几乎凸的性质及应用*

张 健

(重庆师范大学 数学与计算机科学学院,重庆 400047)

摘 要:首先定义一个集值映射,$\lambda: S\to 2^{(0,1)}$,$\lambda(S)=\{\lambda\in(0,1)\mid\forall x,y\in S\Rightarrow\lambda x+(1-\lambda)y\in S\}$,并证明了以下结果:1)$\lambda(S)\neq\varnothing\Rightarrow cl(\lambda(S))=[0,1]$,$co(S)\subset cl(S)$;2)$\cap_{\eta\in\Gamma}\lambda(S_\eta)\neq\varnothing\Rightarrow cl(\cap_{\eta\in\Gamma}\lambda(S_\eta))=[0,1]$。基于以上结果,给出了向量函数、集值映射等函数的拟凸性在半连续下的特性。

关键词:几乎凸集;稠密;向量映射;集值映射;拟凸性;半连续

中图分类号:O221.1 **文献标识码**:A **文章编号**:1672-6693(2006)02-0013-03

Properties of Nearly Convexity and Their Applications

ZHANG Jian

(College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract:Let set-valued function $\lambda: S\to 2^{(0,1)}$,$\lambda(S)=\{\lambda\in(0,1)\mid\forall x,y\in S\Rightarrow\lambda x+(1-\lambda)y\in S\}$. We have proved that $\lambda(S)\neq\varnothing\Rightarrow cl(\lambda(S))=[0,1]$, $co(S)\subset cl(S)$ and $\cap_{\eta\in\Gamma}\lambda(S_\eta)\neq\varnothing\Rightarrow cl(\cap_{\eta\in\Gamma}\lambda(S_\eta))=[0,1]$. Based on these properties, we give characterizations of quasiconvexity for vector-valued functions and set-valued maps under semi-continuity.

Key words:nearly convex; density; vector function; set-valued function; quasiconvex; semi-continuous

凸集的相关性质,在文献[1]中已经给出了比较详细的研究,而几乎凸研究较少。本文根据几乎凸概念,提出集值映射 $\lambda: S\longmapsto 2^{(0,1)}$,得到几条有意思的性质,如 E 为分离拓扑线性空间,$\{S_\alpha:\alpha\in\Gamma\}$ 是 E 的子集簇,若 $\cap_{\alpha\in\Gamma}\lambda(S_\alpha)\neq\varnothing$,则有 $\cap_{\alpha\in\Gamma}\lambda(S_\alpha)$ 在区间[0,1]中稠密,以及几乎凸集与凸集的关系等。利用这些性质讨论了各种映射的拟凸性和半连续性相关性质,将文献[2]中的结果推广到向量函数,集值映射。

1 几乎凸及性质

定义 1 (几乎凸集)设 E 是一线性空间,$S\subset E$,记有 $\lambda(S)=\{\lambda\in(0,1)\mid\forall x\in S,y\in S$,有 $\lambda x+(1-\lambda)y\in S\}$。称 S 为几乎凸集,如果 $\lambda(S)\neq\varnothing$。

显然,凸集一定是几乎凸集,但反之不然。

例 1 $S=\{(x_1,x_2)\in E^2\mid x_1\in\mathbf{Q}^+,x_2\in\mathbf{Q}^+\}$。则 S 是几乎凸集,但不是凸集。

引理 1 如果 $\lambda(S)\neq\varnothing$,则 $\lambda(S)$ 在闭区间[0,1]中稠密。即 $\lambda(S)\neq\varnothing\Rightarrow cl(\lambda(S))=[0,1]$。

证明 反证法。若 $cl(\lambda(S))\neq[0,1]$,而 $\lambda(S)\subset[0,1]\Rightarrow cl(\lambda(S))\subset[0,1]$。则 $\exists\lambda_0\in[0,1]$,且 $\lambda_0\notin cl(\lambda(S))$。令 $A=\lambda(S)\cap\{0,1\}$,则 $\sup\{\lambda\in A\mid\lambda\leqslant\lambda_0\}$ 和 $\inf\{\lambda\in A\mid\lambda\geqslant\lambda_0\}$ 都存在,分别记为 λ_1,λ_2,显然有 $0\leqslant\lambda_1<\lambda_0<\lambda_2\leqslant1$,取 $\alpha\in\lambda(S)$,由 λ_1,λ_2 的定义,则 $\exists\mu_1,\mu_2\in A$,使得 $\mu_1\leqslant\lambda_1$,$\lambda_2\leqslant\mu_2$,且 $\max\{\alpha,1-\lambda\}(\mu_1-\mu_2)<\lambda_2-\lambda_1$。

令 $\bar\lambda=\alpha\mu_1+(1-\alpha)\mu_2\in(0,1)$,则 $\forall x,y\in S$,有

$$\bar\lambda x+(1-\bar\lambda)y=\alpha(\mu_1x+(1-\mu_1)y)+(1-\alpha)(\mu_2x+(1-\mu_2)y)\in S$$

从而有 $\bar\lambda\in\lambda(S)\subset A$,

1)若 $\bar\lambda\geqslant\lambda_0$ 时,由 $\bar\lambda-\mu_1=(1-\alpha)(\mu_2-\mu_1)<\lambda_2-\lambda_1$,知 $\bar\lambda<\lambda_2$,但 $\bar\lambda\geqslant\lambda_0$,且 $\bar\lambda\in A$,则与 $\lambda_2=\inf\{\lambda\in A\mid\lambda\geqslant\lambda_0\}$ 的定义矛盾。

2)若 $\bar\lambda\leqslant\lambda_0$ 时,由 $\mu_2-\bar\lambda=\alpha(\mu_2-\mu_1)<\lambda_2-\lambda_1$,知 $\bar\lambda>\lambda_1$,但 $\bar\lambda\leqslant\lambda_0$,且 $\bar\lambda\in A$,则与 $\lambda_1=\sup\{\lambda\in$

* 收稿日期:2005-06-10

资助项目:国家自然科学基金项目(No. 10171118)

作者简介:张健(1972-),男,四川成都人,讲师,研究方向为广义凸性及最优算法。

$A\mid\lambda\leqslant\lambda_0\}$ 的定义矛盾。

综上所述，$\lambda(S)\neq\varnothing\Rightarrow cl(\lambda(S))=[0,1]$。

证毕

引理 2 E 为分离拓扑线性空间，$S\subset E$。有

$$\lambda(S)\neq\varnothing\Rightarrow co(S)\subset cl(S),$$

即 S 在 S 凸包中稠。

证明 $\forall x\in co(S)$，则 $\exists x_1,x_2,\cdots,x_n\in S$，以及 $\lambda_1>0,\lambda_2>0,\cdots,\lambda_n>0$，且 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$，有 $x=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i$。

1）当 $n=1$ 时，即 $x\in S\subset cl(S)$；

2）当 $n=2$ 时，$x=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2=\lambda_1x_1+(1-\lambda_1)x_2$，因 $cl(\lambda(S))=[0,1]$，取 $\lambda_k\in\lambda(S):\lambda_k\to\lambda_1$，则 $y_k=\lambda_kx_1+(1-\lambda_k)x_2\in S$，有 $y_k\to x$，故 $x\in cl(S)$。

3）假设当 $n=k$ 时，$\forall\mu_1>0,\mu_2>0,\cdots,\mu_{k+1}>0$，且 $\sum_{i=1}^{k}\mu_i=1$，都有

$$x=\sum_{i=1}^{k}\mu_ix_i\in cl(S),\forall x_i\in S,i=1,2,\cdots,k$$

当 $n=k+1$ 时，对 $\forall\mu_1>0,\mu_2>0,\cdots,\mu_{k+1}>0$，且 $\sum_{i=1}^{k+1}\mu_i=1$ 有

$$x=\sum_{i=1}^{k+1}\mu_ix_i=(1-\mu_{k+1})\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{\mu_i}{1-\mu_{k+1}}x_i\right)+\mu_{k+1}x_{k+1}$$

由归纳假设，存在序列 $y_m\in S$，有 $y_m\to\sum_{i=1}^{k}\frac{\mu_i}{1-\mu_{k+1}}x_i(m\to\infty)$，对 $\forall y_m$，令

$$x_m=(1-\mu_{k+1})y_m+\mu_{k+1}x_{k+1}$$

同样由归纳假设或者 2)，存在序列 $y_{m_n}\in S$，有 $y_{m_n}\to x_m(n\to\infty,\forall m)$，故有

$$\exists y_{m_n}\in S,y_{m_n}\to x(m\to\infty,n\to\infty)$$

从而有 $x\in cl(S)$。

综合 1）~3）知，只要 $x=\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_i$，以及 $\lambda_i>0,x_i\in S,i=1,2,\cdots,n$，且 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$，则有 $x\in cl(S)$，也即 $co(S)\subset cl(S)$。

证毕

推论 1 E 为分离拓扑线性空间，$S\subset E$，且 S 为闭集，则 $\lambda(S)\neq\varnothing\Rightarrow co(S)=S$。

推论 2 E 为拓扑线性空间，$S\subset E$，且 S 为开集，则 $\lambda(S)\neq\varnothing\Rightarrow co(S)=S$。

证明 不妨设 S 非空。$\forall x,y\in S,z=\lambda x+(1-\lambda)y(\forall\lambda\in(0,1))$。因为 $cl(\lambda(S))=[0,1]$，$\exists\lambda_k\to\lambda\Rightarrow\left(\frac{\lambda}{\lambda_k}-1\right)\to0$，令

$$x_k=x+\left(\frac{\lambda}{\lambda_k}-1\right)(x-y)$$

则 $x_k\to x$，又 x 是 S 的内点，则 $\exists\lambda_k\in\lambda(S)$，使得 $x_k\in S$。那么 $z=\lambda_kx_k+(1-\lambda_k)y\in S$，从而 S 为凸集，也即 $S=co(S)$。

证毕

推论 3 E 为分离拓扑线性空间，$S\subset E$，则 $\lambda(S)\neq\varnothing\Rightarrow\operatorname{int}(S)$ 为凸集。

引理 3 E 为分离拓扑线性空间，$\{S_\alpha\mid\alpha\in\Gamma\}$ 是 E 的子集簇，若 $\cap_{\alpha\in\Gamma}\lambda(S_\alpha)\neq\varnothing$，则有 $\cap_{\alpha\in\Gamma}\lambda(S_\alpha)$ 在区间 $[0,1]$ 中稠密。

证明 记 $\Lambda=\cap_{\alpha\in\Gamma}\lambda(S_\alpha)\cup\{0,1\}$。由条件，可取 $\lambda_0\in\lambda(S_\alpha):\forall\alpha\in\Gamma$。$\forall\mu_1,\mu_2\in\Lambda$，不妨设 μ_1,μ_2 都不等于 0 和 1，有 $\mu_1,\mu_2\in\lambda(S_\alpha):\forall\alpha\in\Gamma$，令 $\mu=\lambda_0\mu_1+(1-\lambda_0)\mu_2,\forall x,y\in S_\alpha$，有

$$\mu x+(1-\mu)y=\lambda_0(\mu_1x+(1-\mu_1)y)+(1-\lambda_0)(\mu_2x+(1-\mu_2)y)。$$

由 μ_1,μ_2,λ_0 的定义，知道

$$\mu x+(1-\mu)y\in S_\alpha(\forall x,y\in S_\alpha),$$

从而有 $\mu\in\lambda(S_\alpha),\forall\alpha\in\Gamma$，

或 $\mu\in\Lambda$。这样，由 $\exists\lambda_0\in(0,1),\forall\mu_1,\mu_2\in\Lambda$ 有

$$\lambda_0\mu_1+(1-\lambda_0)\mu_2\in\Lambda$$

即 $\lambda_0\in\lambda(\Lambda)$。由引理 2 知，$\lambda(\Lambda)\neq\varnothing\Rightarrow co(\Lambda)\subset cl(\Lambda)$，而 $0\in\Lambda,1\in\Lambda,\Lambda\subset[0,1]$。有

$$co(\Lambda)=[0,1]\subset cl(\Lambda)\Rightarrow cl(\Lambda)=[0,1],$$

又 $\Lambda=\cap_{\alpha\in\Gamma}\lambda(S_\alpha)\cup\{0,1\}$，故 $\cap_{\alpha\in\Gamma}\lambda(S_\alpha)$ 在 $[0,1]$ 中稠密。

证毕

2 拟凸映射与半连续映射

定义 2 （拟凸泛函）设 E 是一线性空间，$C\subset E$ 是凸集，若 $\forall x,y\in C,\forall\lambda\in[0,1]$，$f$ 为定义在 C 上的泛函，且有

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\max\{f(x),f(y)\}$$

则称 f 为 C 上的拟凸泛函。

定义 3 （关于凸锥 C 的半连续向量函数）设 E_1,E_2 是实值拓扑线性空间，$X\subset E_1$，给定的凸锥 $C\subset E_2$，向量函数 $f:X\longmapsto E_2$，称 f 是关于凸锥 C 的半连续函数，如果

$$lev(y)=\{x\in E_1\mid f(x)\in y-C,x\in X\}$$

是闭集。

定义 4 （关于凸锥 C 的拟凸向量函数）设 E_1,E_2 是实值拓扑线性空间，凸集 $X\subset E_1$，给定的凸锥 $C\subset E_2$，向量函数 $f:X\longmapsto E_2,\forall y\in E_2,\forall x_1,x_2\in X,\forall t\in[0,1]$，只要有 $f(x_1),f(x_2)\in y-C$，就有

$$f(tx_1+(1-t)x_2)\in y-C,$$

则称 f 是关于凸锥 C 的拟凸函数。

定义 5 （关于凸锥 C 的拟凸集值函数）设 E_1，E_2 是实值拓扑线性空间，凸集 $X \subset E_1$，给定的凸锥 $C \subset E_2$。集值函数 $f: X \longmapsto 2^{E_2}$，$\forall y \in E_2$，$\forall x_1, x_2 \in X$，$\forall t \in [0,1]$ 有列蕴涵式成立

$$f(x_1) \subset y - C, f(x_2) \subset y - C \Rightarrow$$
$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \subset y - C$$

则称 f 是关于凸锥 C 的拟凸集值函数。

定义 6 （关于凸锥 C 的下半连续集值函数）设 E_1，E_2 是实值拓扑线性空间，$f: E_1 \longmapsto 2^{E_2}$，称在 $x_0 \in X$ 是 C-下连续的，若 $\forall y \in f(x_0)$ 和 y 的任意邻域 $V \subset E_2$，存在 x_0 的邻域 $U \subset E_1$，使得下列蕴涵式成立

$$\forall x \in U \cap dom(f) \Rightarrow f(x) \cap (V + C) \neq \varnothing$$

称 $f: E_1 \longmapsto 2^{E_2}$ 是 C-半连续映射，若 f 在所有的 $x \in X$ 上是 C-下连续的。

引理 4[3] f 是拟凸泛函 $\Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbf{R}, S_\alpha = \{x \in C \mid f(x) \leqslant \alpha\}$ 为凸集。

引理 5[3] f 是关于凸锥 C 的拟凸函数 $\Leftrightarrow \forall y \in E_2, lev(y) = \{x \in E_1 : | f(x) \in y - C, x \in X\}$ 为凸集。

引理 6[3] 集值映射 $f: E_1 \longmapsto 2^{E_2}$ 是关于凸锥 C 拟凸的 $\Leftrightarrow \forall y \in E_2, S_y = \{x \in E_1 \mid f(x) \subset y - C\}$ 为凸集。

注 本文中关于向量函数和集值函数的拟凸性和 C-连续性的定义来源于文献[3]。

定理 1 若 f 是凸集 C 上的实值函数，且 $\exists \alpha \in (0,1)$，$\forall x, y \in C$ 有

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leqslant \max\{f(x), f(y)\} \quad (1)$$

则集合 $A = \{\lambda \in [0,1] \mid f(\lambda x + (1-\lambda)y)\} \leqslant \max\{f(x), f(y)\}, \forall x, y \in C\}$

在 $[0,1]$ 上是稠密的。

证明 记 $S_\eta = \{x \in C \mid f(x) \leqslant \eta\}$，$\Lambda = \cap_{\eta \in f(C)} \lambda(S_\eta)$，则 $\Lambda \subset A$，且 $\Lambda \neq \varnothing$，据引理 3 得证。

事实上，$\forall \lambda \in \Lambda$，$\forall x, y \in C$，取 $\eta = \max\{f(x), f(y)\}$，因 $\lambda \in S_\eta, x \in S_\eta, y \in S_\eta$，可以得到

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \eta = \max\{f(x), f(y)\},$$

从而 $\lambda \in A$，故有 $\Lambda \in A$。

另一方面，由于 $\forall \eta \in f(C)$，$\forall x, y \in S_\eta$，则有 $f(x) \leqslant \eta, f(y) \leqslant \eta$，由不等式(1)式知，

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leqslant \max\{f(x), f(y)\} \leqslant \eta \Rightarrow$$
$$\alpha x + (1-\alpha)y \in S_\eta,$$

有 $\alpha \in \lambda(S_\eta)\ (\forall \eta \in f(C))$，故 $\alpha \in \Lambda$。

由引理 3，知 Λ 在 $[0,1]$ 稠密，从而 A 在 $[0,1]$ 中稠密。 证毕

定理 2 设 C 是分离拓扑线性空间的凸集，f 是 C 上的上半连续泛函，且 $\exists \alpha \in (0,1)$ 使得

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leqslant \max\{f(x), f(y)\}, \forall x, y \in C \quad (2)$$

则 f 为 C 上的拟凸泛函。

证明 记 $S_\eta = \{x \in C \mid f(x) \leqslant \eta\}$，由不等式(2)式知 $\alpha \in \lambda(S_\eta)$。另一方面，由 f 是 C 上的上半连续泛函，知 S_η 为 C 上的相对拓扑中的闭集，由推论 1 知 S_η 为凸集，由引理 4 知 f 为 C 上的拟凸泛函。

证毕

定理 3 设 X 是分离拓扑线性空间 E_1 上的凸集，凸锥 C 是线性空间 E_2 中的子集。$f: X \longmapsto E_2$ 是关于凸锥 C 上的半连续向量函数，且 $\exists \alpha \in (0,1)$，$\forall y \in E_2$，有

$$\forall x_1, x_2 \in X, f(x_1), f(x_2) \in y - C \Rightarrow$$
$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \in y - C \quad (3)$$

则 f 为关于凸锥 C 的拟凸向量函数。

证明 f 为关于凸锥 C 的半连续函数，则 $\forall y \in E_2$，$lev(y)$ 是 X 的相对拓扑中的闭集。由蕴涵式(3)知 $\alpha \in \lambda(lev(y))$，由推论 1 知 $lev(y)$ 为凸集，最后由引理 5 知 f 为 X 上关于凸锥 C 的拟凸向量函数。

证毕

定理 4 设 X 是分离拓扑线性空间 E_1 上的凸集，凸锥 C 是线性空间 E_2 中的子集，$f: X \longmapsto 2^{E_2}$ 是关于凸锥 C 上的下连续集值映射，且 $\exists \alpha \in (0,1)$，$\forall y \in E_2$，有

$$\forall x_1, x_2 \in X, f(x_1), f(x_2) \subset y - C \Rightarrow$$
$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \subset y - C \quad (4)$$

则 f 为关于凸锥 C 的拟凸集值映射。

证明 f 是关于凸锥 C 上的下半连续集值映射，则 $\forall y \in E_2, S_y = \{x \in E_1 \mid f(x) \subset y - C\}$ 是闭集。由(4)式知，$\alpha \in \lambda(S_y)$，由推论 1 知 S_y 为凸集。最后由引理 6 知，f 为 X 上关于凸锥 C 的拟凸集值映射。 证毕

参考文献：

[1] 史树中. 凸分析[M]. 上海：上海科学技术出版社. 1990.

[2] 杨新民. 上半连续函数的拟凸性[J]. 运筹学学报，1999(3)：48-51.

[3] LUC D T. Theory of Vector Optimizat[M]. Berlin，Heidelberg：Springer-Verlag. 1989. 22，28-32，33.

（责任编辑 黄 颖）