

保角变换法求导体平板构成的角域内静电场*

籍勇亮,胡先权

(重庆师范大学 物理学与信息技术学院,重庆 400047)

摘要 对导体平板构成的角域内具有线电荷密度的静电场进行了求解。利用保角变换法、电象法和数学软件 Mathematica 相结合,得到任意夹角域内的电势表达式,并做出夹角为直角时的等势线簇图形。

关键词 保角变换法;角域;等势线簇;电象法

中图分类号:O441.1

文献标识码:A

文章编号:1672-6693(2006)01-0039-04

Solution of the Electrostatic Field by Conformal Transformation in an Angular Space Made up from Flat Plate Conductor

Ji Yong-liang, HU Xian-quan

(College of Physics and Information Technology, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract This paper deals with the electrostatic field by conformal transformation in angular space, an infinite line-charge is located in flat plate conductor. Mainly use conformal transformation, electrical image process and mathematic software, the expression of electric potential inside an angular space is obtained and the equipotential line maps are plotted when the angle is right-angle.

Key words conformal transformation; angular space; equipotential line; electrical images

在求解平面场的拉普拉斯方程或泊松方程的边值问题时,如果它们的边界形状比较复杂,用通常的一些方法求解就会非常困难^[1~4],本文研究的角形区域内的静电场问题就属于这种情形。文献[5,6]采用镜像法求解角域问题,这种方法只适用角域张角为一些特殊角的情形,可以证明^[6]当 $n = \frac{\pi}{\alpha}$ 为非整数时不能用镜像法求解,这就说明镜像法求解角域问题有其局限性。本文采用保角变换中的幂函数变换不仅可以有效的化难为易,将复杂的边界变为简单的边界求解,而且可以把角域夹角推广到任意角而精确求解。本文先求解张角为特殊角的角域,然后推广到任意角,并用数学软件 Mathematica 绘出角域夹角为直角时,内置无限长细导线后内部的等势线簇。本文最后总结了等势线的几个特点,简要分析了角域中存在两个线电荷的情况。

1 接地直二面角导体内置无限长线电荷的静电场

设由两个平面组成的夹角为直角的角域,有一电荷线密度为 λ 的无限长直线置于二面角导体角域内,导体上的电位为零,如图1所示。通过保角变换,求解该静电场的电势分布并做出等势线簇。上述问题实际上是平面场问题(如图2)。建立 Z 平面坐标系, λ 位于 (x_0, y_0) 处。静电场的电势满足如下的定解问题:

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi = -\frac{\lambda}{\epsilon_0} \delta(x-x_0) \delta(y-y_0) \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi = 0 \\ \lim_{y \rightarrow 0^+} \varphi = 0 \end{cases} \quad (1)$$

* 收稿日期:2005-04-20

资助项目:重庆市教育委员会科学技术研究项目(No. 20030806);重庆市科委自然科学基金项目(No. 2005BB8267)

作者简介:籍勇亮(1979-),男,山西太原人,硕士研究生,研究方向为理论物理。

若采用分离变量法,求解过程会较复杂,但如采用保角变换法,则比较简单。

对图 1 所示的角域作保角变换 $W = Z^2$, 即 $u + iv = (x + iy)^2$, 这样就可把二面角导体角域变成 W 平面的上半平面, 无限长线电荷密度 λ 不变^[7], 但其位置变到 (u_0, v_0) 处, 其中 $u_0 = x_0^2 - y_0^2$, $v_0 = 2x_0y_0$, 容易求得 W 平面上半平面的电势^[8]为

$$\varphi(u, v) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{W_0^2}{W^{*2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2}{(u - u_0)^2 + (v + v_0)^2} \quad (2)$$

再返回到 Z 平面有

$$\varphi(x, y) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_0^2}{R^{*2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{(x^2 - y^2 - x_0^2 + y_0^2)^2 + (2xy - 2x_0y_0)^2}{(x^2 - y^2 - x_0^2 + y_0^2)^2 + (2xy + 2x_0y_0)^2} \quad (3)$$

对 (3) 式进行整理, 得到

$$\varphi(x, y) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2][(x + x_0)^2 + (y + y_0)^2]}{[(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2][(x + x_0)^2 + (y - y_0)^2]} \quad (4)$$

(4) 式即为直接采用电像法^[9]的结果, 说明保角变换法与电像法的结果一致。

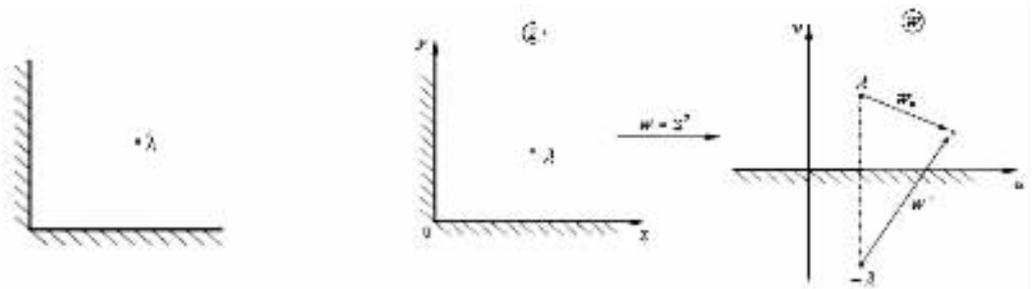


图 1 线电荷 λ 放置图

图 2 保角变换图

2 任意接地二面角体内置无限长线电荷的静电场

将图 1 所示角域由 $\frac{2\pi}{\alpha} \rightarrow \alpha$, 同样可通过保角变换求解。为使表达简洁, 采用极坐标系。令线电荷位于 Z

平面上的 (r_0, θ_0) 处, 作保角变换 $W = Z^{\frac{\pi}{\alpha}}$, 即 $\rho e^{i\phi} = (r e^{i\theta})^{\frac{\pi}{\alpha}}$, 由于 $\left. \frac{dW}{dZ} \right|_{Z=0} = \frac{\pi}{\alpha} Z^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \Big|_{Z=0} = 0$, 故除 $Z=0$ ($W=0$) 点外作保角变换 $W = Z^{\frac{\pi}{\alpha}}$ 。经变换后 Z 平面上的 α 导体角域变为 W 平面的上半平面, 线电荷密度变换后保持不变^[10], 位置落到了 $(\rho_0 = r_0^{\frac{\pi}{\alpha}}, \phi_0 = \frac{\pi}{\alpha}\theta_0)$ 处。这时定解问题为

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} = -\frac{\lambda}{\epsilon_0} \frac{\delta(\rho - \rho_0)\delta(\phi - \phi_0)}{\rho} \\ \lim_{\phi \rightarrow 0} \varphi = 0 \\ \lim_{\phi \rightarrow \pi} \varphi = 0 \end{cases} \quad (5)$$

(5) 式与 (1) 式等价, 于是将 (2) 式由直角坐标变换为极坐标, 即可求得上半平面的电势为

$$\varphi(\rho, \phi) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{W_0^2}{W^{*2}} = \frac{\rho^2 + \rho_0^2 + 2\rho\rho_0 \cos(\phi + \phi_0)}{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi - \phi_0)}$$

返回到 Z 平面得

$$\varphi(r, \theta) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_0^2}{R^{*2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{r^{\frac{2\pi}{\alpha}} + r_0^{\frac{2\pi}{\alpha}} + 2r^{\frac{\pi}{\alpha}} r_0^{\frac{\pi}{\alpha}} \cos\left(\frac{\pi}{\alpha}\theta + \frac{\pi}{\alpha}\theta_0\right)}{r^{\frac{2\pi}{\alpha}} + r_0^{\frac{2\pi}{\alpha}} - 2r^{\frac{\pi}{\alpha}} r_0^{\frac{\pi}{\alpha}} \cos\left(\frac{\pi}{\alpha}\theta - \frac{\pi}{\alpha}\theta_0\right)} \quad (6)$$

3 等势线的描绘

要画出 (4) 式对应的等势线簇, 可以采用文献 [7] 中 Mathematica 隐函数绘图法, 也可以采用 Mathematica

中 Plot3D 命令先画出(4)式对应的 3D 图形,再用 ContourPlot 命令绘出等高线^[11]的方法,这种方法可以更方便的选取参数绘出等势线。本文画出了 λ 分别在(1,1)和(1,3)两个位置时的各 13 条等势线,如图 3、图 4 所示。

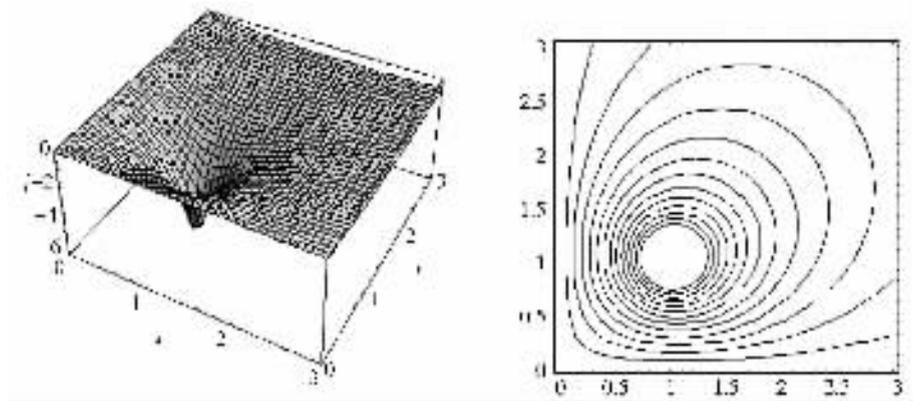


图 3 线电荷 λ 在(1,1)处的等高线与等势线簇图

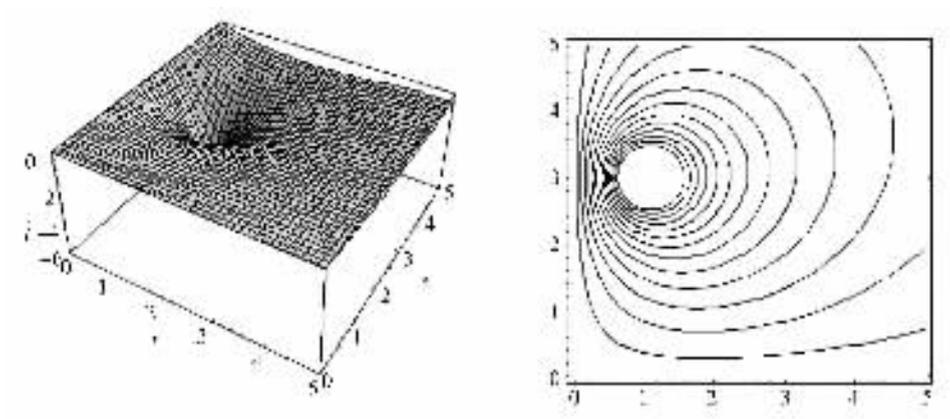


图 4 线电荷 λ 在(1,3)处的等高线与等势线图

4 讨论

4.1 等势线的特点

从图 3、图 4 可以概括直角域中的等势线有这样几个特点:1)在线电荷附近,由于远离边界,感应电荷的影响可忽略,因而等势线是一系列同心圆;2)当等势线靠近边界时,感应电荷的影响不能忽略,所以等势线的密度要大一些,相反等势线在角域开扩方向的密度要小一些;3)由(4)式或(6)式可以看出线电荷的大小及正负不影响等势线的分布规律,只是改变了电势在各个方向上的梯度;4)有理由推断出,任意夹角的角域中的等势线也是符合上述特征的。

4.2 角域中存在两个线电荷

根据电势的叠加原理,只要在(4)式后再加上一项叠加电势就得到了两个线电荷存在时的电势。同样得到了两个线电荷处在(1,2)和(2,1)时,等号和异号时的电势及等势线图,见图 5、图 6。

5 结束语

由以上的论述可以看出,保角变换法在解决角域内的静电场问题时是一种行之有效的方法。通过解析函数的变换将 Z 平面上具有较复杂边界的边值问题变换成 W 平面上具有简单边界的边值问题,而后一问题易于解决。于是,先在 W 平面上找出后一问题的解,然后通过逆变换求得原问题的解。

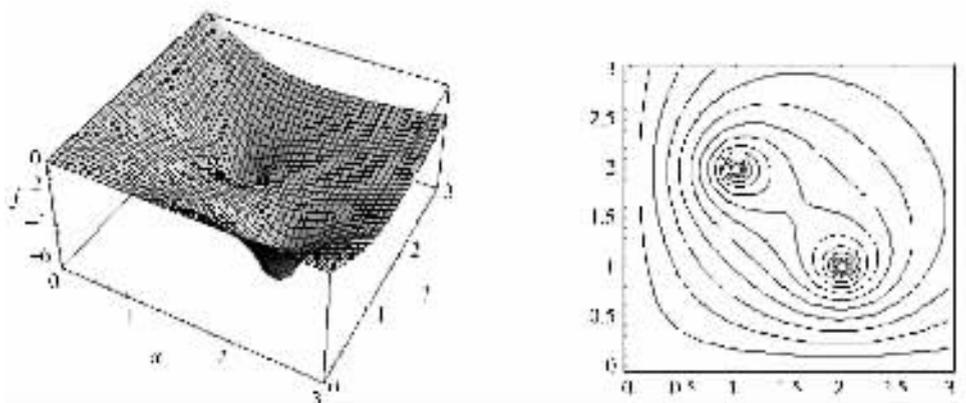


图5 两个等号线电荷的等高线与等势线簇图

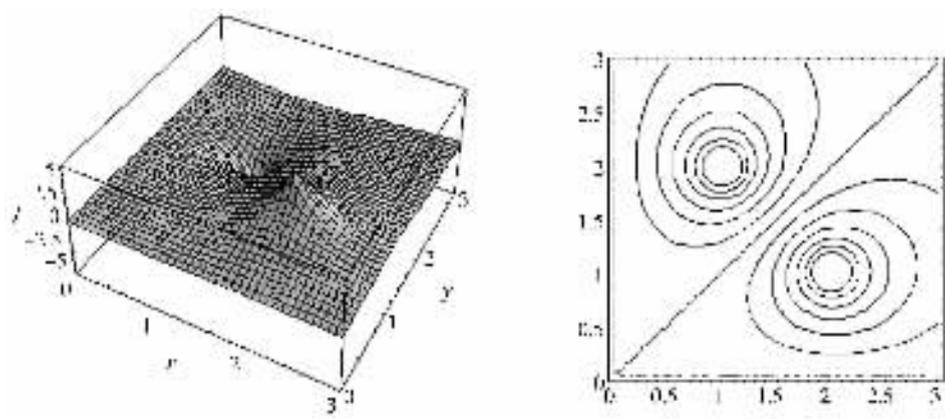


图6 两个异号线电荷的等高线与等势线簇图

参考文献：

- [1] R 柯朗, D 希尔伯特, 钱敏. 数学物理方法[M]. 郭敦仁译. 北京: 科学出版社, 1981. 296-398.
- [2] BLEANEY B I, BLEANEY B. Electricity and Magnetism[M]. 3rd Edition. Great Britain: Oxford University Press, 1975. 32-34.
- [3] 费曼. 费曼物理学讲义[M]. 王之辅译. 上海: 上海科技技术出版社, 1983. 75-76.
- [4] 毛钧杰. 电磁场理论[M]. 北京: 国防科技大学出版社, 1998. 12-68.
- [5] 夏佑林. 大学物理丛书[电磁学专辑] [M]. 北京: 北京工业大学出版社, 1988. 9-10.
- [6] 马力平. 角域中能否用电象法的一个证明[J]. 合肥工业大学学报, 1998, 21(3): 95-97.
- [7] 胡先权, 蒋明宇. 直线电荷与带电导体圆柱电场和电力线簇研究[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2005, 22(2): 28-33.
- [8] 毕显德. 电磁场理论[M]. 北京: 电子工业出版社, 1985. 166-168.
- [9] 胡嗣柱, 倪光炯. 数学物理方法[M]. 上海: 复旦大学出版社, 1989. 435-436.
- [10] 胡先权, 胡文江, 马勇. 偏心圆柱面与分离圆柱面带电导体等势面的统一描述[J]. 大学物理, 2004, 23(8): 20-23.
- [11] 洪维恩, 魏宝琛. 数学运算大师 Mathematica 4[M]. 北京: 人民邮电出版社, 2002. 188-191.

(责任编辑 欧红叶)