Banach 空间中 Lipschitz 严格伪压缩映象的带误差的 Ishikawa 迭代序列的收敛性*

龙宪军，彭建文
(重庆师范大学 数学与计算机科学学院，重庆 400047)

摘 要 设 K 是任意实 Banach 空间 X 的闭凸子集，且 T: $K \to K$ 是 Lipschitz 严格伪压缩映象，在没有假设 $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\beta_n < \infty$ 之下，本文证明了带误差的 Ishikawa 迭代序列强收敛到 T 的唯一不动点。另外，还给出了 Ishikawa 迭代序列的收敛率估计。所得结果统一，改进和发展了最新的一些结果。

关键词：任意实 Banach 空间；Lipschitz 严格伪压缩映象；带误差的 Ishikawa 迭代序列；收敛率估计；不动点
中图分类号：O177.91 **文献标识码**：A **文章编号**：1672-6693(2006)03-0016-04

On the Convergence of Ishikawa Iteration Process with Errors for Lipschitzian Strongly Pseudocontractive Mappings in Banach Spaces

LONG Xian-jun, *PENG Jian-wen*
(College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: Let K be a closed convex subset of an arbitrary real Banach space X, and T: $K \to K$ be a Lipschitz strongly pseudocontractive mapping such that $Tx^* = x^*$ for some $x^* \in X$. Under the lack of assumption that $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\beta_n < \infty$, it is shown that the Ishikawa iterative sequence with errors converges strongly to the unique fixed point of T. Moreover, this result provides a general convergence rate estimation for such a sequence. These results unify, improve and generalize the recent corresponding results.

Key words: real Banach space; Lipschitz strongly pseudocontractive mapping; Ishikawa iterative process with errors; convergence rate estimate; fixed point

1 预备知识

设 X 是一实 Banach 空间，其范数和对偶空间分别记成 $\|\cdot\|$ 和 X^*，记 X 与 X^* 之间的对偶对为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$，且记的正规对偶映象为 $J(\cdot)$，即

$$J(x) = \{x^* \in X^* \mid \langle x, x^*\rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}, \forall x \in X$$

X 中映象 T 称为严格伪压缩的，若存在 $t \in (1,\infty)$，$\forall x, y \in D(T)$ 及 $r > 0$，使得

$$\|x - y\| \leqslant \|(1+r)(x-y) - rt(Tx - Ty)\|。$$

在上述定义中，若 $t = 1$，则 T 称为伪压缩的。有时严格伪压缩映象也称为强伪压缩映象。对严格伪压缩映象类，许多作者已做了深入的研究[1~8]。

X 中的算子 T 称为增生的，若 $\forall x, y \in D(T)$，存在 $j(x-y) \in J(x-y)$，使得

$$\langle Tx - Ty, j(x-y)\rangle \geqslant 0。$$

T 称为强增生的，若 $\forall x, y \in D(T)$，存在 $j(x-y) \in J(x-y)$，使得

$$\langle Tx - Ty, j(x-y)\rangle \geqslant k\|x-y\|^2,$$

对某个 $k > 0$，其中，k 称为 T 的强增生常数。不失一般性，假设 $k \in (0,1)$。T 是(严格)伪压缩映象当且仅当，$(I - T)$ 是(强)增生算子[1,9]。增生算子由 Browder[9] 与 Kato[10] 各自独立引入。在增生算子理论中，一个归功于 Browder 的早期的基本结果是，若

* 收稿日期：2005-10-26
资助项目：重庆市科委科研课题基金(No. 8409)
作者简介：龙宪军(1980-)，男，重庆永川人，硕士研究生，研究方向为数学规划与算法。

T是X上的局部Lipschitz增生算子,则初值问题$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+Tu=0, u(0)=u_0$有解。

假设正整数集为N。最近,Liu[5] 把Tan与Xu[2] 的结果从p一致光滑Banach空间推广到任意Banach空间。2000年,Sastry和Babu[6] 的结果去掉了Liu[5] 的定理1与定理2中K的有界性假设,并提供了收敛率估计。曾[7,8] 又把文献[5,6]中的迭代程序由Mann迭代程序推广到了Ishikawa迭代程序,并提供了比文献[6]更好的收敛率估计。

定理1[8] 设K是任意实Banach空间X的闭凸子集,且$T: K\to K$是Lipschitz严格伪压缩映象,使得$Tx^*=x^*$,对某个$x^*\in X$。又设$\{\alpha_n\}$与$\{\beta_n\}$是$[0,1]$中的实序列,满足下列条件

1) $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$ 且$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\beta_n<\infty$;

2) $0<\alpha_n\leqslant\frac{k-\eta}{(L+1)(L+2-k)+(L-1)k}$, $\forall n\in\mathbf{N}$,对某个$\eta\in(0,k)$;

3) $0\leqslant\beta_n<\min\left(\frac{k}{L(L+2-k)},\frac{\eta}{L(L+1)}\right)$, $\forall n\in\mathbf{N}$。

其中,$k\in(0,1)$和$L(\geqslant 1)$分别是$I-T$的强增生常数与T的Lipschitz常数,则对任意$x_0\in X$,由下式生成的Ishikawa迭代序列$\{x_n\}$:

$$x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_nTy_n,$$
$$y_n=(1-\beta_n)x_n+\beta_nTx_n, \forall n\in\mathbf{N}$$

强收敛到T的唯一不动点x^*,而且存在$(0,1)$中的序列$\{\gamma_n\}$满足$\gamma_n\geqslant\frac{\eta-L(L+1)\beta_n}{1+k}\alpha_n$。使得对一切$n\in\mathbf{N}$,有

$$\|x_{n+1}-x^*\|\leqslant\prod_{j=0}^{n}(1-\gamma_j)\|x_0-x^*\|。$$

本文目的是给出一个新的结果,它去掉了上述定理1中的假设$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\beta_n<\infty$,而且把Ishikawa迭代序列推广到了带误差的Ishikawa迭代序列,并提供了更为一般的收敛率估计,因此本文结果在很大程度上统一,改进和发展了Tan与Xu[2],Liu[5],Sastry和Babu[6] 和曾[7,8] 的结果。

引理1[11] 设$\{\rho_n\}$,$\{\sigma_n\}$ $\{\theta_n\}$与$\{t_n\}$是非负实数列,满足下列条件:

1) $t_n\in[0,1]$,且$\sum_{n=0}^{\infty}t_n=\infty$;

2) $\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n<\infty$,且$\sum_{n=0}^{\infty}\theta_n<\infty$。

若$\rho_{n+1}\leqslant(1-t_n)\rho_n+\sigma_n\rho_n+\theta_n, \forall n\geqslant 0$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\rho_n=0$。

2 主要结果

定理2 设K是任意实Banach空间X的闭凸子集,且$T: K\to K$是Lipschitz严格伪压缩映象,使得$Tx^*=x^*$,对某个$x^*\in X$。设$\{u_n\}$与$\{v_n\}$是X中的序列,且$\{\alpha_n\}$与$\{\beta_n\}$是$[0,1]$中的实序列,满足下列条件

1) $\sum_{n=0}^{\infty}\|u_n\|<\infty$,且$\|v_n\|\to 0(n\to\infty)$;

2) $0\leqslant\beta_n\leqslant\frac{\max(\varepsilon,\eta-\varepsilon)}{L(L+1)(L+2-k)}$,对某个$\eta\in(0,k)$,$\varepsilon\in(0,\eta)$。

3) $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$,且

$$0<\alpha_n\leqslant\frac{(L+1)(k-\eta)}{(L+1)^2(2+L-k)+(L-1)\max(\varepsilon,\eta-\varepsilon)}, \forall n\in\mathbf{N}$$

其中,$k\in(0,1)$和$L(\geqslant 1)$分别是$I-T$的强增生常数与T的Lipschitz常数,则对任意$x_0\in X$,由下式生成的带误差的Ishikawa迭代序列$\{x_n\}$

$$x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_nTy_n+u_n \tag{1}$$
$$y_n=(1-\beta_n)x_n+\beta_nTx_n+v_n, \forall n\in\mathbf{N} \tag{2}$$

强收敛到T的唯一不动点x^*。特别地,若取

$$u_n=v_n=0, \forall n\in\mathbf{N},$$

则存在$(0,1)$中的序列$\{\gamma_n\}$满足$\gamma_n\geqslant\frac{1}{1+k}\min(\varepsilon,\eta-\varepsilon)\alpha_n$。使得对$\forall n\in\mathbf{N}$,有

$$\|x_{n+1}-x^*\|\leqslant\prod_{j=0}^{n}(1-\gamma_j)\|x_0-x^*\|。$$

证明 因$T: K\to K$是Lipschitz严格伪压缩映象,故$(I-T)$是强增生的,即对一切$x,y\in K$,有

$$\langle(I-T)x-(I-T)y, j(x-y)\rangle\geqslant k\|x-y\|^2。$$

其中$k=\frac{t-1}{t}$,且$t\in(1,\infty)$是出现在定义中的常数。据Kato[10] 引理1.1,有

$$\|x-y\|\leqslant\|x-y+r[(I-T-kI)x-(I-T-kI)y]\| \tag{3}$$

对任意$x,y\in D(T)$及$r>0$。利用(2)式得到

$$\|y_n-x^*\|=\|(1-\beta_n)(x_n-x^*)+\beta_n(Tx_n-x^*)+v_n\|\leqslant(1-\beta_n+L\beta_n)\|x_n-x^*\|+\|v_n\|$$

$$\|x_n-Ty_n\|=\|x_n-x^*\|+L\|y_n-x^*\|\leqslant[1+L+(L^2-L)\beta_n]\|x_n-x^*\|+L\|v_n\| \tag{4}$$

$$\|Tx_{n+1}-Ty_n\|\leqslant L\|x_{n+1}-y_n\|=L\|(1-\alpha_n)x_n+\alpha_nTy_n+u_n-y_n\|=$$

$$
\begin{aligned}
&L\|x_n-y_n+\alpha_n(Ty_n-x_n)+u_n\|\leqslant\\
&L\|\beta_n(Tx_n-x_n)+u_n\|+L\alpha_n\|Ty_n-x_n\|+L\|u_n\|\leqslant\\
&L(L+1)\beta_n\|x_n-x^*\|+L\|v_n\|+L\|u_n\|+\\
&L\alpha_n[(1+L+(L^2-L)\beta_n)\|x_n-x^*\|+L\|v_n\|]\leqslant\\
&[L(L+1)\beta_n+L\alpha_n(1+L+(L^2-L)\beta_n)]\|x_n-x^*\|+\\
&L\|v_n\|+L^2\alpha_n\|v_n\|+L\|u_n\|。
\end{aligned}
\tag{5}
$$

由(1)式推得

$$
\begin{aligned}
x_n&=x_{n+1}+\alpha_nx_n-\alpha_nTy_n-u_n=(1+\alpha_n)x_{n+1}+\\
&\alpha_n(I-T-kI)x_{n+1}-(1-k)\alpha_nx_n+\\
&(2-k)\alpha_n^2(x_n-Ty_n)+\alpha_n(Tx_{n+1}-Ty_n)-\\
&[(2-k)\alpha_n+1]u_n
\end{aligned}
$$

观察到，

$$x^*=(1+\alpha_n)x^*+\alpha_n(I-T-kI)x^*-(1-k)\alpha_nx^*,$$

故可见

$$
\begin{aligned}
x_n-x^*&=(1+\alpha_n)(x_{n+1}-x^*)+\\
&\alpha_n[(I-T-kI)x_{n+1}-(I-T-kI)x^*]-\\
&(1-k)\alpha_n(x_n-x^*)+(2-k)\alpha_n^2(x_n-Ty_n)+\\
&\alpha_n(Tx_{n+1}-Ty_n)-[(2-k)\alpha_n+1]u_n
\end{aligned}
$$

由(3)、(4)与(5)式，可得

$$
\begin{aligned}
&\|x_n-x^*\|\geqslant(1+\alpha_n)\Big\|(x_{n+1}-x^*)+\\
&\frac{\alpha_n}{1+\alpha_n}[(I-T-kI)x_{n+1}-(I-T-kI)x^*]\Big\|-\\
&(1-k)\alpha_n\|x_n-x^*\|-(2-k)\alpha_n^2\|x_n-Ty_n\|-\\
&\alpha_n\|Tx_{n+1}-Ty_n\|-[(2-k)\alpha_n+1]\|u_n\|\geqslant\\
&(1+\alpha_n)\|x_{n+1}-x^*\|-(1-k)\alpha_n\|x_n-x^*\|-\\
&(2-k)\alpha_n^2\|x_n-Ty_n\|-\alpha_n\|Tx_{n+1}-Ty_n\|-\\
&[(2-k)\alpha_n+1]\|u_n\|\geqslant(1+\alpha_n)\|x_{n+1}-x^*\|-\\
&(1-k)\alpha_n\|x_n-x^*\|-(2-k)\alpha_n^2[1+L+(L^2-\\
&L)\beta_n]\|x_n-x^*\|-(2-k)\alpha_n^2L\|v_n\|-\\
&\alpha_n[L(L+1)\beta_n+L\alpha_n(1+L+(L^2-\\
&L)\beta_n]\|x_n-x^*\|-\alpha_nL\|v_n\|-L^2\alpha_n^2\|v_n\|-\\
&\alpha_nL\|u_n\|-[(2-k)\alpha_n+1]\|u_n\|。
\end{aligned}
$$

从而有

$$
\begin{aligned}
&\|x_{n+1}-x^*\|\leqslant\frac{1+(1-k)\alpha_n}{1+\alpha_n}\|x_n-x^*\|+\\
&\frac{(2-k)\alpha_n^2}{1+\alpha_n}[1+L+(L^2-L)\beta_n\|x_n-x^*\|]+\\
&(2-k)\alpha_n^2L\|v_n\|+\frac{\alpha_n}{1+\alpha_n}[L(L+1)\beta_n+\\
&L\alpha_n(1+L+(L^2-L)\beta_n)]\|x_n-x^*\|+\\
&\alpha_nL\|v_n\|+L^2\alpha_n^2\|v_n\|+\alpha_nL\|u_n\|+\\
&[(2-k)\alpha_n+1]\|u_n\|\leqslant\\
&(1-\gamma_n)\|x_n-x^*\|+\\
&(2-k)\alpha_n^2L\|v_n\|+\alpha_nL\|v_n\|+\\
&L^2\alpha_n^2\|v_n\|+\alpha_nL\|u_n\|+[(2-k)\alpha_n+1]\|u_n\|
\end{aligned}
\tag{6}
$$

其中

$$
\gamma_n=\frac{1}{1+\alpha_n}[k\alpha_n-L(L+1)\alpha_n\beta_n-(1+L)(2+L-k)\alpha_n^2-L(L-1)(2+L-k)\alpha_n^2\beta_n],
$$

于是，由条件 1) 和 2)，对一切 $n\in\mathbf{N}$，有

$$
\begin{aligned}
&\gamma_n=\frac{1}{1+\alpha_n}[k\alpha_n-L(L+1)\alpha_n\beta_n-(1+L)(2+\\
&L-k)\alpha_n^2-L(L-1)(2+L-k)\alpha_n^2\beta_n]\geqslant\\
&\frac{1}{1+\alpha_n}[k\alpha_n-L(L+1)(2+L-k)\alpha_n\beta_n-(1+L)\cdot\\
&(2+L-k)\alpha_n^2-L(L-1)(2+L-k)\alpha_n^2\beta_n]\geqslant\\
&\frac{1}{1+\alpha_n}[k\alpha_n-L(L+1)(2+L-k)\cdot\\
&\frac{\max(\varepsilon,\eta-\varepsilon)}{L(L+1)(L+2-k)}\alpha_n-(1+L)(2+L-k)\alpha_n^2-\\
&L(L-1)(2+L-k)\frac{\max(\varepsilon,\eta-\varepsilon)}{L(L+1)(L+2-k)}\alpha_n^2]\geqslant\\
&\frac{1}{1+\alpha_n}[k\alpha_n-\max(\varepsilon,\eta-\varepsilon)\alpha_n-(1+L)\cdot\\
&(2+L-k)\alpha_n^2-\frac{(L-1)\max(\varepsilon,\eta-\varepsilon)}{L+1}\alpha_n^2]\geqslant\\
&\frac{1}{1+\alpha_n}[k\alpha_n-\max(\varepsilon,\eta-\varepsilon)\alpha_n-\\
&\frac{(L+1)^2(2+L-k)+(L-1)\max(\varepsilon,\eta-\varepsilon)}{L+1}\cdot\\
&\frac{(L+1)(k-\eta)}{(L+1)^2(2+L-k)+(L-1)\max(\varepsilon,\eta-\varepsilon)}\alpha_n]\geqslant\\
&\frac{1}{1+\alpha_n}[k\alpha_n-\max(\varepsilon,\eta-\varepsilon)\alpha_n-(k-\eta)\alpha_n]\geqslant\\
&\frac{1}{1+\alpha_n}[\eta\alpha_n-\max(\varepsilon,\eta-\varepsilon)\alpha_n]\geqslant\\
&\frac{1}{1+k}[\min(\varepsilon,\eta-\varepsilon)\alpha_n]
\end{aligned}
\tag{7}
$$

因此，由(6)、(7)式可得

$$
\begin{aligned}
&\|x_{n+1}-x^*\|\leqslant(1-\gamma_n)\|x_n-x^*\|+\\
&(2-k)\alpha_n^2L\|v_n\|+\alpha_nL\|v_n\|+L^2\alpha_n^2\|v_n\|+\\
&\alpha_nL\|u_n\|+[(2-k)\alpha_n+1]\|u_n\|\leqslant\\
&\left[1-\frac{1}{1+k}\min(\varepsilon,\eta-\varepsilon)\alpha_n\right]\|x_n-x^*\|+\\
&(2-k)\alpha_n^2L\|v_n\|+\alpha_nL\|v_n\|+L^2\alpha_n^2\|v_n\|+\\
&\alpha_nL\|u_n\|+[(2-k)\alpha_n+1]\|u_n\|
\end{aligned}
\tag{8}
$$

令 $\rho_n = \| x_n - x^* \|$, $t_n = \frac{1}{1+k}\min(\varepsilon, \eta - \varepsilon)\alpha_n$, $\sigma_n = 0$，且 $\theta_n = (2-k)\alpha_n{}^2 L\| v_n \| + \alpha_n L \| v_n \| + L^2\alpha_n{}^2 \| v_n \| + \alpha_n L \| u_n \| + [(2-k)\alpha_n + 1] \| u_n \|$，则(8)式化为

$$\rho_{n+1} \leqslant (1-t_n)\rho_n + \sigma_n\rho_n + \theta_n, \forall n \geqslant 0。$$

由条件1)、2)知 $t_n \in (0,1)$, $\sum_{n=0}^{\infty} t_n = \infty$，且 $\sum_{n=0}^{\infty}\theta_n < \infty$，故由引理1有 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$，即序列 $\{x_n\}$ 强收敛到 x^*。另外，x^* 的唯一性可由文献[1]可得。

收敛率估计，取 $u_n = v_n = 0$, $\forall n \in \mathbf{N}$，则据(8)式有 $\| x_{n+1} - x^* \| \leqslant (1-\gamma_n) \| x_n - x^* \| \leqslant \cdots \leqslant \prod_{j=0}^{n}(1-\gamma_j) \| x_0 - x^* \|$，其中 $\{\gamma_n\}$ 是(0,1)中的序列，满足 $\gamma_n \geqslant \frac{1}{1+k}\min(\varepsilon, \eta-\varepsilon)\alpha_n$, $\forall n \in \mathbf{N}$。

证毕

定理3 设 K 是任意实Banach空间 X 的闭凸子集，且 $T: K \to K$ 是Lipschitz严格伪压缩映象，使得 $Tx^* = x^*$，对某个 $x^* \in X$。设 $\{u_n\}$ 是 X 中的序列，且 $\{\alpha_n\}$ 是[0,1]中的实序列，满足下列条件

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \| u_n \| = \infty$；

2) $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n = \infty$，且 $0 < \alpha_n \leqslant \frac{(L+1)(k-\eta)}{(L+1)^2(2+L-k) + (L-1)\max(\varepsilon, \eta-\varepsilon)}$, $\forall n \in \mathbf{N}$，对某个 $\eta \in (0,k)$, $\varepsilon \in (0,\eta)$。

其中 $k \in (0,1)$ 和 $L(\geqslant 1)$ 分别是 $I-T$ 的强增生常数与 T 的Lipschitz常数，则对任意 $x_0 \in X$，由下式生成的带误差的Mann迭代序列 $\{x_n\}$

$$x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n Tx_n + u_n$$

强收敛到 T 的唯一不动点 x^*。特别地，若取 $u_n = 0$, $\forall n \in \mathbf{N}$，则存在(0,1)中的序列 $\{\gamma_n\}$ 满足 $\gamma_n \geqslant \frac{1}{1+k}\min(\varepsilon, \eta-\varepsilon)\alpha_n$。使得对 $\forall n \in \mathbf{N}$，有

$$\| x_{n+1} - x^* \| \leqslant \prod_{j=0}^{n}(1-\gamma_j) \| x_0 - x^* \|。$$

参考文献：

[1] CHIDUME C E. Ierative Approximation of Fixed Points of Lipschitz Strictly Psedocontractive Mappings[J]. Proc Mmer Math Soc, 1987, 99(2):283-288.

[2] TAN K K, XU H K. Iterative Soulutions to Nonlinear Equations of Strongly Accretive Operators in Banach Spaces [J]. J Math Anal Appl, 1993, 178:9-21.

[3] DENG L, DING X P. Iterative Approxmation of Lipschitz Strictly Pseudocontractive Mapping in Unformly Smooth Banach Spaces[J]. Nonlinear Anal, 1995, 24(7):981-987.

[4] CHANG S S. Iterative Approximations of Fixed Points and Solutions for Strongly Accretive and Strongly Pseduo-contractive Mappings in Banach Spaces[J]. J Math Anal Appl, 1998, 224:149-165.

[5] LIU L W. Approxmation of Fixed Points of a Strictly Pseudocontractive Mappings[J]. Proc Mmer Math Soc, 1997, 125:1363-1366.

[6] SASTRY K P R, BABU G V R. Approxmation of Fixed Points of a Strictly Pseudocontrative Mappings on Arbitrary Closed, Convex Sets in a Banach Spaces[J]. Proc Mmer Math Soc, 2000, 128:2907-2909.

[7] 曾六川. 关于Banach空间中Lipsschitz严格伪压缩映象的带误差的Ishikawa型迭代序列[J]. 数学年刊, 2001, 22A(5):639-644.

[8] ZENG L C. Iterative Procedure for Approximating Fixed Points of Strictly Pseudocontractive Mappings[J]. Appl Math J Chinese Univ Ser B, 2003, 18(3):283-286.

[9] BROWDER F E. Nonlinear Mapping of Nonexpansive and Accretive Type in Banach Spaces[J]. Bull Amer Math Soc, 1967, 73:875-882.

[10] KATO T. Nonlinear Semigroups and Evolution Equations [J]. J Math Soc Japan, 1967, 18/19:212-225.

[11] 李育强, 刘理蔚. 关于Lipschitz强增生算子的迭代程序[J]. 数学学报, 1998, 41:845-850.

(责任编辑 黄 颖)