

金属球与无限大导体平板系统电容的精确计算*

胡先权¹, 欧红叶¹, 籍勇亮¹, 廖克俊²

(1. 重庆师范大学 物理学与信息技术学院, 重庆 400047 2. 重庆大学 数理学院, 重庆 400065)

摘要 :用镜象法求解金属球与无限大导体平板系统的电容。根据数学物理理论,通过配置镜象电荷系列进行求解电容,即在金属球与无限大导体平板系统中配置镜象电荷系列,通过引入叠加系数 $C_{n,2k}$ 可以精确确定镜象电荷系列中任意象电荷的位置和电量,并采用计算技术工具软件 MATLAB 进行运算与作图,精确计算系统的电容。

关键词 :镜象法;镜象电荷;电容;泊松方程

中图分类号 :O441.1 ;O411.1

文献标识码 :A

文章编号 :1672-6693(2006)02-0001-04

Accurate Calculation of the Capacitance of a Metal Ball and an Infinitely Big Conductor Plane System

HU Xian-quan¹, OU Hong-ye¹, JI Yong-liang¹, LIAO Ke-jun²

(1. College of Physics and Information Technical, Chongqing Normal University, Chongqing 400047 ;

2. College of Physics and Mathematics, Chongqing University, Chongqing 400065, China)

Abstract :The capacitance of a metal ball and an infinitely big conductor plane system is sought out by the method of electrical images. According to the theory of mathematic physics, the above-mentioned capacitance may be gained by means of deploying the series of electric charge images, that is deploying the series of electric charge image in a metal ball and an infinitely big conductor plane system and introducing superposition coefficient $C_{n,2k}$, it is able to fix accurately on the positions and the charges of arbitrary electric charge image of the series, and use mathematic software MATLAB to calculate and construct the scheme, the capacitance can be accurately fixed on. This method is provided with the characteristic of intuition, simply and high precision calculation.

Key words :the method of electrical image ;the charge of electrical image ;capacitance ;Poisson's equation

本文采用镜象法求金属球与无限大导体平板系统的电容。在采用平面镜象法和球面镜象法的专著和教材^[1-7]中,一般采用一个或者几个有限镜象电荷等效地研究系统的电势分布或电容。通过在金属球的中心 O 处配置电荷 q 求出对应的无穷镜象电荷系列,等效地求出金属球的电势 φ ,最后由公式 $C = \frac{q}{\varphi}$ 求出系统的电容。通过引入叠加系数 $C_{n,2k}$ 可以精确确定镜象电荷系列中任意象电荷的位置和电量,采用计算技术工具软件 MATLAB 进行运算与作图,精确计算系统的电容,本文是对作者原有研究

工作^[8]的补充和完善。

1 镜象电荷系列的配置

设半径为 R_0 的金属球位于无限大接地导体平板附近,见图 1。球心与导体板的距离为 D 。设在金属球的中心 O 处放置一电量为 $+q_1$ 的电荷,由于 $+q_1$ 的影响,使金属球和导体板的表面出现感应电荷,感应电荷之间存在相互作用,如果采用直接求解泊松方程,求解过程将极为复杂。如果采用镜象法,可以等效地求出金属球表面与导体板的感应电荷,进而求出金属球电势和空间电势分布。

* 收稿日期 2005-11-29 修回日期 2006-03-25

资助项目 :国家自然科学基金(No. 60376032);重庆市科委自然科学基金项目(2005BB8267);重庆市教育委员会科学技术研究项目(KJ 060813)

作者简介 :胡先权(1944-),男,四川双流人,教授,理论物理领銜硕士生导师,研究方向为数学物理,理论物理。

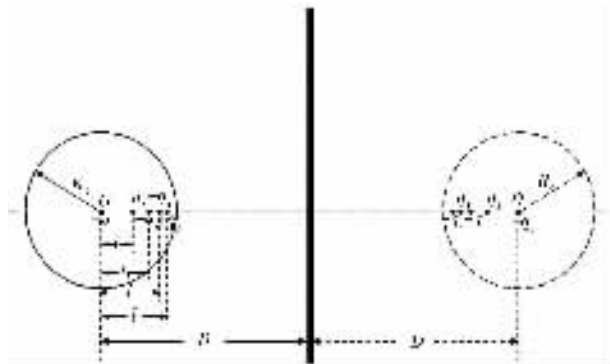


图1 镜像电荷序列示意

在球心放入电荷 $+q_1$ 之后,无论金属球表面和无限大导体板表面的电荷怎样分布,金属球表面各点和无限大金属板表面各点的电势是相等的,因此放入镜像电荷的大小、位置一定要满足这个条件。根据对称性,为了使无限大导体板各点的电势相等,应在金属板的右侧距离导体板相等处放入电量相等、电性相反的镜像电荷 $-q_1$ 。放入镜像电荷 $-q_1$ 后,虽然使无限大导体板表面的电势相等了,但是又使得金属球表面的电势不相等,因此需要在金属球内放入一个镜像电荷 $+q_2$,距离球心 O 的距离记为 l_2 。令

$$r = \frac{R_0}{2D} \quad (0 \leq r \leq 0.5)$$

根据镜像法,得

$$q_2 = \frac{R_0}{2D} q_1 = r q_1 \quad l_2 = \frac{R_0^2}{2D} = r R_0$$

放入镜像电荷 $+q_2$ 后,打破了无限大导体平板表面电势相等的条件,要使导体板表面上各点的电势相等,应在导体板的右侧等距离位置放入电量相等、电性相反的镜像电荷 $-q_2$,放入电荷 $-q_2$ 后,又破坏了金属球表面电势相等的条件,为了使金属球表面电势相等,需要在金属球内放入 $-q_2$ 的镜像电荷 $+q_3$ 。同理,根据镜像法得到

$$q_3 = \frac{r^2}{1-r^2} q_1 \quad l_3 = \frac{r R_0}{1-r^2}$$

有了 $+q_3$ 电荷后,又打破了无限大导体板电势相等的条件,要使导体板上各点电势恒定,根据对称性,又要在导体板右侧距离相等的位置放入电量相等、电性相反的镜像电荷 $-q_3$ 。但是有了镜像电荷 $-q_3$ 后,一方面使无限大导体板表面上各点电势相等,另一方面又打破金属球表面上各点电势相等的条件。如此重复的放上 $+q_4$ 、 $-q_4$ 、 $+q_5$ 、 $-q_5$ 、……,放上尽可能多的镜像电荷直到满足一定的计算精度。放入的镜像电荷的位置、电量要使得金属球和

无限大导体板上各点的电势分别相等。可以看出这样的重复规律:对于在板左边的电荷为 $+q_{n-1}$ 时,该电荷打破了导体板上各点电势相等的条件,则应在导体板右边对称位置放入电量相等、电性相反的镜像电荷 $-q_{n-1}$ 。有了 $-q_{n-1}$ 后,一方面使无限大导体板上各点电势相等,另一方面又打破了金属球表面电势相等的条件,为了使金属球表面各点的电势相等,则又应该在金属球内放入镜像电荷 $+q_n$,如此不断重复。

同理,根据镜像得

$$l_n = \frac{R_0^2}{2D - l_{n-1}} \quad (1)$$

$$q_n = \frac{R_0}{2D - l_{n-1}} q_{n-1} \quad (2)$$

由上两个公式,可以计算出无限多个镜像电荷的电量 q_n 、位置 l_n 的值。由(1)式可以看出 l_n 逐渐增大,但是镜像电荷只能够存在于以 O 或者以 O' 为球心, R_0 为半径的球中,因此 l_n 的值不可能大于 R_0 的值,即 l_n 的范围是 $0 \leq l_n \leq R_0$ 。由(2)式也可以看出 q_n 的值逐渐减小,由 $\frac{R_0}{2D - l_{n-1}} < 1$,所以当 n 趋近

无限大时,放入的镜像电荷的电量趋近零,由此可以看出配置镜像电荷系列的 n 愈大,计算出来的电势值就更精确。在误差允许的范围内,可以用放入 n 个镜像(足够多)电荷产生的场代替所有感应金属球表面和无限大导体表面电荷产生的场。

2 数据分析

2.1 分析 l_n 的值

根据(1)式、(2)式,由 $l_1 = 0$, q_1 为初始值,可以算出 l_n 与 R_0 , r 的关系,见表1。

其中 $r = \frac{R_0}{2D}$,由表1可以看出,分式 l_{n-1} 中的分母变成分式 l_n 中分子的一部分,因而可以定义数列来标记 l_n 的分母,即把每一项 l_n 的分母看成数列的第 n 项,记为 a_n 。其中 $a_0 = 0$, $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 1 -$

r^2 , $a_4 = 1 - 2r^2$, …, 则 $l_n = \frac{r R_0 a_{n-1}}{a_n}$, $q_n = \frac{r^{n-1}}{a_n} q_1$, 可见 l_n , q_n 与数列 $\{a_n\}$ 有密切关系。

2.2 分析 a_n 的值

由于 a_n 中无论 n 为偶数还是奇数,都只包含 r 的偶次幂多项式,定义 a_n 中 r 各幂次项前面系数为

$$C_{n,2k}, a_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k C_{n,2k} r^{2k}, \text{ 其中 } \left[\frac{n}{2} \right] =$$

$$\begin{cases} \frac{n-2}{2} & n \text{ 为偶数} \\ \frac{n-1}{2} & n \text{ 为奇数} \end{cases}, \text{ 可以看出 } a_n \text{ 包括的代数项有如下}$$

规律:

(1) 当 n 为偶数时, a_n 的项数为 $\frac{n}{2}$ 项, 分别为

$$(-1)^{\frac{0}{2}} C_{n,0} r^0 + (-1)^{\frac{2}{2}} C_{n,2} r^2 + \dots + (-1)^{\frac{n}{2}} C_{n,n-2} r^{n-2} \quad (3)$$

(2) 当 n 为奇数时, a_n 的项数为 $\frac{n+1}{2}$ 项, 分别为

$$(-1)^{\frac{0}{2}} C_{n,0} r^0 + (-1)^{\frac{2}{2}} C_{n,2} r^2 + \dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} C_{n,n-1} r^{n-1} \quad (4)$$

2.3 分析与计算 $C_{n,2k}$

$$(1) C_{0,0} = 0, C_{1,0} = 1 \quad (5)$$

$$(2) C_{n,m} = 0 (m \geq n) \quad (6)$$

$$(3) C_{n,2k} = C_{n-1,2k} + C_{n-2,2k-2} \quad (7)$$

由递推关系(7)式以及(3)~(6)式可以得到任意 a_n 项, 从而求得镜象电荷 q_n 。

(4) 采用数学工具软件 MATLAB 6.5 计算 $C_{n,2k}$ 的值(部分数据见表2)。

表1 镜象电荷 q_n 距球心距离 l_n 与 R_0, r 的关系

l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	l_7
0	rR_0	$\frac{rR_0}{1-r^2}$	$\frac{(1-r^2)rR_0}{1-2r^2}$	$\frac{(1-2r^2)rR_0}{1-3r^2+r^4}$	$\frac{(1-3r^2+r^4)rR_0}{1-4r^2+3r^4}$	$\frac{(1-4r^2+3r^4)rR_0}{1-5r^2+6r^4-r^6}$

表2 叠加系数的部分值

k	n										
	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
1	1										
2	1										
3	1	1									
4	1	2									
5	1	3	1								
6	1	4	3								
7	1	5	6	1							
8	1	6	10	4							
9	1	7	15	10	1						
10	1	8	21	20	5						
11	1	9	28	35	15	1					
12	1	10	36	56	35	6					
13	1	11	45	84	70	21	1				

3 金属球与无限大金属板系统电容

于是金属球的总电量

$$q = q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + q_6 + q_7 + q_8 + \dots \quad (8)$$

根据上表中的数据, 金属球的总电量就为

$$q = q_1 \left(1 + r + \frac{r^2}{1-r^2} + \frac{r^3}{1-2r^2} + \frac{r^4}{1-3r^2+r^4} + \frac{r^5}{1-4r^2+3r^4} + \frac{r^6}{1-5r^2+6r^4-r^6} + \frac{r^7}{1-6r^2+10r^4-4r^6} + \frac{r^8}{1-7r^2+15r^4-10r^6+r^8} + \frac{r^9}{1-8r^2+21r^4-20r^6+5r^8} + \dots \right) \quad (9)$$

金属球的电势仅决定于 $+q_1$, 因为 $-q_1$ 和 $+q_2$; $-q_2$ 和 $+q_3 \dots$ 对金属球面电势的贡献为零。所以金属球的电势为

$$\varphi = \frac{q_1}{4\pi\epsilon R_0} \quad (10)$$

把(9)式、(10)式带入 $C = \frac{q}{\varphi}$, 这样金属球与无限大金属板系统的电容为

$$C = \frac{q}{\varphi} = 4\pi\epsilon R_0 \left(1 + r + \frac{r^2}{1-r^2} + \frac{r^3}{1-2r^2} + \frac{r^4}{1-3r^2+r^4} + \frac{r^5}{1-4r^2+3r^4} + \frac{r^6}{1-5r^2+6r^4-r^6} + \dots \right)$$

$$\left(\frac{r^7}{1-6r^2+10r^4-4r^6} + \frac{r^8}{1-7r^2+15r^4-10r^6+r^8} + \frac{r^9}{1-8r^2+21r^4-20r^6+5r^8} + \dots \right) \quad (11)$$

令

$$S_n = 1 + r + \frac{r^2}{1-r^2} + \frac{r^3}{1-2r^2} + \frac{r^4}{1-3r^2+r^4} + \frac{r^5}{1-4r^2+3r^4} + \frac{r^6}{1-5r^2+6r^4-r^6} + \dots \quad (12)$$

S_n 含有 $n+1$ 项, n 可以取任意大的正整数, n 实际代表了近似计算的级别, $S_1 = 1+r$, $S_2 = 1+r + \frac{r^2}{1-r^2}$, $S_3 = 1+r + \frac{r^2}{1-r^2} + \frac{r^3}{1-2r^2}$... , 只要计算求得 $q_2, q_3, q_4, \dots, q_n$, 由(8)式(9)式(12)式, 即可求得 S_n , 而 $q_n = \frac{r^{n-1}}{a_n} q_1$, 可见须计算 a_n, a_n 又涉及计算叠加系数 $C_{n,2k}$, 根据这样的思路, 只需计算出叠加系数 $C_{n,2k}$, 就可通过编写程序计算出 S_n , 相当于等价地求出了系统的电容 C 。由于 $C_{n,2k}$ 的解析式是明晰的, 这就使得系统的电容 C 的计算可以达到任意精确度。根据上面的表达式, 采用数学工具软件 MATLAB 6.5^[9] 编写程序, 分别作出 S_n 与 r 函数图象, 如图 2。

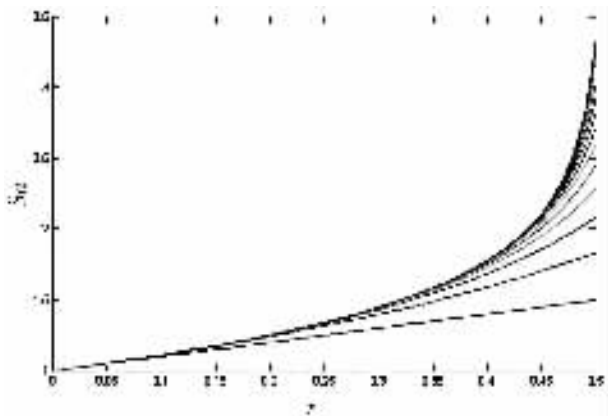


图 2 电容 C_n 中 S_n 与 r 的关系曲线图

4 讨论与结论

(1) 图 2 作出了 15 条曲线, 从下到上依次为 S_1, S_2, \dots, S_{15} 随 r 的变化函数图象, 从图 2 中可以看出 r 的值越小即球距导体板的距离越大, S_n 的值越小, 电容 C 越小, r 的值越大即球距导体板的距离越小, S_n 的值越大, 电容 C 越大。

(2) 由图 2 看出, 当 $r=0$ 时, 即无限大金属板在无穷远时, 代入(11)式中, 可得

$$C = \frac{q}{\varphi} = 4\pi\epsilon R_0 (1 + 0 + 0 + 0 + 0 + \dots) = 4\pi\epsilon R_0 \quad (13)$$

(13) 式即为孤立导体球的电容, 说明无限大金属板在无穷远时系统的电容最小。当 r 为 0.5 时, 代入(11)式, 可得

$$C = \frac{q}{\varphi} = 4\pi\epsilon R_0 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{1 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{1 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^3} + \dots \right) \quad (14)$$

化简(14)式, 可得

$$C = \frac{q}{\varphi} = 4\pi\epsilon R_0 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots \right) \quad (15)$$

(15) 式中包含发散级数 $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots \right)$, 说明金属球无限接近导体平板的情况, 相当于电容器极板的距离趋于零, 电容器的电容自然趋于无限大。在 $r=0.5$, 即 $D=r$ 的严格条件下, 金属球与导体平板相接触, 两者形成整体, 电容器的构造已经发生了质的变化, 这时的电容值一般说来应为有限值, 仅当平板为无限大时, 电容值才为无限大。

(3) 根据前面的分析, 知道金属球与无限大导体平板组成系统电容的大小与金属球半径 R_0 有关, 也与金属球与无限大导体板的距离 D 或者参数 r 有关。只要给定 R_0 和 r 或者 D 的具体数值, 由(11)式、(12)式可以计算求得系统的电容至任意精度。又从图 2 可以看出, 当 $n \geq 10$ 时, 各级别的 $S_n \sim r$ 关系曲线已接近重合。

参考文献:

- [1] 郭硕鸿. 电动力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1997. 58-78.
- [2] 全泽松. 电磁场理论[M]. 北京: 高等教育出版社, 1995. 93-113.
- [3] 刘成芳. 理论电磁场[M]. 北京: 高等教育出版社, 1995. 67-113.
- [4] 陈重, 崔正勤. 电磁场理论基础[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003. 171-180.
- [5] 贺金平, 李永平, 刘建成. 电磁场理论要点与解题[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003. 52-67.
- [6] BLEANEY B I, BLEANEY B. Electricity and Magnetism [M]. Third Edition. Great Britain: Oxford University Press, 1975. 48-56.
- [7] 费曼. 费曼物理学讲义[M]. 王之辅译. 上海: 上海科学技术出版社, 1983. 75-76.

[8] 胡先权 , 欧叶红. 金属球与无限大金属板系统电容的计算与讨论[J]. 湖南理工学院报(自然科学版) , 2004 , 17 (3) : 28-31.

民邮电出版社 2001. 21-51.

(责任编辑 欧红叶)

[9] 李丽 , 王振领. MATLAB 工程计算及应用[M]. 北京 : 人