM, 1995,189:901-908.

[3] 杨晓琪. r-凸函数的运算性质[J]. 重庆建筑工程学院学报,1989,11(2):93-101.

[4] ANTCZAK T. (p,r)-Invex Sets and Functions[J]. Uninversuty of Lodz, 1999.

[5] CRAVEN B D, GLOVER B M. Invex Functios and Duality[J]. Journal of Australian Mathematical Society, 1985, 39(A):1-20.

[6] ANTCZAK T. On (p,r)-Invex-Type Functions Programming, problems[J]. JMAA, 2001,382-397.

[7] ANTCZAK T. (p,r)-Invex Sets and Functions[J]. JMAA, 2001,263:355-379.

[8] 颜丽佳,刘芙萍. 强预不变凸函数[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2005,22(1):11-15.

[9] 黄应全,赵克全. r-预不变凸函数的两个充分条件[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2004,21(4):17-18.

[10] AVRIEL M, DIEWERT W E, SCHAIBLE S S, et al. Generalized Concavity[M]. New York:Penum Press, 1988.

[11] WEIR T, MOND B. Preinex Functions in Multiobjective Optimization[J]. JMAA,1998,136:29-38.

[12] YANG X M, YANG X Q, TEO K L. Characterizations and Applications of Prequasiinvex Functions[J]. JOTA ,2001,110(3):645-668.

(责任编辑 黄 颖)