关于不定方程组 $11x^2-9y^2=2$，$40y^2-11z^2=29$*

李 杨

（重庆师范大学 数学与计算机科学学院，重庆 400047）

摘 要：对于不定方程组 $a_2x^2-a_1y^2=a_2-a_1$，$a_3y^2-a_2z^2=a_3-a_2$，本文取 $(a_1,a_2,a_3)=(9,11,40)$，得不定方程组 $11x^2-9y^2=2$，$40y^2-11z^2=29$。再进一步构造出一个集合 M，M 中的数由一个二元线性递归数列确定，在此基础上做一些初等计算，即可求出本文所得的不定方程组的解。

关键词：不定方程组；正整数解；基本解

中图分类号：O156　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1672-6693(2006)02-0020-03

On the System of Diophantine Equations $11x^2-9y^2=2$ and $40y^2-11z^2=29$

LI Yang

(College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: This paper discusses the system of diophantine equations $11x^2-9y^2=2$ and $40y^2-11z^2=29$, and gives a method of the positive integer solution.

Key words: system of diophantine equation; positive integer solution; fundamental solution

不定方程组

$$\begin{cases}a_2x^2-a_1y^2=a_2-a_1\\ a_3y^2-a_2z^2=a_3-a_2\end{cases}\tag{1}$$

的求解是数论中仍在研究的一个问题。已有文献证明了，当 $(a_1,a_2,a_3)=(1,3,8)$ 时，(1) 式的正整数解只有 $x=y=z=1$ 和 $x=11,y=19,z=31$[1]；当 $(a_1,a_2,a_3)=(2,4,12)$ 时，(1) 式的正整数解只有 $x=y=z=1$ 和 $x=29,y=41,z=71$[2]；当 a_1,a_2,a_3 为正整数且其中任两数之积与 1 的和均为平方数时，有异于 $x=y=z=1$ 且满足 $x^2\equiv1\pmod{a_1}$ 的正整数解存在，并给出了这种解的表达式[3]；当 $(a_1,a_2,a_3)=(3,5,16)$ 时，(1) 式的正整数解为 $x=y=z=1$ 和 $x=55,y=71,z=127$[4]。在本文，取 $(a_1,a_2,a_3)=(9,11,40)$，从而得到不定方程组

$$\begin{cases}11x^2-9y^2=2\\ 40y^2-11z^2=29\end{cases}。\tag{2}$$

对于 (2) 式，构造出一个集合 M，M 中的数由一个二元线性递归数列确定，在此基础上做一些初等计算，就可求出 (2) 式的正整数解。

引理 1[5]　设 $u_0+v_0\sqrt{D}$ 是方程 $u^2-Dv^2=-n$ $(D,n\in\mathbf{N})$ 的某个结合类的基本解，$x_0+y_0\sqrt{D}$ 是方程 $x^2-Dy^2=1$ 的基本解，则有

$$0<v_0\leqslant\frac{y_0}{\sqrt{2(x_0-1)}}\sqrt{n},0\leqslant|u_0|\leqslant\sqrt{\frac{1}{2}(x_0-1)n}$$

引理 2[5]　设 $u+v\sqrt{D}$ 和 $u'+v'\sqrt{D}$ 是不定方程 $x^2-Dy^2=C$ 的任意两个解，则 $u+v\sqrt{D}$ 和 $u'+v'\sqrt{D}$ 同属某一结合类的充要条件是

$$uu'-vv'D\equiv0\pmod{|C|},vu'-uv'\equiv0\pmod{|C|}$$

引理 3[5]　设 $D,n\in\mathbf{N}$ 不是完全平方数，则 $u^2-Dv^2=-n$ 的解只有有限个结合类，而所有类的基本解可由引理 1 经有限步求出。更进一步，设 $u_0+v_0\sqrt{D}$ 是某一结合类的基本解，则该类的全部解 $u+v\sqrt{D}$ 可经

$$u+v\sqrt{D}=\pm\left(u_0+v_0\sqrt{D}\right)\left(x_0+y_0\sqrt{D}\right)^n$$

表出，其中 $x_0+y_0\sqrt{D}$ 是 $x^2-Dy^2=1$ 的基本解，

* 收稿日期：2005-09-26

资助项目：重庆市教委科研基金（No. 010204）

作者简介：李杨（1981-），女，辽宁丹东人，硕士研究生，研究方向为数论。

$n \in \mathbf{Z}$。

上述引理中，$x_0 + y_0\sqrt{D}$ 是 $x^2 - Dy^2 = 1$ 的解指的是 $x = x_0, y = y_0$ 是 $x^2 - Dy^2 = 1$ 的解，其余类推。

在这里，把全体平方数的集合记为 N^2。

定理 1 不定方程组（2）式的一切正整数解可表为 $x = \sqrt{9t+1}, y = \sqrt{11t+1}, z = \sqrt{40t+1}$，其中

$$t \in \mathbf{Z}, 9t+1, 11t+1, 40t+1 \in N^2。\tag{3}$$

证明 满足（3）式的 x, y, z 显然是（2）式的正整数解，所以只需证明（2）式的一切正整数解都可表为（3）式的形式。

设 $x = x_n, y = y_n, z = z_n$ 为（2）式的任一正整数解。则有

$$11x_n^2 - 9y_n^2 = 2,$$

$$x_n = \sqrt{\frac{9y_n^2+2}{11}} = \sqrt{\frac{9(y_n^2-1)}{11}+1}。$$

所以 $11 | 9(y_n^2 - 1)$，又 $(9, 11) = 1$，则 $11 | (y_n^2 - 1)$。

令 $y_n^2 - 1 = 11t, y_n = \sqrt{11t+1}, t \in \mathbf{Z}$，由此可得 $x_n = \sqrt{9t+1}, t \in \mathbf{Z}$，又 $40y_n^2 - 11z_n^2 = 29$，所以 $z_n = \sqrt{40t+1}$。 证毕

定理 2 设 $M = \left\{ t = \frac{x_n^2 - 1}{9} \mid x_{n+1} = 10x_n + 9y_n, y_{n+1} = 11x_n + 10y_n, x_0 = y_0 = 1, n = 0, 1, 2, \cdots \right\}$，$M_1 = \{t \mid t \in \mathbf{Z}, 9t+1, 11t+1 \in N^2\}$，则 $M = M_1$。

证明 共分 5 步。

1）证明不定方程

$$u^2 - 99v^2 = -18 \tag{4}$$

的一切正整数解可表为 $u = u_n, v = v_n$，且

$$\begin{cases} u_{n+1} = 10u_n + 99v_n \\ v_{n+1} = u_n + 10v_n \end{cases} \tag{5}$$

其中 $u_0 = 9, v_0 = 1, n = 0, 1, 2, \cdots$。

易知 Pell 方程 $x^2 - 99y^2 = 1$ 的基本解为 $x_0 + y_0\sqrt{99} = 10 + \sqrt{99}$。设 $u_0 + v_0\sqrt{99}$ 为（4）式的某个结合类的基本解，则由引理 1 有

$$0 < v_0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{2(10-1)}}\sqrt{18} = 1,$$

故将 $v_0 = 1$ 代入（4）式得 $u_0 = \pm 9$。

因为

$$9 \times (-9) - 1 \times 1 \times 99 = -180 \equiv 0 \pmod{18}$$

$$1 \times (-9) - 9 \times 1 = -18 \equiv 0 \pmod{18}$$

由引理 2 知，$9 + \sqrt{99}$ 和 $-9 + \sqrt{99}$ 同属一结合类。所以（4）式的解只有一类。这样由引理 3 知其全部解为

$$\pm(9 + \sqrt{99})(10 + \sqrt{99})^n, n \in \mathbf{Z}。$$

因为不定方程 $u^2 - 99v^2 = -18$ 的基本解是 $9 + \sqrt{99}$。Pell 方程 $x^2 - 99y^2 = 1$ 的基本解是 $10 + \sqrt{99}$。所以有

$$(u + v\sqrt{99}) = \pm(u_n + v_n\sqrt{99}) = \pm(9 + \sqrt{99})(x_n + y_n\sqrt{99}) = \pm(9 + \sqrt{99})(10 + \sqrt{99})^n, n \in \mathbf{Z}$$

其中

$$(u_n + v_n\sqrt{99}) = (9 + \sqrt{99})(x_n + y_n\sqrt{99}) = (9 + \sqrt{99})(10 + \sqrt{99})^n, n \in \mathbf{Z}。$$

得到 $u_n = 9x_n + 99y_n, v_n = x_n + 9y_n$，由 $x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{99} = (x_n + y_n\sqrt{99})(10 + \sqrt{99})$ 得到

$$x_{n+1} = 10x_n + 99y_n, y_{n+1} = x_n + 10y_n,$$

不难得出

$$x_{n+2} = 20x_{n+1} - x_n, x_0 = 1, x_1 = 10;$$

$$y_{n+2} = 20y_{n+1} - y_n, y_0 = 0, y_1 = 1;$$

$$u_{n+2} = 20u_{n+1} - u_n, u_0 = 9, u_1 = 189。$$

显然，当 $n < 0$ 时，$u_n < 0$ 不满足题意；当 $n \geqslant 0$ 时，$(9 + \sqrt{99})(10 + \sqrt{99})^n$ 均为正整数解，$-(9 + \sqrt{99})(10 + \sqrt{99})^n$ 均不是正整数解。

综上所述，（4）式的所有正整数解为 $(9 + \sqrt{99}) \cdot (10 + \sqrt{99})^n, n = 0, 1, 2, \cdots$。

记

$$(u_n + v_n\sqrt{99}) = (9 + \sqrt{99})(10 + \sqrt{99})^n, n \in \mathbf{Z}$$

则 $u_{n+1} + v_{n+1}\sqrt{99} = (u_n + v_n\sqrt{99})(10 + \sqrt{99})$，

得
$$\begin{cases} u_{n+1} = 10u_n + 99v_n \\ v_{n+1} = u_n + 10v_n \end{cases}$$

其中 $u_0 = 9, v_0 = 1, n = 0, 1, 2, \cdots$。

2）证明

$$u_n \equiv 0 \pmod 9, v_n \equiv 1 \pmod 9, n = 0, 1, 2, \cdots \tag{6}$$

成立。

当 $n = 0, u_0 = 9, v_0 = 1$ 时，（6）式显然成立。设 $n = k$ 时（6）式成立，则 $n = k+1$ 时，由归纳假设有

$$u_{k+1} = 10u_k + 99v_k = 99v_k \equiv 0 \pmod 9$$

$$v_{k+1} = u_k + 10v_k \equiv 10v_k \equiv 1 \pmod 9。$$

所以

$$u_n \equiv 0 \pmod 9, v_n \equiv 1 \pmod 9, n = 0, 1, 2, \cdots。$$

3）证明不定方程

$$(9y)^2 - 99x^2 = -18 \tag{7}$$

的一切正整数解可表为 $x=x_n, y=y_n$，且

$$\begin{cases} x_{n+1}=10x_n+9y_n \\ y_{n+1}=11x_n+10y_n \end{cases} \quad (8)$$

其中 $x_0=y_0=1, n=0,1,2,\cdots$。

设 $x=x_n=v_n, y=y_n=\frac{u_n}{9}$，因为 $u_n^2-99v_n^2=-18$，故 $(9y)^2-99x^2=-18$，由第 1）步，即得到上面的结论。

4）证明 $M \subseteq M_1$。

任意给定 $t \in M, t=\frac{x_n^2-1}{9}$，由(6)式和 $x_n=v_n$，可知 $9 \mid (x_n^2-1)$，所以 $t \in \mathbf{Z}$，$9t+1=x_n^2 \in N^2$，又 x_n, y_n 是(7)式的解，故 $(9y_n)^2-99x_n^2=-18$，即

$$9y_n^2-11x_n^2=-2, 11x_n^2-2=9y_n^2,$$

于是

$$11t+1=11 \times \frac{x_n^2-1}{9}+1=$$

$$\frac{11x_n^2-11+9}{9}=\frac{1}{9}(11x_n^2-2)=y_n^2 \in N^2$$

所以 $t \in M_1$，由此可知 $M \subseteq M_1$。

5）最后证 $M_1 \subseteq M$。

$\forall t \in M_1$，不妨设 $9t+1=a^2, 11t+1=b^2, a,b \in \mathbf{N}$，则 $t=\frac{a^2-1}{9}$，由此有

$$11 \times \frac{a^2-1}{9}+1=b^2,$$

$$11 \times (a^2-1)+9=9b^2, 9b^2-11a^2=-2$$

即 $(9b)^2-99a^2=-18$，所以 $x=a, y=b$ 为(7)式的正整数解。于是存在 n，使得 $x_n=a, y_n=b$，从而有 $t=\frac{x_n^2-1}{9}$。因此 $t \in M$，由此可知 $M_1 \subseteq M$。

由第 4）、5）步知 $M=M_1$。 证毕

定理 3 $x=\sqrt{9t+1}, y=\sqrt{11t+1}, z=\sqrt{40t+1}$ 为(2)式的正整数解的充要条件是 $t \in M$，且 $40t+1 \in N^2$。

证明 设 $x=\sqrt{9t+1}, y=\sqrt{11t+1}, z=\sqrt{40t+1}$，为(2)式的正整数解，则 $9t+1, 11t+1 \in N^2$，$40t+1 \in N^2$。由定理 2，使得 $9t+1, 11t+1 \in N^2$ 的整数 t 均在 M 中，所以 $t \in M$。

反之，设 $t \in M$，且 $40t+1 \in N^2$，则由定理 2 知 $9t+1, 11t+1 \in N^2$。

则由定理 1 知 $x=\sqrt{9t+1}, y=\sqrt{11t+1}, z=\sqrt{40t+1}$ 为(2)式的正整数解。 证毕

由定理 1 和定理 3 可知，若(2)式有一个正整数解，则必有一个相应的 $t \in M$，使得 $40t+1 \in N^2$；而如果有一个 $t \in M$，使得 $40t+1 \in N^2$，那么就能得到(2)式的一个正整数解。于是，求不定方程组(2)式的正整数解就等价于在 M 中寻找 t，使得 $40t+1 \in N^2$，寻找这样的 t 只需进行初等计算。

当 $x=1$ 时，$t=0, 40t+1=1 \in N^2$。此时不定方程组(2)式的解为 $x=y=z=1$；

当 $x=379$ 时，$t=15\ 960, 40t+1=799^2 \in N^2$。此时不定方程组(2)式的解为

$$x=\sqrt{9t+1}=379,$$

$$y=\sqrt{11t+1}=419,$$

$$z=\sqrt{40t+1}=799$$

注 因为

$$M=\left\{t=\frac{x_n^2-1}{9} \mid x_{n+1}=10x_n+9y_n, y_{n+1}=11x_n+10y_n, x_0=y_0=1, n=0,1,2,\cdots\right\}$$

所以要想在 M 中找到合适的 t，首先要确定 x_n，$n=0,1,2,\cdots$ 的值。而 x_n 的值由 $\left\{x_{n+1}=10x_n+9y_n, y_{n+1}=11x_n+10y_n, x_n=y_n=1, n=0,1,2,\cdots,\right\}$ 确定。所以，在考虑 x_n 的值时首先要看其是否满足上面两个等式。

参考文献：

[1] BAKER A, DAVENPORT H. The Equations $3x^2-2=y^2$ and $8x^2-7=z^2$ [J]. Quart J Math Oxford, 1969, 20(2): 129-137.

[2] VELUPPILAI M. The Equations $z^2-3y^2=-2$ and $z^2-6x^2=-5$ [A]. A Collection of Manuscrips Related to the Fibonacci Sequence Fibonacci Assoc [C]. Calif: Santa Clara, 1980. 71-75.

[3] 郑德勋. 关于不定方程组 $a_2x^2-a_1y^2=a_2-a_1, a_3y^2-a_2z^2=a_3-a_2$ [J]. 四川大学学报(自然科学版), 1992, 29(3): 348-351.

[4] 陈志云. 关于不定方程组 $5x^2-3y^2=2, 16y^2-5z^2=11$ [J]. 华中师范大学学报(自然科学版), 1996, 30(4): 381-384.

[5] 柯召，孙琦. 谈谈不定方程[M]. 上海：上海教育出版社，1980. 28-32.

（责任编辑 黄 颖）