2 +1 维非线性 SchrÖdinger 方程的显式解*

郑　斌
（西南科技大学 理学院，四川 绵阳 621000）

摘　要：通过选择适当的变换，求出了 2 +1 维 SchrÖdinger 方程的一些新的显式解。

关键词：SchrÖdinger 方程；变换；显式解
中图分类号：O241.7　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1672-6693(2006)02-0023-03

Explicit Solutions of 2 +1 Dimensional Nonlinear SchrÖdinger Equations

ZHENG Bin
(College of Mathematics and Physics, Southwest University of Science and Technology, Mianyang Sichuan 621000, China)

Abstract: By selecting appropriate transformations, we find some new explicit solutions to 2 + 1 dimensional nonlinear SchrÖdinger equations, such as elliptic function solutions, trigonometric function solutions and so on.

Key words: SchrÖdinger equations; transformation; explicit solutions

在非线性发展方程的研究中，求其显式解是一项十分重要的任务。特别是由于方程的非线性使得求解问题变得难度大、技巧性更强。因此探讨且得到具有广泛物理背景的非线性发展方程的显式解具有十分重要的应用价值。众所周知，求非线性发展方程解的关键是构造适当的变换，使求解问题简化并达到求解的目的。在本文中，将讨论下述 2 +1 维 SchrÖdinger 方程

$$i\Psi_t = \Psi_{xy} + \gamma^2 v\Psi \tag{1}$$

$$v_x = 2(|\Psi^2|)_y \tag{2}$$

其中 $\gamma^2 = \pm 1$，$\Psi(x,y,t)$ 是复波函数，$v(x,y,t)$ 是实波函数。由于方程(1)、(2)式在非线性光学领域中起着极其重要的作用[1]，因此关于它的求解问题受到许多学者的关注，讨论其解的结构也有助于深化认识它在光学领域中的作用。对于方程(1)、(2)式，应用反散射方法，Zakharov 得到了孤立子解[2]，有文献给出了 N 孤立子解，同时方程(1)、(2)式可通过 Painleve 检验[3]，因此是可积方程。

在本文中，将通过构造适当的函数变换，把求解(1)、(2)式的问题转化为求解椭圆方程的问题，给出了 2 +1 维 SchrÖdinger 方程一些新的显式解，这为人们认识由此方程描述的客观现象提供了一些依据。

1　方程的显式解

为了得到方程(1)、(2)式的一些新解，作变换

$$\Psi = \exp(i\eta)u(x,y,t) \tag{3}$$

其中 α,β,λ 是待定常数，并且有 $\eta = \alpha x + \beta y + \lambda t + \eta_0$，$\eta_0$ 是任意常数，将(3)式代入(1)、(2)式得

$$u_t - \beta u_x - \alpha u_y = 0 \tag{4}$$

$$u_{xy} + (\lambda - \alpha\beta)u + \gamma^2 uv = 0 \tag{5}$$

$$v_x - 2(u^2)_y = 0 \tag{6}$$

为了求出行波解，再作变换

$$u = u(\zeta),\ v = v(\zeta) \tag{7}$$

$$\zeta = kx + ly + (l\alpha + k\beta)t + \zeta_0 \tag{8}$$

其中 k,l,ζ_0 是待定常数，将(7)、(8)式代入(4)～(6)式得到常微分方程组

$$klu'' + (\lambda - \alpha\beta)u + \gamma^2 uv = 0 \tag{9}$$

$$kv' - 2l(u^2)' = 0 \tag{10}$$

则求解方程(1)、(2)式转化为求解常微分方程组(9)、(10)式的问题，由(10)式得解为

* 收稿日期：2005-12-01　　修回日期：2006-03-10
作者简介：郑斌(1963-)，女，四川隆昌人，副教授，研究方向为可积系统。

$$v=\frac{2l}{k}u^2+d,\tag{11}$$

其中 d 为任意常数,将(11)式代入(9)式,整理得

$$u'^2=\frac{\mu}{2}u^4+mu^2+c_0\tag{12}$$

其中 c_0 为任意常数,$\mu=-\frac{2\gamma^2}{k^2}$,$m=\frac{\alpha\beta-d\gamma^2-\lambda}{kl}$。由于(12)式是椭圆型方程[4],它有许多精确解。通过(3)、(11)式,可得到 SchrÖdinger 方程的许多新的行波显式解,如孤子解、三角函数解、椭圆函数解、幂函数解。现讨论如下。

1.1 三角函数解

1) $m=2$,$\mu=2$,$c_0=1$

由(12)式知道,$\gamma^2=-1$,$k=1$,$u=\tan\zeta$,再根据(3)、(11)式可推出方程(1)、(2)式的显式解

$$v=2l\tan^2\zeta+d,\Psi=\exp(i\eta_3)\tan\zeta,$$

其中 $\eta_3=\alpha x+\beta y+(\alpha\beta-2l+d)t+\eta_0$,$\alpha,\beta,\eta_0,l,d$ 为任意常数(下同)。

2) $m=-1$,$\mu=2$,$c_0=0$

此时 $\gamma^2=-1$,$k=1$,$u=\sec\zeta$,进一步得到方程(1)、(2)式的显式解

$$v=2l\sec^2\zeta+d,\Psi=\exp(i\eta_4)\sec\zeta,$$

其中 $\eta_4=\alpha x+\beta y+(\alpha\beta+l+d)t+\eta_0$。

1.2 椭圆函数解及孤立子解

1) $m=2-K^2$,$\mu=-2$,$c_0=K^2-1$

对于这种情况有 $\gamma^2=1$,$k=1$,且 $u=dn\zeta$,$v=2ldn^2\zeta+d$,$\Psi=\exp(i\eta_5)dn\zeta$。其中 $\eta_5=\alpha x+\beta y+[\alpha\beta-(2-K^2)l-d]t+\eta_0$,$dn$ 表示模为 K 的椭圆函数($0<K<1$)。当 $K\to 1$ 时,由于 $dn\to\mathrm{sech}$,因此得到方程(1)、(2)式的孤立子解

$$v=2l\mathrm{sech}^2\zeta+d=2l(1-\tanh^2\zeta)+d,$$

$$\Psi=\exp(i\eta_{50})\mathrm{sech}\zeta,$$

$$\eta_{50}=\alpha x+\beta y+(\alpha\beta-l-d)t+\eta_0。$$

2) $m=2-K^2$,$\mu=2(1-K^2)$,$c_0=1$

此时 $\gamma^2=-1$,$k=\pm\frac{1}{\sqrt{1-K^2}}$,$u=sc\zeta$,$sc\zeta$ 表示模为 K 的椭圆函数($0<K<1$)。方程(1)、(2)式的解为

$$v=\pm 2l\sqrt{1-K^2}sc\zeta+d,$$

$$\Psi=\exp(i\eta_6)sc\zeta,$$

其中

$$\eta_6=\alpha x+\beta y+\left[\alpha\beta\pm\frac{(2-K^2)l}{\sqrt{1-K^2}}+d\right]t+\eta_0。$$

3) $m=\frac{1+K^2}{2}$,$\mu=-\frac{1-K^2}{2}$,$c_0=-\frac{1-K^2}{4}$

即 $\gamma^2=1$,$k=\pm\frac{2}{\sqrt{1-K^2}}$,从方程(12)式的解 $u=\frac{dn\zeta}{1+Ksn\zeta}$导出方程(1)、(2)式的显式解

$$v=\frac{2l}{k}\frac{dn^2\zeta}{(1+Ksn\zeta)^2}+d,\Psi=\exp(i\eta_7)\frac{dn\zeta}{1+Ksn\zeta}$$

其中 $sn\zeta$ 表示模为 K 的椭圆函数($0<K<1$),$\eta_7=\alpha x+\beta y+\left[\alpha\beta-\frac{(1+K^2)kl}{2}-d\right]t+\eta_0$。

4) $m=\frac{1-K+K^2}{4}$,$\mu=2K$,$c_0=-\frac{1-K^2}{4}$

同理知道

$$\gamma^2=-1,u=\frac{\sqrt{1-K}dn\zeta}{\sqrt{2K(1+Ksn\zeta)(1+sn\zeta)}},$$

对应方程(1)、(2)式的解为

$$v=\frac{2l}{k}\left(\frac{\sqrt{1-K}dn\zeta}{\sqrt{2K(1+Ksn\zeta)(1+sn\zeta)}}\right)^2+d,$$

$$\Psi=\exp(i\eta_{10})\frac{\sqrt{1-K}dn\zeta}{\sqrt{2K(1+Ksn\zeta)(1+sn\zeta)}}$$

其中 $\eta_{10}=\alpha x+\beta y+\lambda t+\eta_0$,$\lambda=\alpha\beta-\frac{kl(1-K+K^2)}{4}+d$,$k=\pm\frac{1}{\sqrt{K}}$。

5) $m=1\mp 6K'+K'^2$,$\mu=\mp 2(1\mp K')^2$,$c_0=K'$

此时 $\gamma^2=\pm 1$,$k=\pm\sqrt{1\mp K'^2}$,并且方程(12)式的解是 $u=\frac{2\sqrt{K'}sn\zeta cn\zeta}{cn^2\zeta\pm K'sn^2\zeta}$,于是有

$$v=\frac{2l}{k}\left(\frac{2\sqrt{K'}sn\zeta cn\zeta}{cn^2\zeta\pm Ksn^2\zeta}\right)^2+d$$

$$\Psi=\exp(i\eta_{11})\frac{2\sqrt{K}sn\zeta cn\zeta}{cn^2\zeta\pm K'sn^2\zeta}$$

其中 $cn\zeta$ 表示模为 K 的椭圆函数($0<K<1$),$\eta_{11}=\alpha x+\beta y+\lambda t+\eta_0$,$\lambda=\alpha\beta-kl(1\mp 6K'+K'^2)\pm d$,$K'=\sqrt{1-K^2}$。

6) $m=-2(1+K')^2$,$\mu=2(1-K')^2$,$c_0=(1+K')^2$

此时 $\gamma^2=-1$,$k=\pm\frac{1}{\sqrt{1\mp K'^2}}$,并且方程(12)式的解是 $u=\frac{cn^2\zeta-K'sn^2\zeta}{cn^2\zeta+K'sn^2\zeta}$,于是有

$$v=\frac{2l}{k}\left(\frac{cn^2\zeta-K'sn^2\zeta}{cn^2\zeta+K'sn^2\zeta}\right)^2+d$$

$$\Psi = \exp(i\eta_{12})\frac{cn^2\zeta - K'sn^2\zeta}{cn^2\zeta + K'sn^2\zeta}$$

其中 $\eta_{12} = \alpha x + \beta y + \lambda t + \eta_0$，$\lambda = \alpha\beta + 2kl(1 + K'^2) + d$。

7) $-2(1 - K')^2$，$\mu = 2(1 + K')^2$，$c_0 = (1 - K')^2$

此时 $\gamma^2 = -1$，$k = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + K'^2}}$，并且方程(12)式的解是 $u = \frac{K' - dn^2\zeta}{K' + dn^2\zeta}$，于是有

$$v = \frac{2l}{k}\left(\frac{K' - dn^2\zeta}{K' + dn^2\zeta}\right)^2 + d$$

$$\Psi = \exp(i\eta_{13})\frac{K' - dn^2\zeta}{K' + dn^2\zeta}$$

其中

$\eta_{13} = \alpha x + \beta y + \lambda t + \eta_0$，$\lambda = \alpha\beta + 2kl(1 + K'^2) + d$。

1.3 幂函数解

$m = 0$，$\mu = 2$，$c_0 = 0$。

对应的 $\gamma^2 = -1$，$k = 1$，方程(1)、(2)式的解为

$$v = \frac{2l}{\zeta} + d, \Psi = \frac{\exp(i\eta_{14})}{\zeta}$$

其中 $\eta_{14} = \alpha x + \beta y + (\alpha\beta + d)t + \eta_0$。

2 结论和讨论

通过选择函数变换，把求解问题(1)、(2)式转化为求解椭圆方程问题，得到了 2+1 维 SchrÖdinger 方程的一些新的显式解，通过这些新解也许有助于人们更深入地认识某些光学现象等。当然，由于方程(12)式还有一些其他形式的显式解[5]，所以还可以得到方程(1)、(2)式的另外一些解。

致谢：衷心感谢聊城大学刘希强教授对论文撰写过程中的指导和帮助！

参考文献：

[1] FADDEEV L P, TAKHTAJAN L A. Formulation of Nonliner NS Modeul, Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons[M]. Berlin: Springer, 1987.

[2] ZAKHAROV V E. The Inverse Scattering Methods in Soliton[M]. Berlin: Springer, 1980.

[3] RADHA R, LAKSHMANAN M. Singularity Structure Analysis and Bilinear Form of a 2+1 Dimensional Nonlinear NLS Equation[J]. Inverse Problem, 1994(10): 29-32.

[4] LOU S Y, NI G J. The Relations Among a Special Type of Solutions in Some D+1 Dimensional Nonlinear Equations[J]. J Math Phys, 1989, 30(7): 1614-1620.

（责任编辑　黄　颖）