

半严格不变拟单调性^{*}

文 乾 英

(重庆师范大学 数学与计算机科学学院 , 重庆 400047)

摘 要 对文献 [1] 中的半严格拟单调映射进行推广 , 定义了半严格不变拟单调映射 , 并建立了半严格预拟不变凸函数与半严格不变拟单调映射之间的关系。

关键词 半严格不变拟单调映射 ; 半严格预拟不变凸函数

中图分类号 : O221. 1

文献标识码 : A

文章编号 : 1672-6693(2006)03-0020-03

Semistrict Invariant Quasimonotonicity

WEN Qian-ying

(College of Mathematics and Computer Science , Chongqing Normal University , Chongqing 400047 , China)

Abstract In this paper , semistrict invariant quasimonotonicity is introduced. Semistrict invariant quasimonotonicity is defined by the generalization of semistrict quasimonotonicity in reference [1]. Relationship between semistrict prequasi-invexity and semistrict invariant quasimonotonicity is established.

Key words semistrict invariant quasimonotone ; semistrict prequasi-invex

1 基本定义

凸性与广义凸性在数学规划与最优化理论中起着十分重要的作用。近年来 , 已有大量文献通过函数梯度的单调性与广义单调性来刻画函数的凸性与广义凸性。因此 , 对函数单调性的研究 , 已成为最优化理论研究的一个重要方向。在文献 [2] 中 Kararmardian 和 Schaible 定义了 7 种单调映射 , 并建立了函数凸性与其相应梯度的单调性之间的关系 ; 在文献 [3] 中 Ruiz-Garzon 等定义了 7 种广义不变单调映射并讨论了 7 种广义不变单调性与 7 种广义不变凸函数之间的关系 ; 在文献 [4] 中 Yang 等定义了不变拟单调映射 , 并建立了不变拟单调映射与预拟不变凸函数之间的等价关系 ; 在文献 [1] 中 Hadjisavvas 定义了半严格拟单调映射 , 本文对半严格拟单调映射进行推广 , 定义了半严格不变拟单调映射 , 并得到了半严格预拟不变凸函数与半严格不变拟单调映射之间的等关系。

定义 1^[5] 设 $K \subseteq \mathbf{R}^n$, $\eta: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, 若对 $\forall x, y \in K, \lambda \in (0, 1)$, 有 $y + \lambda\eta(x, y) \in K$, 则称 K

为关于 η 的不变凸集。

定义 2^[6] 设 K 为 $\mathbf{R}^n$ 中关于 $\eta: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 的不变凸集 , $f: K \rightarrow \mathbf{R}$, 若对 $\forall x, y \in K, \lambda \in [0, 1]$, 有 $f(y) \leq f(x)$, 得到 $f(y + \lambda\eta(x, y)) \leq f(x)$ 成立 , 则称 f 是集合 K 上关于 η 的预拟不变凸函数。

定义 3^[7] 设 K 为 $\mathbf{R}^n$ 中关于 $\eta: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 的不变凸集 , $f: K \rightarrow \mathbf{R}$, 若对 $\forall x, y \in K, f(x) \neq f(y), \forall \lambda \in (0, 1), f(y + \lambda\eta(x, y)) < \max\{f(x), f(y)\}$, 则称 f 是集合 K 上关于 η 的半严格预拟不变凸函数。

定义 4^[4] 设 K 为 $\mathbf{R}^n$ 中关于 $\eta: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 的不变凸集 , $f: K \rightarrow \mathbf{R}^n$, 若对 $\forall x, y \in K, x \neq y$, 有 $\eta(y, x)^T f(x) > 0$, 即 $\eta(y, x)^T f(y) \geq 0$ 成立 , 则称 f 是集合 K 上关于 η 的不变拟单调映射。

定义 5^[1] $f: K \rightarrow \mathbf{R}^n$, 若 f 是拟单调的 , 且 $\forall x, y \in K, x \neq y, \exists z \in \left(\frac{x+y}{2}, y\right)$, 使得

$$(y-x)^T f(x) > 0 \Rightarrow (y-x)^T f(z) > 0$$

* 收稿日期 2006-04-19

资助项目 国家自然科学基金(No. 10471159) , 重庆市自然科学基金

作者简介 文乾英(1976-) , 女 , 贵州遵义人 , 硕士研究生 , 研究方向为最优化理论。

成立,则称 f 是集合 K 上的半严格拟单调映射。

定义6 设 K 为 $\mathbf{R}^n$ 中关于 $\eta: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 的不变凸集, $f: K \rightarrow \mathbf{R}^n$,若 f 是不变拟单调的,且 $\forall x, y \in K, x \neq y, \eta(x, y)^T(f(y) - f(x)) > 0, \exists z \in \{y + \lambda\eta(x, y) \mid \lambda \in (0, 1)\}$,使得 $\eta(x, y)^T(f(z) - f(x)) > 0$,则称 f 是集合 K 上关于 η 的半严格不变拟单调映射。

注 半严格拟单调映射是半严格不变拟单调映射,但反之不然。

例 设 $f(x) = \sin^2 x \cos x, x \in [0, \pi], \eta(x, y) = \cos y(\sin y - \sin x), x, y \in [0, \pi]$,容易验证 f 在 $[0, \pi]$ 上是半严格不变拟单调映射。事实上,令 $x = \frac{\pi}{3}, y = \frac{3\pi}{4}$,则

$$(y - x)^T f(x) = \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) \sin^2 \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} > 0.$$

又由 $\frac{x+y}{2} = \frac{\frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{4}}{2} = \frac{13\pi}{24} > \frac{\pi}{2}$,则对 $\left(\frac{13\pi}{24}, \frac{3\pi}{4}\right)$ 中所有的 z 都有 $f(z) < 0$,即有 $(y - x)^T f(z) < 0$ 。所以, $f(x)$ 不是半严格拟单调映射。

2 主要结果

条件C 设 $\eta: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$,则对 $\forall x, y \in \mathbf{R}^n, \forall \lambda \in [0, 1]$,有

$$\begin{aligned} \eta(y, y + \lambda\eta(x, y)) &= -\lambda\eta(x, y), \\ \eta(x, y + \lambda\eta(x, y)) &= (1 - \lambda)\eta(x, y). \end{aligned}$$

在文献[8]中Yang等证明了如果 $\eta: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 满足条件C,则

$$\eta(y + \lambda\eta(x, y), y) = \lambda\eta(x, y).$$

引理1^[7] 设 K 为 $\mathbf{R}^n$ 中关于 $\eta: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 的不变凸集, $f: K \rightarrow \mathbf{R}, f$ 是集合 K 上关于 η 的半严格拟不变凸函数的充要条件是:1) f 是集合 K 上关于 η 的拟不变凸函数;2) $\exists \lambda \in (0, 1)$,使得对 $\forall x, y \in K, f(x) \neq f(y)$,有

$$\begin{aligned} f(y + \lambda\eta(x, y)) &< \max\{f(x), f(y)\}, \\ f(y + (1 - \lambda)\eta(x, y)) &< \max\{f(x), f(y)\}. \end{aligned}$$

引理2^[4] 设 K 为 $\mathbf{R}^n$ 中关于 $\eta: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 的不变凸集, $f: K \rightarrow \mathbf{R}, f$ 是集合 K 上的可微函数,如果 η 满足条件C,则 f 是集合 K 上关于 η 的拟不变凸函数的充要条件是: ∇f 是集合 K 上关于 η 的不变拟单调映射,且对 $\forall x, y \in K, f(x) \leq f(y) \Rightarrow f(y + \eta(x, y)) \leq f(x)$ 成立。

定理 设 K 为 $\mathbf{R}^n$ 中关于 $\eta: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 的

不变凸集, η 满足条件C, $f: K \rightarrow \mathbf{R}$ 是 K 上的可微函数, ∇f 连续,则 f 是集合 K 上关于 η 的半严格拟不变凸函数的充要条件是: ∇f 是集合 K 上关于 η 的半严格不变拟单调映射,且 $\forall x, y \in K$,则

$$f(y) \leq f(x) \Rightarrow f(y + \eta(x, y)) \leq f(x)$$

成立。

证明 必要性。设 f 是半严格拟不变凸函数,则由引理1知 f 是拟不变凸函数。再由引理2知 ∇f 是不变拟单调的,且 $\forall x, y \in K$,则有

$$f(y) \leq f(x) \Rightarrow f(y + \eta(x, y)) \leq f(x).$$

设 $\forall x, y \in K, x \neq y, \eta(x, y)^T \nabla f(y) > 0$,则 $\forall z \in \{y + \lambda\eta(x, y) \mid \lambda \in (0, 1)\}$,由于

$$\eta(z, y) = \eta(y + \lambda\eta(x, y), y) = \lambda\eta(x, y)$$

所以有 $\eta(z, y)^T \nabla f(y) > 0$ 。又由于 ∇f 是不变拟单调的,则 $\eta(z, y)^T \nabla f(z) \geq 0$,即 $\eta(x, y)^T \nabla f(z) \geq 0$ 。

若 $\forall z \in \{y + \lambda\eta(x, y) \mid \lambda \in (0, 1)\}, \eta(x, y)^T \nabla f(z) = 0$,即

$$\eta(x, y)^T \nabla f(y + \lambda\eta(x, y)) = 0, \lambda \in (0, 1) \quad (1)$$

由于 ∇f 是连续的,对(1)式当 $\lambda \rightarrow 0$ 时取极限可得 $\eta(x, y)^T \nabla f(y) = 0$ 。这与假设矛盾,故必存在 $z \in \{y + \lambda\eta(x, y) \mid \lambda \in (0, 1)\}$,使得 $\eta(x, y)^T \nabla f(z) > 0$ 。

所以, ∇f 是半严格不变拟单调映射。

充分性。设 ∇f 是半严格不变拟单调映射,则由定义知, ∇f 是不变拟单调映射,又因为 $\forall x, y \in K$,有 $f(y) \leq f(x) \Rightarrow f(y + \eta(x, y)) \leq f(x)$,由引理2知, f 是拟不变凸函数。

下证 $\exists \lambda \in (0, 1), \forall x, y \in K, f(x) \neq f(y)$,有 $f(y + \lambda\eta(x, y)) < \max\{f(x), f(y)\}$ 。即证

$$f(y) < f(x) \Rightarrow f(y + \lambda\eta(x, y)) < f(x)$$

用反证法,假设 $\forall \bar{\lambda} \in (0, 1)$,由 $f(y) < f(x)$ 得

$$f(y + \bar{\lambda}\eta(x, y)) \geq f(x) > f(y).$$

首先证明 $\exists \bar{\lambda} \in (0, 1)$,使得

$$f(y + \bar{\lambda}\eta(x, y)) > f(y + \eta(x, y))$$

若 $\forall \bar{\lambda} \in (0, 1), f(y + \bar{\lambda}\eta(x, y)) = f(y + \eta(x, y))$,由于 f 可微,所以 f 是连续的,从而对 $\bar{\lambda} \rightarrow 0$ 时取极限有 $f(y) = f(y + \eta(x, y))$,所以 $f(y + \bar{\lambda}\eta(x, y)) = f(y)$,这与假设矛盾。故必 $\exists \bar{\lambda} \in (0, 1)$,使得

$$f(y + \bar{\lambda}\eta(x, y)) > f(y + \eta(x, y))$$

由中值定理, $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in (0, 1), 0 < \lambda_2 < \bar{\lambda} < \lambda_1 < 1$,使得

$$\begin{aligned} f(y + \bar{\lambda}\eta(x, y)) - f(y + \eta(x, y)) &= \\ (\bar{\lambda} - 1)\eta(x, y)^T \nabla f(y + \lambda_1\eta(x, y)) &> 0 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & f(y + \bar{\lambda}\eta(x, y)) - f(y) = \\ & \bar{\lambda}\eta(x, y)^T \nabla f(y + \lambda_2\eta(x, y)) > 0 \end{aligned} \quad (3)$$

由此可得

$$\eta(x, y)^T \nabla f(y + \lambda_1\eta(x, y)) < 0 \quad (4)$$

$$\eta(x, y)^T \nabla f(y + \lambda_2\eta(x, y)) > 0 \quad (5)$$

由条件 C 有

$$\begin{aligned} & \eta(y + \lambda_2\eta(x, y), y + \lambda_1\eta(x, y)) = \\ & \eta(y + \lambda_2\eta(x, y), y) + \lambda_2\eta(x, y) + (\lambda_1 - \lambda_2)\eta(x, y) = \\ & \eta(y + \lambda_2\eta(x, y), y) + \lambda_2\eta(x, y) + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{1 - \lambda_2}\eta(x, y + \\ & \lambda_2\eta(x, y)) = -\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{1 - \lambda_2}\eta(x, y + \lambda_2\eta(x, y)) = \\ & (\lambda_2 - \lambda_1)\eta(x, y) \\ & \eta(y + \lambda_1\eta(x, y), y + \lambda_2\eta(x, y)) = \\ & \eta(y + \lambda_1\eta(x, y), y) + \lambda_1\eta(x, y) + (\lambda_2 - \lambda_1)\eta(x, y) = \\ & \eta(y + \lambda_1\eta(x, y), y) + \lambda_1\eta(x, y) + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{1 - \lambda_1}\eta(x, y + \\ & \lambda_1\eta(x, y)) = -\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{1 - \lambda_1}\eta(x, y + \lambda_1\eta(x, y)) = \\ & (\lambda_1 - \lambda_2)\eta(x, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{所以 } \eta(y + \lambda_2\eta(x, y), y + \lambda_1\eta(x, y)) = \\ & -\eta(y + \lambda_1\eta(x, y), y + \lambda_2\eta(x, y)). \end{aligned}$$

在(4)式两端乘以 $(\lambda_2 - \lambda_1)$ (5)式两端乘以 $(\lambda_1 - \lambda_2)$,并注意到 $\lambda_1 > \lambda_2$,得

$$\begin{aligned} & \eta(y + \lambda_2\eta(x, y), y + \lambda_1\eta(x, y))^T \cdot \\ & \nabla f(y + \lambda_1\eta(x, y)) > 0 \\ & \eta(y + \lambda_1\eta(x, y), y + \lambda_2\eta(x, y))^T \cdot \\ & \nabla f(y + \lambda_2\eta(x, y)) > 0 \end{aligned}$$

由以上两式知, ∇f 不是不变拟单调映射。

所以, ∇f 不是半严格不变拟单调映射。这与已知矛盾, 所以 $\exists \lambda \in (0, 1), \forall x, y \in K, f(x) \neq f(y)$,有

$$f(y + \lambda\eta(x, y)) < \max\{f(x), f(y)\}.$$

同理可证 $\exists \lambda \in (0, 1), \forall x, y \in K, f(x) \neq f(y)$,有

$$f(y + (1 - \lambda)\eta(x, y)) < \max\{f(x), f(y)\}$$

由引理 1 知, f 是半严格预拟不变凸函数。

证毕

参考文献:

- [1] HADJISAVVAS N, SCHAIBLE S. On Strong Pseudomonotonicity and (Semi) Strict Quasimonotonicity[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1993, 79(1): 139-155.
- [2] KARAMARDIAN S, SCHAIBLE S. Seven Kinds of Monotone Maps[J]. Journal Optimization Theory and Applications, 1990, 66(1): 37-46.
- [3] RUIZ-GARZON G, OSUNA-GOMEZ R, UFIAN-LIZANA A. Generalized Invex Monotonicity[J]. European Journal of Operational Research, 2003, 144: 501-512.
- [4] YANG X M, YANG X Q, TEO K L. Generalized Invexity and Generalized Invariant Monotonicity[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2003, 117(3): 607-625.
- [5] MOHAN S R, NEOGY S K. On Invex Sets and Princonv Functions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1995, 189: 901-908.
- [6] PINI R. Invexity and Generalized Convexity[J]. Optimization, 1991, 22: 513-525.
- [7] YANG X M, YANG X Q, TEO K L. Characterizations and Applications of Prequasi-Invex Functions[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2001, 110(3): 645-668.
- [8] YANG X M, YANG X Q, TEO K L. Criteria for Generalized Invex Monotonicities[J]. European Journal of Operational Research, 2005, 164: 115-119.

(责任编辑 黄颖)