菲涅耳衍射积分与缓变振幅近似对高斯光束的等效性*

罗亚梅[1,2]，熊玲玲[1]，梁一平[1]

（1. 重庆师范大学 物理学与信息技术学院，重庆 400047；2. 泸州医学院 现代教育技术部，四川 泸州 646000）

摘　要：使用菲涅耳衍射积分公式，推导出在自由空间传播的高斯光束表达式，与用亥姆霍兹方程在缓变振幅近似下求得的结果作比较，得出在计算高斯光束时两种近似方法是等效的，计算时可以根据需要进行适当的选择。

关键词：高斯光束；菲涅耳衍射积分；缓变振幅近似

中图分类号：O435　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1672-6693(2006)02-0046-04

Equivalency of Fresnel Diffraction Integral and Slowly Varying Amplitude Approximation for Gaussian Beam

LUO Ya-mei[1,2], *XIONG Ling-ling*[1], *LIANG Yi-ping*[1]

(1. College of Physics and Information Technique, Chongqing Normal University, Chongqing 400047;
2. Dept. of the Modern Education Computer Center of Technology, Luzhou Medical College, Luzhou Sichuan 646000, China)

Abstract: The expressions of Gaussian beam are obtained respectively by using Fresnel diffraction integral and Helmholtz equation under the circumstances of slowly varying amplitude approximation. It shows that the results are coincident with each other.

Key words: Gaussian beam; Fresnel diffraction integral; slowly varying amplitude approximation

电磁波传播有两种严格的理论研究方法：一种是解由麦克斯韦方程组得到的亥姆赫兹方程，另一种是根据惠更斯-菲涅耳原理得到的菲涅耳-基尔霍夫衍射积分。对同一电磁场它们的解是等价的。但是由于解法上的困难，这两种方法在大多数情况下都无法严格求解，只能根据实际情况作近似处理。例如，通常高斯光束就是在标量理论框架内，亥姆赫兹方程在缓变振幅近似下求得的特解。但是高斯光束是否能通过对菲涅耳-基尔霍夫衍射积分进行某种近似而得到呢？如果能，那么两种近似就在一定条件下具有等效性。本文采用菲涅耳-基尔霍夫衍射积分在远场近似下的菲涅耳衍射积分公式求解高斯光源在自由空间传播形成的光束，得到与在缓变振幅近似下相同的高斯光束表达式。

1　缓变振幅近似和远场近似的基本思想

1.1　缓变振幅近似

以 E 表示真空中电磁波的电场强度，在标量场假设下，应满足真空中的亥姆霍兹方程

$$\nabla^2 E + k^2 E = 0 \tag{1}$$

设电磁波的复振幅为 A，沿 z 方向传播的电场为

$$E = A\exp(-\mathrm{i}kz) \tag{2}$$

如果实际电磁波在传播中振幅变化很缓慢，则满足

* 收稿日期：2005-11-15

资助项目：重庆市科技攻关项目（No. 8180）

作者简介：罗亚梅（1978-），女，自贡人，助教，硕士研究生，研究方向为光学工程。

$$\frac{\partial A}{\partial z} \ll kA, \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \ll k\frac{\partial A}{\partial z} \tag{3}$$

将(2)式代入(1)式后,只考虑一阶近似而忽略掉二阶变化,得

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - 2\mathrm{i}k\frac{\partial A}{\partial z} = 0$$

这就是研究光波传输时,在缓变振幅近似下的基本微分方程。在经典电磁场理论中,对在各种边界条件下亥姆霍兹方程在缓变振幅近似下的特解做了详尽的研究[1~7]。

1.2 衍射积分的远场近似

设已知空间 $z=0$ 的 S_0 面上的光场为 $E_0(x_0, y_0, 0)$,考察点的光场为 $E(x, y, z)$,则其菲涅耳-基尔霍夫衍射积分公式为[8]

$$E(x,y,z) = \left(\frac{\mathrm{i}}{2\lambda}\right)\iint_{S_0} E_0(x_0,y_0,0)\frac{\exp(-\mathrm{i}k\rho)(1+\cos\theta)}{\rho}\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0 \tag{4}$$

其中 ρ 为源点与场点间距离,θ 为 S_0 面上源点处的法线与 ρ 的夹角(见图1)。

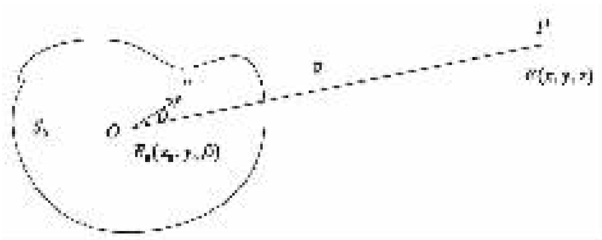

图1 光源分布示意图

当衍射面与观察面距离 z 远大于衍射孔径和观察区的线度时

$$\rho \approx z, \cos\theta \approx 1, z \gg |x - x_0|, |y - y_0| \tag{5}$$

(4)式化为远场近似下的菲涅耳衍射积分公式

$$E(x,y,z) = \frac{\mathrm{i}}{\lambda z}\exp(-\mathrm{i}kz)\iint_{S_0} E_0(x_0,y_0,0)\exp\left\{-\frac{\mathrm{i}k}{2z}\left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right]\right\}\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0 \tag{6}$$

2 两种近似的等效性

表面上看,(3)式所表述的缓变振幅近似条件和(5)式的远场近似条件考虑的情况截然不同,并无直接的联系。但对于 $z=0$ 平面上高斯型分布的光源,用菲涅耳积分考察其形成的光束时,却表现出这两者意想不到的一致性。

2.1 基模高斯光束的形成

若 $z=0$ 平面上,光源场分布为

$$E_0(x_0,y_0,0) = A_0\exp\left(-\frac{x_0^2+y_0^2}{w_0^2}\right) \tag{7}$$

为求得在 $z>0$ 空间的场分布,将(7)式代入(6)式得到

$$E(x,y,z) = \frac{\mathrm{i}A_0}{\lambda z}\exp(-\mathrm{i}kz)\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{x_0^2+y_0^2}{w_0^2}\right)\exp\left\{-\frac{\mathrm{i}k}{2z}\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right]\right\}\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0 =$$

$$\frac{\mathrm{i}A_0}{\lambda z}\exp\left[-\mathrm{i}kz - \frac{\mathrm{i}k}{2z}(x^2+y^2)\right]\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\left[\left(\frac{1}{w_0^2}+\frac{\mathrm{i}k}{2z}\right)x_0^2 - \frac{\mathrm{i}kx}{z}x_0\right] - \left[\left(\frac{1}{w_0^2}+\frac{\mathrm{i}k}{2z}\right)y_0^2 - \frac{\mathrm{i}ky}{z}y_0\right]\right\}\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0 \tag{8}$$

(8)式积分并整理得

$$E(x,y,z) = A_0\left(\frac{\mathrm{i}\pi}{\lambda z}\right)\left(\frac{1}{w_0^2}+\frac{\mathrm{i}k}{2z}\right)^{-1}\exp(-\mathrm{i}kz)\exp\left[-\frac{\mathrm{i}k}{2z}(x^2+y^2)\right]\exp\left[-\frac{k^2}{4z^2}\left(\frac{1}{w_0^2}+\frac{\mathrm{i}k}{2z}\right)^{-1}(x^2+y^2)\right] \tag{9}$$

如果令瑞利尺寸

$$Z_0=\frac{1}{2}kw_0^2=\frac{\pi w_0^2}{\lambda} \tag{10}$$

束宽

$$w=w_0\sqrt{1+\left(\frac{z}{Z_0}\right)^2} \tag{11}$$

等相面曲率半径

$$R=Z_0\left(\frac{z}{Z_0}+\frac{Z_0}{z}\right) \tag{12}$$

相位因子

$$\Psi=\tan^{-1}\frac{z}{Z_0} \tag{13}$$

将(10)~(13)式代入(9)式得到

$$E(x,y,z)=\frac{A_0w_0}{w}\exp\left[-\frac{x^2+y^2}{w^2}\right]\exp\left\{-\mathrm{i}\left[k\left(\frac{x^2+y^2}{2R}+z\right)-\Psi\right]\right\} \tag{14}$$

(14)式的结果与亥姆霍兹方程在缓变振幅近似下边界条件为

$$A(x,y,z)\Big|_{z=0}=A_0\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{w_0^2}\right)$$

得到的基模高斯光束的特解是完全一致的。

2.2 高阶高斯光束的形成

如果在 $z=0$ 平面上光源场为厄米-高斯分布

$$E_{mn}(x_0,y_0,0)=A_{mn}H_m\left(\sqrt{2}\frac{x_0}{w_0}\right)H_n\left(\sqrt{2}\frac{y_0}{w_0}\right)\exp\left[-\frac{\mathrm{i}k}{2q_0}(x_0^2+y_0^2)\right] \tag{15}$$

式中 $q_0=\frac{\mathrm{i}\pi w_0^2}{\lambda}=\frac{\mathrm{i}kw_0^2}{2}$,$A_{mn}$为归一化常数,$H_m\left(\sqrt{2}\frac{x_0}{w_0}\right)$和 $H_n\left(\sqrt{2}\frac{y_0}{w_0}\right)$分别为 m 和 n 阶厄米多项式,将(15)式代入(7)式得

$$E_{mn}(x,y,z)=\frac{\mathrm{i}A_{mn}}{\lambda z}\exp(-\mathrm{i}kz)\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}H_m\left(\sqrt{2}\frac{x_0}{w_0}\right)H_n\left(\sqrt{2}\frac{y_0}{w_0}\right)\exp\left\{-\frac{\mathrm{i}k}{2q_0}(x_0^2+y_0^2)-\frac{\mathrm{i}k}{2z}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]\right\}\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0=$$

$$\frac{\mathrm{i}A_{mn}}{\lambda z}\exp\left[-\mathrm{i}kz-\frac{\mathrm{i}k}{2z}(x^2+y^2)\right]\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}H_m\left(\sqrt{2}\frac{x_0}{w_0}\right)H_n\left(\sqrt{2}\frac{y_0}{w_0}\right)\exp\left\{\left[-\left(\frac{\mathrm{i}k}{2q_0}+\frac{\mathrm{i}k}{2z}\right)x_0^2+\frac{\mathrm{i}kx}{z}x_0\right]+\left[-\left(\frac{\mathrm{i}k}{2q_0}+\frac{\mathrm{i}k}{2z}\right)y_0^2+\frac{\mathrm{i}ky}{z}y_0\right]\right\}\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0$$

利用厄米多项式的性质[9],对上式积分并整理得

$$E_{mn}(x,y,z)=A_{mn}\left(1+\frac{z}{q_0}\right)^{-1}\left(\frac{1-\frac{z}{q_0}}{1+\frac{z}{q_0}}\right)^{\frac{m+n}{2}}H_m\left(\sqrt{2}\frac{x}{w}\right)H_n\left(\sqrt{2}\frac{y}{w}\right)\exp(-\mathrm{i}kz)\exp\left[-\frac{\mathrm{i}k}{2q}(x^2+y^2)\right] \tag{16}$$

式中 q 为 z 处基模高斯光束的复参数且

$$\frac{1}{q}=\frac{1}{R}-\frac{\mathrm{i}\lambda}{\pi w_0^2}$$

用(9)~(12)式结合(16)式得到

$$E_{mn}(x,y,z)=A_{mn}\frac{w_0}{w}H_m\left(\sqrt{2}\frac{x}{w}\right)H_n\left(\sqrt{2}\frac{y}{w}\right)\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{w^2}\right)\exp\left\{-\mathrm{i}\left[k\left(z+\frac{x^2+y^2}{2R}\right)-(m+n+1)\tan^{-1}\frac{z}{Z_0}\right]\right\}$$

这正是亥姆霍兹方程在缓变振幅近似下,以

$$E_{mn}(x,y,z)\Big|_{z=0}=A_{mn}H_m\left(\frac{\sqrt{2}}{w_0}x\right)H_n\left(\frac{\sqrt{2}}{w_0}y\right)\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{w_0^2}\right)$$

为边界条件得到的特解,即厄米-高斯光束。

若 $z=0$ 平面上光源场分布用极坐标表示为拉盖尔-高斯分布

$$E_{pl}(r_0,\phi_0,0)=A_{pl}\left(\sqrt{2}\frac{r_0}{w_0}\right)^lL_p^l\left(2\frac{r_0{}^2}{w_0{}^2}\right)\exp\left(-\frac{\mathrm{i}k}{2q_0}r_0^2\right)\exp(-\mathrm{i}l\phi_0) \tag{17}$$

其中，A_{pl} 为归一化常数，$L_p^l\left(2\frac{r_0^{\ 2}}{w_0^{\ 2}}\right)$ 为缔合拉盖尔多项式，将(17)式代入(7)式在柱坐标系下积分

$$E_{pl}(r,\phi,z)=\frac{\mathrm{i}A_{pl}}{\lambda z}\exp(-\mathrm{i}kz)\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{2\pi}\left(\sqrt{2}\frac{r_0}{w_0}\right)^l L_p^l\left(2\frac{r_0^{\ 2}}{w_0^{\ 2}}\right)\exp\left\{-\frac{\mathrm{i}k}{2q_0}r_0^2-\mathrm{i}l\phi_0-\frac{\mathrm{i}k}{2z}\left[r_0^2-2rr_0\cos(\phi-\phi_0)+r^2\right]\right\}r_0\mathrm{d}r_0\mathrm{d}\phi_0$$

利用缔合拉盖尔多项式的性质，积分并整理得

$$E_{pl}(r,\phi,z)=A_{pl}\left(1+\frac{z}{q_0}\right)^{-l-p-1}\left(1-\frac{z}{q_0}\right)^p\left[1-\left(\frac{z}{q_0}\right)^2\right]^{\frac{l}{2}}\left(\sqrt{2}\frac{r}{w}\right)^l L_p^l\left(2\frac{r^2}{w^2}\right)\exp(-\mathrm{i}kz)\exp\left(-\frac{\mathrm{i}k}{2q}r^2\right)\exp(-\mathrm{i}l\phi)\qquad(18)$$

用(9)～(12)式结合(18)式得

$$E_{pl}(r,\phi,z)=A_{pl}\frac{w_0}{w}\left(\sqrt{2}\frac{r}{w}\right)^l L_p^l\left(2\frac{r^2}{w^2}\right)\exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right)\exp\left\{-\mathrm{i}\left[k\left(z+\frac{r^2}{2R}\right)-(2p+l+1)\tan^{-1}\frac{z}{Z_0}\right]\right\}\exp(-\mathrm{i}l\phi)$$

这正是亥姆霍兹方程在缓变振幅近似下，以

$$E_{pl}(r,\phi,z)\Big|_{z=0}=A_{pl}\left(\sqrt{2}\frac{r}{w_0}\right)^l L_p^l\left(2\frac{r^2}{w_0^2}\right)\exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2}\right)\begin{cases}\cos l\phi\\ \sin l\phi\end{cases}$$

为边界条件得到的特解，即拉盖尔-高斯光束。

3 结论

上述计算说明，$z=0$ 平面上的光源场分布，无论是基模高斯分布还是高阶高斯分布，菲涅耳衍射积分的结果都与以相应边界条件的缓变振幅近似下亥姆霍兹方程对应的特解完全一致。因而至少对于基模或高阶高斯光束，两种不同近似具有等效性。也就是说，高斯光束有两种可互相替代的解法，在一些用亥姆赫兹方程求解比较复杂的情况下，就可以用菲涅耳积分进行求解，反之亦然。

参考文献：

[1] 王雨三，张中华. 激光物理学基础[M]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2004.

[2] 石顺祥，陈国夫，赵卫，等. 非线性光学[M]. 西安：西安电子科技大学出版社，2003.

[3] 吕百达. 激光光学[M]. 北京：高等教育出版社，2003.

[4] 钱梅珍. 激光物理[M]. 北京：电子工业出版社，1990.

[5] 戴特力，季小玲. 新光学教程[M]. 重庆：重庆大学出版社，1996.

[6] 苏显渝，李继陶. 信息光学[M]. 北京：科学出版社，1999.

[7] GHATAK A K. THYAGARAJAN K. Contemporary Optics[M]. New York：Plenum Press，1978.

[8] 季小玲，戴特力. 激光二极管像散高斯光束通过自聚焦微透镜的变换[J]. 重庆师范学院学报(自然科学版)，1997，14(3)：29-35.

[9] 刘式适，刘式达. 特殊函数[M]. 北京：气象出版社，1988.

(责任编辑　欧红叶)