强预不变凸函数的性质*

唐 万 梅
(重庆师范大学 数学与计算机科学学院,重庆 400047)

摘 要:给出了在上半连续(下半连续)条件下判别一个函数是强预不变凸函数的两个条件。另外还给出了强预不变凸函数、严格预不变凸函数和半严格预不变凸函数的一些性质。
关键词:数学规划;强预不变凸函数;强凸函数;半连续性
中图分类号:O221.1　　文献标识码:A　　文章编号:1672-6693(2006)02-0008-05

The Properties of Strongly Preinvex Functions

TANG Wan-mei
(College of Mathematics and Computer, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: In this paper, we present two conditions to determine the strong preinvexity of a function, under the condition of upper (respectively, lower) semicontinuity. We also give some properties of strongly preinvex functions and strictly preinvex functions and semistrict preinvex functions.
Key words: mathematical programming; strongly preinvex function; strongly convex function; semicontinuity

1 预备知识

在数理经济、工程、管理科学及优化理论中,凸性及广义凸性起着十分重要的作用,因此,凸性及广义凸性的研究在数学规划中是最重要的方面。最近,Weir 和 Mond 在文献[1]中引入了预不变凸函数的概念并应用它在非线性规划中建立了充分的最优性条件;杨新民和李端在文献[2,3]中提出了严格预不变凸函数及半严格预不变凸函数的概念,并讨论了预不变凸函数和半严格预不变凸函数之间的关系,得到了预不变凸函数的一些性质;杨新民在文献[4]中也讨论了凸函数、半严格凸函数和严格凸函数之间的关系;颜丽佳和刘芙萍在文献[5]中提出了强预不变凸函数的概念,并讨论了它的一些性质。

本文对强预不变凸函数作了进一步的讨论,给出了在上半连续(下半连续)条件下判别一个函数是强预不变凸函数的两个充分条件。同时还给出了强预不变凸函数、严格预不变凸函数和半严格预不变凸函数的一些性质。

定义 1[6]　设集合 $H\subset \mathbf{R}^n$ 如果对任意的 $x,y\in H$ 和 $\lambda\in[0,1]$,恒有 $\lambda x+(1-\lambda)y\in H$,则称 H 为凸集。

定义 2[1]　设集合 $K\subset \mathbf{R}^n$,如果存在一个向量函数 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$,使得 $\forall x,y\in K,\lambda\in[0,1]$,恒有 $y+\lambda\eta(x,y)\in K$,则称 K 为不变凸集。

定义 3[4]　设集合 $H\subset \mathbf{R}^n$ 是凸集,函数 $f: H\to\mathbf{R}$。若对 $\forall x,y\in H,x\neq y$,恒有
$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)<\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y),\ \forall\lambda\in(0,1),$$
则称函数 f 为定义在 H 上的严格凸函数。

定义 4[4]　设集合 $H\subset \mathbf{R}^n$ 是凸集,函数 $f: H\to\mathbf{R}$ 如果对任意的 $x,y\in H,f(x)\neq f(y)$,恒有

* 收稿日期:2005-12-19　修回日期:2006-03-30
资助项目:国家自然科学基金(No.10171118;No.10471159);教育部重点项目;教育部"新世纪优秀人才支持计划";重庆师范大学校级科研项目(No.05XLY017)
作者简介:唐万梅(1965-),女,重庆人,副教授,博士研究生,研究方向为神经网络及应用、最优化理论。

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)<\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y),\forall\lambda\in(0,1),$$

则称函数 f 为定义在 H 上的半严格凸函数。

定义 5[7] 设集合 $H\subset\mathbf{R}^n$ 是凸集，如果存在常数 $\beta>0$ 使得函数 $f: H\to\mathbf{R}$ 对任意的 $x,y\in H$，恒有

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)-\beta\lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2,\forall\lambda\in[0,1],$$

则称函数 f 为定义在 H 上的强凸函数。

定义 6[8] 设集合 $H\subset\mathbf{R}^n$ 是凸集，函数 $f: H\to\mathbf{R}$。如果对任意的 $x,y\in H$，$x\neq y$，恒有

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)<\max\{f(x),f(y)\},\forall\lambda\in(0,1),$$

则称函数 f 为定义在 H 上的严格拟凸函数。

定义 7[8] 设集合 $H\subset\mathbf{R}^n$ 是凸集，函数 $f: H\to\mathbf{R}$ 如果对任意的 $x,y\in H$，$f(x)\neq f(y)$，恒有

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)<\max\{f(x),f(y)\},\forall\lambda\in(0,1),$$

则称函数 f 为定义在 H 上的半严格拟凸函数。

定义 8[8] 设集合 $H\subset\mathbf{R}^n$ 是凸集，如果存在常数 $\beta>0$ 使得函数 $f: H\to\mathbf{R}$ 对任意的 $x,y\in H$，恒有

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\max\{f(x),f(y)\}-\beta\lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2,\forall\lambda\in[0,1],$$

则称函数 f 为定义在 H 上的强拟凸函数。

定义 9[2] 设集合 $K\subset\mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta: \mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的不变凸集，函数 $f: K\to\mathbf{R}$ 如果对任意的 $x,y\in K$，$x\neq y$，恒有

$$f(y+\lambda\eta(x,y))<\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y),\forall\lambda\in(0,1),$$

则称函数 f 为定义在 K 上的严格预不变凸函数。

定义 10[2] 设集合 $K\subset\mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta: \mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的不变凸集，函数 $f: K\to\mathbf{R}$ 如果对任意的 $x,y\in K$，$f(x)\neq f(y)$，恒有

$$f(y+\lambda\eta(x,y))<\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y),\forall\lambda\in(0,1),$$

则称函数 f 为定义在 K 上的半严格预不变凸函数。

定义 11[5] 设集合 $K\subset\mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta: \mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的不变凸集，如果存在常数 $\beta>0$ 使得函数 $f: K\to\mathbf{R}$ 对任意的 $x,y\in K$，恒有

$$f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2,\forall\lambda\in[0,1],$$

则称函数 f 为定义在 K 上的强预不变凸函数。

条件 1 设集合 $K\subset\mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta: \mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的不变凸集，称函数 $f: K\to\mathbf{R}$ 满足条件 1，如果 $\forall x,y\in K$，有 $f(y+\eta(x,y))\leqslant f(x)$。

条件 1 是强预不变凸函数当 $\lambda=1$ 时的特殊情况。

条件 2[9] 设向量函数 $\eta: \mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$，称函数 η 满足条件 2，如果 $\forall x,y\in\mathbf{R}^n$ 和 $\lambda\in[0,1]$，有

$$\eta(y,y+\lambda\eta(x,y))=-\lambda\eta(x,y),\eta(x,y+\lambda\eta(x,y))=(1-\lambda)\eta(x,y)。$$

容易验证，若 η 满足条件 2，则 $\eta(y+\lambda\eta(x,y),y)=\lambda\eta(x,y)$[10]。

引理[5] 设集合 $K\subset\mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta: \mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的不变凸集，η 满足条件 2，如果函数 $f: K\to\mathbf{R}$ 在 K 上是下半连续的，且满足条件 1，那么 f 在 K 上是关于 η 的强预不变凸函数，当且仅当存在常数 $\beta>0$ 使得对 $\forall x,y\in K$，$\exists\alpha\in(0,1)$，使得

$$f(y+\alpha\eta(x,y))\leqslant\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)-\beta\alpha(1-\alpha)\|\eta(x,y)\|^2。$$

2 主要结果

本节将给出在上半连续(下半连续)条件下判别一个函数是强预不变凸函数的两个充分条件。

定理 1 设集合 $K\subset\mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta: \mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的非空不变凸集，函数 η 满足条件 2，$f: K\to\mathbf{R}$ 是下半连续函数且满足条件 1。如果存在 $\alpha\in(0,1)$，$\beta>0$，使得 $\forall x,y\in K$，$f(x)\neq f(y)$ 恒有

$$f(y+\alpha\eta(x,y))<\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)-\beta\alpha(1-\alpha)\|\eta(x,y)\|^2,\tag{1}$$

则 f 是集合 K 上的强预不变凸函数。

证明 由上一节的引理，只需证明存在一个常数 $\beta>0$，使得对 $\forall x,y\in K$，均存在一个 $\lambda\in(0,1)$，恒有 $f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2$。

用反证法。假设对任意的常数 $\beta>0$，存在一对 $x,y\in K$ 使得

$$f(y+\lambda\eta(x,y))>\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2,\forall\lambda\in(0,1) \tag{2}$$

如果 $f(x)\neq f(y)$，那么由(1)式，有

$$f(y+\alpha\eta(x,y))<\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)-\beta\alpha(1-\alpha)\|\eta(x,y)\|^2,$$

与(2)式矛盾。如果 $f(x)=f(y)$，则(2)式意味着

$$f(y+\lambda\eta(x,y))>f(x)-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2=f(y)-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2,\forall\lambda\in(0,1) \tag{3}$$

由条件 2，得到

$$\begin{gathered}f[y+\lambda\eta(x,y)+\alpha\eta(x,y+\lambda\eta(x,y))]=f[y+(\lambda+\alpha(1-\lambda))\eta(x,y)]>\\ f(y)-\beta(\lambda+\alpha(1-\lambda))[1-(\lambda+\alpha(1-\lambda))]\|\eta(x,y)\|^2,\forall\lambda\in(0,1)。\end{gathered} \tag{4}$$

由条件 2 及 (1)、(3) 式，有

$$\begin{gathered}f[y+\lambda\eta(x,y)+\alpha\eta(x,y+\lambda\eta(x,y))]<\\ \alpha f(x)+(1-\alpha)f(y+\lambda\eta(x,y))-\beta\alpha(1-\alpha)\|\eta(x,y+\lambda\eta(x,y))\|^2<\\ f(y+\lambda\eta(x,y))+\alpha\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2-\alpha\beta(1-\alpha)(1-\lambda)^2\|\eta(x,y)\|^2,\forall\lambda\in(0,1)。\end{gathered} \tag{5}$$

再次由 (1)、(4) 和 (5) 式，有

$$\begin{gathered}f[y+(1-\alpha)(\lambda+\alpha(1-\lambda))\eta(x,y)]=\\ f[y+\lambda\eta(x,y)+\alpha\eta(x,y+\lambda\eta(x,y))+\alpha\eta(y,y+\lambda\eta(x,y)+\alpha\eta(x,y+\lambda\eta(x,y)))]<\\ \alpha f(y)+(1-\alpha)f[y+\lambda\eta(x,y)+\alpha\eta(x,y+\lambda\eta(x,y))]-\\ \beta\alpha(1-\alpha)\|\eta(y,y+\lambda\eta(x,y)+\alpha\eta(x,y+\lambda\eta(x,y)))\|^2<f[y+\lambda\eta(x,y)+\alpha\eta(x,y+\lambda\eta(x,y))]+\\ \alpha\beta(\lambda+\alpha(1-\lambda))[1-(\lambda+\alpha(1-\lambda))]\|\eta(x,y)\|^2-\beta\alpha(1-\alpha)(\lambda+\alpha(1-\lambda))^2\|\eta(x,y)\|^2<\\ f(y+\lambda\eta(x,y))+\alpha\beta\{\lambda(1-\lambda)-(1-\alpha)(1-\lambda)^2+\\ (\lambda+\alpha(1-\lambda))[1-(\lambda+\alpha(1-\lambda))]-(1-\alpha)(\lambda+\alpha(1-\lambda))^2\}\|\eta(x,y)\|^2,\forall\lambda\in(0,1)\end{gathered} \tag{6}$$

取 $\lambda=\dfrac{1-\alpha}{2-\alpha}\in(0,1)$，则 $1-\lambda=\dfrac{1}{2-\alpha}$，有

$$\begin{gathered}\alpha\beta\{\lambda(1-\lambda)-(1-\alpha)(1-\lambda)^2+(\lambda+\alpha(1-\lambda))[1-(\lambda+\alpha(1-\lambda))]-(1-\alpha)(\lambda+\alpha(1-\lambda))^2\}=\\ \alpha\beta\left\{\left[\frac{1-\alpha}{(2-\alpha)^2}-\frac{1-\alpha}{(2-\alpha)^2}\right]+\frac{1}{2-\alpha}\cdot\left[1-\frac{1}{2-\alpha}\right]-(1-\alpha)\cdot\left(\frac{1}{2-\alpha}\right)^2\right\}=0。\end{gathered}$$

即上面的(6)式意味着

$$f\left(y+\frac{1-\alpha}{2-\alpha}\eta(x,y)\right)<f\left(y+\frac{1-\alpha}{2-\alpha}\eta(x,y)\right),$$

矛盾。 证毕

以下定理可类似证明。

定理 2 设集合 $K\subset\mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的非空不变凸集，函数 η 满足条件 2，$f:K\to\mathbf{R}$ 是上半连续函数且满足条件 1。如果存在 $\alpha\in(0,1)$，$\beta>0$，使得 $\forall x,y\in K$，$f(x)\neq f(y)$ 恒有

$$f(y+\alpha\eta(x,y))<\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)-\beta\alpha(1-\alpha)\|\eta(x,y)\|^2,$$

则 f 是集合 K 上的强预不变凸函数。

下面将给出强预不变凸函数及严格预不变凸函数和半严格预不变凸函数的一些性质。

定理 3 设集合 K 是关于函数 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的不变凸集，函数 η 满足条件 2，且对任意的 $x,y\in K$，当 $x\neq y$ 时 $\eta(x,y)\neq0$。如果函数 f 是集合 K 上关于 η 的强预不变凸函数，则对 $\forall x,y\in K$，$x\neq y$，函数 $\phi(\lambda)=f(y+\lambda\eta(x,y))$ 是 $[0,1]$ 上的强凸函数。

证明 假设 f 是 K 上关于 η 的强预不变凸函数。则由强预不变凸函数的定义，存在一个常数 $\beta>0$ 使得对 $\forall x,y\in K$，有

$$f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2,\forall\lambda\in[0,1]。 \tag{7}$$

对 $\forall\alpha_1,\alpha_2\in[0,1]$，$\forall\lambda\in[0,1]$，如果 $\alpha_1=\alpha_2$，有

$$\phi(\lambda\alpha_1+(1-\lambda)\alpha_2)=\phi(\alpha_2)=f(y+\alpha_2\eta(x,y))=\lambda\phi(\alpha_1)+(1-\lambda)\phi(\alpha_2)-\beta\lambda(1-\lambda)\|\alpha_1-\alpha_2\|^2$$

如果 $\alpha_1\neq\alpha_2$。不失一般性可假设 $\alpha_1>\alpha_2$。由于 $\alpha_1,\alpha_2\in[0,1]$，因此 $\alpha_2\neq 1$，且 $0<\frac{\alpha_1-\alpha_2}{1-\alpha_2}\leqslant 1$，有

$$\phi(\lambda\alpha_1+(1-\lambda)\alpha_2)=f(y+(\alpha_2+\lambda(\alpha_1-\alpha_2))\eta(x,y))= f(y+\alpha_2\eta(x,y)+\lambda(\alpha_1-\alpha_2)\eta(x,y)) \tag{8}$$

由条件 2，有

$$\eta(y+\alpha_1\eta(x,y),y+\alpha_2\eta(x,y))=\eta(y+\alpha_2\eta(x,y)+(\alpha_1-\alpha_2)\eta(x,y),y+\alpha_2\eta(x,y))=$$
$$\eta\left(y+\alpha_2\eta(x,y)+\frac{\alpha_1-\alpha_2}{1-\alpha_2}\eta(x,y+\alpha_2\eta(x,y)),y+\alpha_2\eta(x,y)\right)=$$
$$\frac{\alpha_1-\alpha_2}{1-\alpha_2}\eta(x,y+\alpha_2\eta(x,y))=(\alpha_1-\alpha_2)\eta(x,y) \tag{9}$$

由(7)~(9)式，得到

$$\phi(\lambda\alpha_1+(1-\lambda)\alpha_2)=f(y+(\alpha_2+\lambda(\alpha_1-\alpha_2))\eta(x,y))=$$
$$f(y+\alpha_2\eta(x,y)+\lambda\eta(y+\alpha_1\eta(x,y),y+\alpha_2\eta(x,y)))\leqslant$$
$$\lambda f(y+\alpha_1\eta(x,y))+(1-\lambda)f(y+\alpha_2\eta(x,y))-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(y+\alpha_1\eta(x,y),y+\alpha_2\eta(x,y))\|^2=$$
$$\lambda\phi(\alpha_1)+(1-\lambda)\phi(\alpha_2)-\beta\lambda(1-\lambda)\|\alpha_1-\alpha_2\|^2\cdot\|\eta(x,y)\|^2=$$
$$\lambda\phi(\alpha_1)+(1-\lambda)\phi(\alpha_2)-\beta'\lambda(1-\lambda)\|\alpha_1-\alpha_2\|^2$$

这里取 $\beta'=\beta\|\eta(x,y)\|^2$，因为对 $\forall x,y\in K$ 有 $x\neq y,\eta(x,y)\neq 0$，及 $\beta>0$，因此 $\beta'>0$。故 $\phi(\lambda)$ 是 $[0,1]$ 上的强凸函数。 证毕

下面的定理可类似证明。

定理 4 设集合 K 是关于函数 η: $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的不变凸集，同时函数 η 满足条件 2，且对任意的 $x,y\in K$ 当 $x\neq y$ 时 $\eta(x,y)\neq 0$。如果函数 f: $K\to\mathbf{R}$ 是集合 K 上关于 η 的强预不变凸函数，则对 $\forall x,y\in K,x\neq y$，函数 $\phi(\lambda)=f(y+\lambda\eta(x,y))$ 是 $[0,1]$ 上的强拟凸函数。

定理 5 设集合 K 是关于函数 η: $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的不变凸集，同时函数 η 满足条件 2，且对任意的 $x,y\in K$ 当 $x\neq y$ 时 $\eta(x,y)\neq 0$。如果函数 f: $K\to\mathbf{R}$ 是集合 K 上关于 η 的严格预不变凸函数，则对 $\forall x,y\in K$，函数 $\phi(\lambda)=f(y+\lambda\eta(x,y))$ 是 $(0,1)$ 上的严格凸函数。

证明 假设函数 f 是集合 K 上关于 η 的严格预不变凸函数。由严格预不变凸函数的定义，对 $\forall x,y\in K,x\neq y$，恒有

$$f(y+\lambda\eta(x,y))<\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y),\ \forall\lambda\in(0,1). \tag{10}$$

对 $\forall\alpha_1,\alpha_2\in(0,1)$，$\forall\lambda\in(0,1)$。如果 $\alpha_1\neq\alpha_2$，不失一般性可假设 $\alpha_1>\alpha_2$，则有 $0<\frac{\alpha_1-\alpha_2}{1-\alpha_2}<1$。因此，有

$$\phi(\lambda\alpha_1+(1-\lambda)\alpha_2)=f(y+(\alpha_2+\lambda(\alpha_1-\alpha_2))\eta(x,y))= f(y+\alpha_2\eta(x,y))+\lambda(\alpha_1-\alpha_2)\eta(x,y)) \tag{11}$$

因为对 $\forall x,y\in K,x\neq y,\eta(x,y)\neq 0$ 以及 $\alpha_1\neq\alpha_2$，则有 $y+\alpha_1\eta(x,y)\neq y+\alpha_2\eta(x,y)$，因此，由(9)~(11)式，有

$$\phi(\lambda\alpha_1+(1-\lambda)\alpha_2)=f(y+(\alpha_2+\lambda(\alpha-\alpha_2))\eta(x,y))=f(y+\alpha_2\eta(x,y)+\lambda\eta(y+\alpha_1\eta(x,y),y+\alpha_2\eta(x,y)))<$$
$$\lambda f(y+\alpha_1\eta(x,y))+(1-\lambda)f(y+\alpha_2\eta(x,y))=\lambda\phi(\alpha_1)+(1-\lambda)\phi(\alpha_2)$$

故函数 $\phi(\lambda)$ 是 $(0,1)$ 上的严格凸函数。 证毕

定理 6 设集合 K 是关于函数 η: $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的不变凸集，函数 η 满足条件 2。如果函数 f: $K\to\mathbf{R}$ 是集合 K 上关于 η 的半严格预不变凸函数，则对 $\forall x,y\in K$，函数 $\phi(\lambda)=f(y+\lambda\eta(x,y))$ 是 $(0,1)$ 上的半严格凸函数。

证明 假设函数 f 是集合 K 上关于 η 的半严格预不变凸函数。由半严格预不变凸函数的定义，对 $\forall x,y\in K,f(x)\neq f(y)$ 恒有

$$f(y+\lambda\eta(x,y))<\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y),\forall\lambda\in(0,1) \tag{12}$$

对 $\forall\alpha_1,\alpha_1\in(0,1)$，$\forall\lambda\in(0,1)$。如果 $\phi(\alpha_1)\neq\phi(\alpha_2)$，则有 $f(y+\alpha_1\eta(x,y))\neq f(y+\alpha_2\eta(x,y))$ 及 $\alpha_1\neq\alpha_2$。不失一般性可假设 $\alpha_1>\alpha_2$，则 $0<\frac{\alpha_1-\alpha_2}{1-\alpha_2}<1$。因此，有

$$\begin{aligned}\phi(\lambda\alpha_1+(1-\lambda)\alpha_2)&=f(y+(\alpha_2+\lambda(\alpha_1-\alpha_2))\eta(x,y))=\\&f(y+\alpha_2\eta(x,y)+\lambda(\alpha_1-\alpha_2)\eta(x,y))\end{aligned} \tag{13}$$

由 $f(y+\alpha_1\eta(x,y))\neq f(y+\alpha_2\eta(x,y))$ 及(9)、(12)和(13)式，得到

$$\begin{aligned}\phi(\lambda\alpha_1+(1-\lambda)\alpha_2)&=f(y+(\alpha_2+\lambda(\alpha_1-\alpha_2))\eta(x,y))=\\&f(y+\alpha_2\eta(x,y)+\lambda\eta(y+\alpha_1\eta(x,y),y+\alpha_2\eta(x,y)))<\\&\lambda f(y+\alpha_1\eta(x,y))+(1-\lambda)f(y+\alpha_2\eta(x,y))=\lambda\phi(\alpha_1)+(1-\lambda)\phi(\alpha_2)\end{aligned}$$

故函数 $\phi(\lambda)$ 是 $(0,1)$ 上的半严格凸函数。 证毕

致谢：衷心感谢杨新民教授对论文撰写的指导！

参考文献：

[1] WEIR T, MOND B. Pre-invex Functions in Multiple Objective Optimization[J]. J Math Anal Appl, 1988, 136(1): 29-38.

[2] YANG X M, LI D. Semistrictly Preinvex Functions[J]. J Math Anal Appl, 2001, 258(1): 287-308.

[3] YANG X M, LI D. On Properties of Preinvex Functions[J]. J Math Anal Appl, 2001, 256(1): 229-241.

[4] YANG X M. Semistrictly Convex Functions[J]. Opsearch, 1994, 31(1): 15-27.

[5] 严丽佳，刘芙萍. 强预不变凸函数[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2005, 22(1): 11-15.

[6] MANGASARIAN O L. Nonlinear Programming[M]. New York: McGraw-Hill, 1969.

[7] KASSAY G, KOLUMBAN J. Multivalued Parametric Variational Inequalities with α-pseudomonotone Maps[J]. J Optim Theory Appl, 2000, 107(1): 35-50.

[8] AVRIEL M, DIEWERT W E, SCHAIBLE S, et al. Generalized Concavity[M]. New York: Plenum Press, 1988.

[9] MOHAN S R, NEOGY S K. On invex Set and Preinvex Functions [J]. J Math Anal Appl, 1995, 189: 901-908.

[10] YANG X M, YANG X Q, TEO K L. Criteria for Generalized Invex Monotonicities[J]. European J Oper Res, 2005, 164(1): 115-119.

(责任编辑　黄　颖)