

半严格预拟不变凸函数的一个充分条件*

赵克全, 陈 哲

(重庆师范大学 数学与计算机科学学院, 重庆 400047)

摘 要: 在文献 [1] 中, 作者在一定条件下证明了可微的伪凸函数是拟凸函数, 也是半严格拟凸函数。Yang 在文献 [2] 中利用 Mohan 和 Neogy 在文献 [3] 中建立的条件 C 和条件 D 证明了可微的伪不变凸函数必关于相同的向量值函数 η 为预拟不变凸函数。本文利用条件 C 和条件 D 证明了可微的伪不变凸函数关于相同的 η 为半严格预拟不变凸函数。

关键词: 不变凸集; 伪不变凸函数; 预拟不变凸函数; 半严格预拟不变凸函数

中图分类号: O221.2

文献标识码: A

文章编号: 1672-6693(2006)03-0013-03

A Sufficient Condition About Semi-strictly Prequasi-Invex Functions

ZHAO Ke-quan, CHEN Zhe

(College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: The author has proved that the differentiable pseudoconvex functions must be semi-strictly quasiconvex functions under certain condition in [1]. Yang has proved that the differentiable pseudoconvex functions must be prequasiinvex functions with respect to the same vector-valued function η by making use of condition C and condition D which Mohan and Neogy introduced in paper [3] and Yang introduced in paper [2]. In this paper, the author has proved that the differentiable pseudoconvex functions must be semi-strictly prequasi-invex functions with the same vector-valued function η .

Key words: invex sets; pseudoinvex functions; prequasiinvex functions; semi-strictly prequasiinvex functions

1988 年 Avriel 等人在文献 [4] 中较为系统全面地介绍了广义凹性函数的一些性质特点及其在数学规划等方面的应用。在此之后, 一些学者先后对广义凸性做了大量深入的研究工作^[5-7], 1988 年, Weir 和 Mond 在文献 [8] 中也引入了不变凸集和预不变凸函数的定义, 凸集和凸性函数的概念做了重要的推广。在此基础上, 建立了预不变凸函数条件下的择一定理, 并利用它讨论了多目标优化问题。此后, 一些学者又先后对不变凸性的性质特点及其应用做了大量深入的研究工作, 得出了一些重要的结果^[9-13], 1991 年, Pini 在文献 [9] 中建立了预不变凸和预伪不变凸函数的概念, 并讨论了它们之间的一些关系。2001 年, Yang 等人在文献 [14] 中给出了半严格预拟不变凸函数的定义, 讨论预拟不变凸函数, 严格预拟不变凸函数和半严格预拟不变凸函数的一些性质特征及它们之间的关系。

1 预备知识

定义 1^[8] $X \subseteq \mathbf{R}^n$ 是不变凸集。若存在 $\eta(x, y) : X \times X \rightarrow \mathbf{R}^n$ 满足

$$y + \lambda\eta(x, y) \in X, \lambda \in [0, 1].$$

定义 2^[8] $X \subseteq \mathbf{R}^n$ 关于 $\eta(x, y)$ 为不变凸函数, 称 $f(x) : X \rightarrow \mathbf{R}$ 关于 $\eta(x, y)$ 为预不变凸函数。若对 $\forall x, y \in X, \lambda \in [0, 1]$, 有

$$f(y + \lambda\eta(x, y)) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

定义 3^[8] $X \subseteq \mathbf{R}^n$ 关于 $\eta(x, y)$ 为不变凸集, $f(x) : X \rightarrow \mathbf{R}$ 可微, 称函数 f 关于 η 是伪不变凸的, 若对 $\forall x, y \in X$, 有

$$\eta(x, y)^T \nabla f(y) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(y).$$

定义 4^[9] X 关于 η 为不变凸集, 称 f 关于相同的 η 为预拟不变凸函数, 若对 $\forall x, y \in X, \lambda \in [0,$

* 收稿日期: 2005-11-02

资助项目: 重庆市自然科学基金

作者简介: 赵克全 (1979-) 男, 四川南充人, 助教, 研究方向为广义凸性及在最优化理论中的应用。

1] ,有

$$f(y + \lambda\eta(x, y)) \leq \max\{f(x), f(y)\}.$$

定义5^[14] X 关于 η 为不变凸集.称 f 关于相同的 η 为半严格预拟不变凸函数,若对 $\forall x, y \in X$, $f(x) \neq f(y)$, $\forall \lambda \in (0, 1)$,有

$$f(y + \lambda\eta(x, y)) < \max\{f(x), f(y)\}.$$

条件C^[3] $\eta: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 满足条件C是指对 $\forall x, y \in \mathbf{R}^n$, $\lambda \in [0, 1]$,有

$$C_1: \eta(y, y + \lambda\eta(x, y)) = -\lambda\eta(x, y),$$

$$C_2: \eta(x, y + \lambda\eta(x, y)) = (1 - \lambda)\eta(x, y).$$

2 主要结论及其证明

在文献1]中,作者证明了若 X 为开凸集, f 是可微的伪凸函数,则 f 是拟凸函数,也是半严格拟凸函数,在文献2]中杨新民证明了 X 关于 η 为不变凸集, f 是可微的且关于相同的 η 为伪不变凸函数, η 满足条件C且对 $\forall x, y \in X$ 有

$$f(y) \leq f(x) \Rightarrow f(y + \eta(x, y)) \leq f(x),$$

则 f 关于相同的 η 为预拟不变凸函数。

事实上,在向量值函数 η 满足条件C之下,下面的结论也是成立的。

定理 若 X 关于 η 为开不变凸集, η 满足条件C, f 关于相同的 η 为可微伪不变凸函数,则 f 关于相同的 η 为半严格预拟不变凸函数。

证明 反证法。假设结论不成立,则存在 $x_1, x_2 \in K$ 使得 $f(x_1) \neq f(x_2)$,且

$$f(x^*) \geq \max\{f(x_1), f(x_2)\},$$

其中 $x^* = x_2 + \lambda\eta(x_1, x_2)$,对某些 $\lambda \in (0, 1)$ 。不失一般性,下面假设 $f(x_1) < f(x_2)$,由 f 关于 η 的伪不变凸性可得 $\nabla f(x^*)^T \eta(x_1, x^*) < 0$ 。而由 η 满足条件C,又有

$$\begin{aligned} \eta(x_1, x^*) &= \eta(x_1, x_2 + \lambda\eta(x_1, x_2)) = \\ &= (1 - \lambda)\eta(x_1, x_2) \end{aligned}$$

$$\eta(x_2, x^*) = \eta(x_2, x_2 + \lambda\eta(x_1, x_2)) = -\lambda\eta(x_1, x_2)$$

$$\text{故 } \eta(x_1, x^*) = -\frac{1 - \lambda}{\lambda} \eta(x_2, x^*)$$

$$\text{再由 } \nabla f(x^*)^T \eta(x_2, x^*) > 0$$

故必存在一点 $\bar{x} = x^* + \mu\eta(x_2, x^*)$, $\mu \in (0, 1)$ 满足

$$f(\bar{x}) > f(x^*) = f(x_2)$$

若不然,则 $\forall \mu \in (0, 1)$, $\bar{x} = x^* + \mu\eta(x_2, x^*)$ 有 $f(\bar{x}) \leq f(x^*)$,即 $f(x^* + \mu\eta(x_2, x^*)) \leq f(x^*)$,

即 $\frac{f(x^* + \mu\eta(x_2, x^*)) - f(x^*)}{\mu} \leq 0$,也即是

$$\nabla f(x^*)^T \eta(x_2, x^*) \leq 0.$$

这与 $\nabla f(x^*)^T \eta(x_2, x^*) > 0$ 矛盾。

再由 f 关于 η 的伪不变凸性可得 $\nabla f(\bar{x})^T \eta(x^*, \bar{x}) < 0$ 和 $\nabla f(\bar{x})^T \eta(x_2, \bar{x}) < 0$ 同时成立。而

$$\eta(x_2, \bar{x}) = \eta(x_2, x^* + \mu\eta(x_2, x^*)) = (1 - \mu)\eta(x_2, x^*)$$

$$\eta(x^*, \bar{x}) = \eta(x^*, x^* + \mu\eta(x_2, x^*)) = \mu\eta(x_2, x^*)$$

与 $\nabla f(\bar{x})^T \eta(x^*, \bar{x}) < 0$ 和 $\nabla f(\bar{x})^T \eta(x_2, \bar{x}) < 0$ 同时成立矛盾。故函数 f 关于相同的 η 为半严格预拟不变凸函数。

证毕

3 结束语

本文讨论了两类广义不变凸性(可微的伪不变凸函数与半严格预拟不变凸函数)之间的关系,利用Mohan和Neogy在文献3]给出的条件C和条件D在集合 X 为开集的条件下证明了可微的伪不变凸函数一定关于相同的向量值函数 η 为半严格预拟不变凸函数是对文献1]中相应结论的推广,也是对文献9]中结论的丰富与完善,为进一步讨论广义凸性在最优化理论及变分不等式中的应用奠定了基础。

致谢 本文受到重庆师范大学杨新民教授的悉心指导与帮助,在此予以感谢!

参考文献:

- [1] BAZARAA M S, SHETTY C M. Nonlinear Programming-Theory and Algorithms[M]. New York: John Wiley & Sons, 1979.
- [2] YANG X M, YANG X Q, TEO K L. Generalized Inconvexity and Generalized Invariant Monotonicity[J]. JOTA, 2003, 117(3): 607-625.
- [3] MOHAN S R, NEOGY S K. On Inconvex Sets and Preinvex Functions[J]. JMAA, 1995, 189: 901-908.
- [4] AVRIEL M, DIEWERT W E, SCHAIBIE S et al. Generalized Convexity[M]. New York: Plenum Press, 1998.
- [5] YANG X M. Semistrictly Convex Function[J]. Opsearch, 1994, 31(1): 15-27.
- [6] DANILIDIS A, HADJISAVVAS N. Characterization of Non-smooth Semi-strictly Quasiconvex and Strictly Convexity[J]. JOTA, 1999, 102(3): 525-536.
- [7] YANG X M. A Note on Criteria of Quasiconvex Functions[J]. JMAA, 2001, 5(2): 55-57.
- [8] WEIL T, MOND B. Preinvex Functions in Multiple-Objective Optimization[J]. JMAA, 1988, 136: 29-38.
- [9] PINI R. Inconvexity and Generalized Convexity[J]. Optimiza-

- tion, 1991, 22: 513-525.
- [10] MUKHERJEE R N. Generalized Pseudoconvex Functions and Multiobjective Programming[J]. JMAA, 1997, 208: 49-57.
- [11] YANG X M, LI D. On Properties of Preinvex Functions [J]. JMAA, 2001, 256: 229-241.
- [12] YANG X M, LI D. Some Properties of Semistrictly Preinvex Functions[J]. JMAA, 2001, 258: 287-308.
- [13] 赵克全. r -预不变凸函数的一个充分条件[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2006, 23(1): 10-13.
- [14] YANG X M, YANG X Q, TEO K L. Characterizations and Applications of Prequasi-invex Functions[J]. JOTA, 2001, 110(3): 645-668.

(责任编辑 黄颖)