# 关于 $T_{2\frac{3}{4}}$-分离型邻域空间*

杜 瑞 瑾
(重庆师范大学 数学与计算机科学学院，重庆 400047)

**摘　要**：对邻域空间的研究已经有了一些结果,本文在此基础上引入了 $T_{2\frac{3}{4}}$-分离型邻域空间,着重讨论了它的重要性质,并给出两个重要反例,最后推导了 $T_{2\frac{3}{4}}$-分离型邻域空间与 $T_i$($i=3\frac{1}{2},3,2\frac{1}{2},2,1$)-型邻域空间相互间的关系。

**关键词**：邻域空间；正则；次正则；$T_{2\frac{3}{4}}$-分离型邻域空间
**中图分类号**：O189.1　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1672-6693(2006)03-0026-04

## On $T_{2\frac{3}{4}}$-Separated Form Neighborhood Space

*DU Rui-jin*
(College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

**Abstract**: There have been some conclusions of the research on neighborhood space. On this basis, the paper introduces a separated form neighborhood space, mainly discusses its important properties and gives two important counterexamples. At last the relation between $T_{2\frac{3}{4}}$-separated form neighborhood space and $T_i$($i=3\frac{1}{2},3,2\frac{1}{2},2,1$) -form neighborhood space were derived.

**Key words**: neighborhood space; regularity; hyporegularity; $T_{2\frac{3}{4}}$-separated form neighborhood space

$T_2$-型邻域空间与 $T_3$-型邻域空间是点集拓扑学中的重要性质,文献[1]引入了 $T_{2\frac{1}{2}}$-型邻域空间的概念及结果,本文主要论证了 $T_{2\frac{3}{4}}$-分离型邻域空间是严格介于 $T_{2\frac{1}{2}}$-型邻域空间与 $T_3$-型邻域空间的一种新型空间。为研究方便,列出以下知识。

**定义 1**[2~7]　设 $X$ 是任一集合,如果对每一个 $x\in X$ 都确定了一些包含 $x$ 的子集与 $x$ 对应,则称 $X$ 为 Frechet($V$) 空间或邻域空间,简记为($V$) 空间。与 $x$ 对应的各集叫 $x$ 的邻域,点 $x$ 的邻域族记作 $V(x)$。$\forall x\in E\subset X$,$\exists U\in V(x)$,s. t. $U\subset E$,称 $E$ 为邻域空间的开集。此外,还有如下定义。

1) 若对 $X$ 中每两点 $x_1$ 和 $x_2$,$x_1\neq x_2$,有 $V_1\in V(x_1)$,$V_2\in V(x_2)$ 满足 $x_1\notin V_2$,$x_2\notin V_1$,则称($X$,$V$) 为 $T_1$-型邻域空间。

2) 如果对 $X$ 中每两点 $x_1$ 和 $x_2$,$x_1\neq x_2$,有 $V_1\in V(x_1)$,$V_2\in V(x_2)$ 满足 $V_1\cap V_2=\varnothing$,则称($X$,$V$) 为 $T_2$-型邻域空间。

3) 如果对 $X$ 中每两点 $x$,$y\in X$,$x\neq y$,存在开 $U\in V(x)$ 与开 $V\in V(y)$,$\overline{U}\cap\overline{V}=\varnothing$,则称($X$,$V$) 是 $T_{2\frac{1}{2}}$-型邻域空间。

4) 如果 $A$ 是闭集,且 $A\subset X$,$x\notin A$,则存在开集 $U\supset A$ 与开 $V\in V(x)$ 满足 $U\cap V=\varnothing$,则称($X$,$V$) 是正则邻域空间,正则的 $T_1$-型邻域空间称为 $T_3$-型邻域空间。

5) 设($X$,$V$) 是邻域空间,对任意 $A$ 是闭集,且 $A\subset X$ 及任意 $x\notin A$,存在连续映射 $f$:$X\to[0,1]$ 满足 $f(x)=0$,$f(A)=\{1\}$,则称 $X$ 是全正则的邻域空间,全正则的 $T_1$-型邻域空间称为 $T_{3\frac{1}{2}}$-型邻域空间。

**定义 2**　设($X$,$V$) 是邻域空间,$A\subset X$,若 $U\subset X$ 且存在开集 $V$ 使 $A\subset V\subset U$,则称 $U$ 为子集 $A$ 的邻域。

* 收稿日期：2005-10-18　　修回日期：2006-02-16
资助项目：重庆市教委科学研究项目(No. 05JWSK054)
作者简介：杜瑞瑾(1982-),女,山西运城人,硕士研究生,研究方向为拓扑动力系统。

**定义3** 设$(X,V)$是邻域空间,$\Psi$、$\varphi$是$V$的开邻域族。如果任意$U\in V$,存在$\Psi_1\subset\Psi$使得$U=\cup_{B\in\Psi_1}B$,则称$\Psi$为$X$的一个基 如果$\varphi$的所有非空有限子族之交构成的集族,即

$$\Psi=\{S_1\cap S_2\cap\cdots\cap S_n\mid S_i\in\varphi,\ i=1,2\cdots n;n\in\mathbf{Z}_+\}$$

是$X$的一个基,则称$\varphi$为$X$的一个子基。

**定义4** 设$X=\prod_{i\in I}X_i$是度量空间$X_i(i\in I)$的度量积空间,则将$X,X_i(i\in I)$都考虑作为邻域空间时,$X$是$X_i(i\in I)$的邻域积空间。

**定理1**[1] 设$(X,V)$是邻域空间,则$X$是正则邻域空间$\Leftrightarrow$任意$x\in X$与开$U\in V(x)$,存在$V\in V(x)$使得$\overline{V}\subset U$。

**定理2**[1] 设$X$、$Y$是邻域空间,$f:X\to Y$是映射,则$f$连续$\Leftrightarrow$邻域、开集、闭集的逆象分别是邻域、开集、闭集。

**定理3**[1] $(X,V)$是$T_1$-型邻域空间的充要条件是单点集为闭集。

# 1 $T_{2\frac{3}{4}}$-分离型邻域空间

**定义5** 设$(X,V)$是邻域空间,任意$x,y\in X$且$x\neq y$,存在连续函数$f:X\to[0,1]$,使得$f(x)=0$,$f(y)=1$,则称$X$是次正则的分离型邻域空间,次正则的$T_1$-型邻域空间称为$T_{2\frac{3}{4}}$-分离型邻域空间。

**定理4** 设$X$、$Y$是邻域空间,$f:X\to Y$是映射,则以下条件等价:

1)$f$连续;

2)$Y$有一个基$\Psi$,任意开集$B\in\Psi$,$f^{-1}(B)$是$X$中一个开集;

3)$Y$有一个子基$\varphi$,任意开集$S\in\varphi$,$f^{-1}(S)$是$X$中一个开集。

**证明** 条件1)蕴涵条件3)是显然的。

条件3)蕴涵条件2),根据定义3知$\Psi=\{S_1\cap S_2\cap\cdots\cap S_n\mid S_i\in\varphi,i=1,2\cdots n;n\in\mathbf{Z}_+\}$是$Y$的一个基,则

$$\forall S_i\in\varphi,f^{-1}(S_1\cap S_2\cap\cdots\cap S_n)=f^{-1}(S_1)\cap f^{-1}(S_2)\cap\cdots\cap f^{-1}(S_n)$$

是$X$中有限个开集之交,因此是$X$中一个开集。

条件2)蕴涵条件1),$\Psi$是$Y$的一个基,则任意$Y$中开集$U\in V$,$\exists\Psi_1\subset\Psi$满足$U=\cup_{B\in\Psi_1}B$,$f(U)=f^{-1}(\cup_{B\in\Psi_1}B)=\cup_{B\in\Psi_1}f^{-1}(B)$是$X$中一簇开集之并,所以是$X$中一个开集,据定理2知$f$连续。 证毕

**定理5** 正则的邻域空间一定是次正则的分离型邻域空间。

**证明** 正则邻域空间$X$中,任意$x,y\in X$且$x\neq y$。令$D=\{r_1=0,r_2=1,\cdots\}$为$[0,1]$内一切有理数集。先用归纳法构造$X$开集族$\{G(r)\}_{r\in D}$满足:

1)若$r<r'$,则$\overline{G(r)}\subset G(r')$;

2)$\forall r\in D,x\in G(r)\in V(x)$。

事实上,令$x\in G(r_2)=\{y\}^c$,由定理1知存在开集$U\in V(x)$满足$x\in\overline{U}\subset G(r_2)$,令$G(r_1)=U$。由$r_1=0<1=r_2$,则开集族$\{G(r_1),G(r_2)\}$满足条件1),2)。

现设$k\geqslant 2$且$\{G(r_i)\}_{i\leqslant k}$满足条件1),2),令$r_l=\max\{r_i\mid r_i<r_{k+1},i\leqslant k\}$,$r_s=\min\{r_i\mid r_i>r_{k+1},i\leqslant k\}$,则$r_l<r_s(l,s\leqslant k)$。据条件1)知$\overline{G(r_l)}\subset G(r_s)$且$\exists W\in V(x)$使得$\overline{G(r_l)}\subset W\subset\overline{W}\subset G(r_s)$。令$G(r_{k+1})=W$。则开集族$\{G(r_i)\}_{i\leqslant k+1}$满足条件1),2),归纳完成。令

$$f(z)=\begin{cases}\inf\{r\in D\mid z\in G(r)\} & (z\in G(r_2))\\ 1 & (z\in X\backslash G(r_2))\end{cases}$$

据条件2)有

$$f(x)=\inf D=0,y\in(G(r_2))^c,f(y)=1。$$

下面只须证$f$: $X\to[0,1]$连续。事实上,$[0,1]$的子基元形如$[0,\alpha)$,$(\beta,1]$,其中$0<\alpha\leqslant 1$,$0\leqslant\beta<1$。若能证明

$$f^{-1}([0,\alpha))=\cup_{r<\alpha}G(r);\tag{1}$$

$$f^{-1}((\beta,1])=\cup_{r>\beta}X\backslash\overline{G(r)}。\tag{2}$$

其中(1)、(2)式右端是开集,据定理4知$f$连续。事实上(1)式可由$f$的定义直接得到。下证(2)式。

设$x\in f^{-1}((\beta,1])$,$f(x)>\beta$或$x\in(G(r_2))^c$,则$\forall r\in D$使$\beta<r<1=r_2$,据条件1),有$x\in X\backslash\overline{G(r)}$,故$f^{-1}((\beta,1])\subset\cup_{r>\beta}(X\backslash\overline{G(r)})$。反之若$\exists r_0>\beta$使$x\in X\backslash\overline{G(r_0)}$,则若$x\in G(r)$必有$r\geqslant r_0>\beta$,从而$x\in f^{-1}((\beta,1])$,即$\cup_{r>\beta}(X\backslash\overline{G(r)})\subset f^{-1}((\beta,1])$,故(2)式成立。 证毕

# 2 $T_{2\frac{3}{4}}$-分离型邻域空间的性质

**定理6** $T_{2\frac{3}{4}}$-分离型邻域空间是可遗传的。

**证明** 设$(X,V)$是$T_{2\frac{3}{4}}$-分离型邻域空间,故$X$是次正则的、$T_1$的。由于$T_1$-型邻域空间具有遗传性,因此只须证次正则是可遗传的。设$M\subset X$子空间,任意$x,y\in M$且$x\neq y$,显然$x,y\in X$且$x\neq y$,由$X$是次正则的,故存在连续函数$f:X\to[0,1]$使$f(x)=0$,$f(y)=1$,令$g=f|_M:M\to[0,1]$,$g$为连

续函数且

$$g(x)=f(x)=0, g(y)=f(y)=1,$$

故 $M$ 是次正则的分离型邻域空间，即次正则是可遗传的。　证毕

**定理 7**　$T_{2\frac{3}{4}}$- 分离型邻域空间是拓扑不变的。

**证明**　设 $(X,V)$ 是 $T_{2\frac{3}{4}}$- 分离型邻域空间，故 $X$ 是次正则的、$T_1$ 的。由于 $T_1$- 型邻域空间是拓扑不变的，因此只须证次正则是拓扑不变的。设 $f: X\to Y$ 同胚映射，$\forall x,y\in Y, x\neq y$，且

$$f^{-1}(x), f^{-1}(y)\in X, f^{-1}(x)\neq f^{-1}(y),$$

因为 $X$ 次正则，故存在连续函数 0，令 $g=\Psi\circ f^{-1}: Y\to[0,1]$ 是连续函数，且

$$g(x)=\Psi\circ f^{-1}(x)=0, g(y)=\Psi\circ f^{-1}(y)=1,$$

因此 $Y$ 是次正则的分离型邻域空间。　证毕

由定理 3 可知，$T_1$- 型邻域空间满足单点集是闭集，而 $T_{3\frac{1}{2}}$- 型邻域空间满足任意可乘性，因此 $T_{2\frac{3}{4}}$- 分离型邻域空间作为 $T_{3\frac{1}{2}}$- 型邻域空间的特殊情形，满足以下定理。

**定理 8**　积空间 $X=\prod_{i\in I}X_i$ 是 $T_{2\frac{3}{4}}$- 分离型邻域空间 $\Leftrightarrow\forall i\in I, X_i$ 是 $T_{2\frac{3}{4}}$- 分离型邻域空间。

## 3　$T_{2\frac{3}{4}}$- 分离型邻域空间与其他邻域空间的相互关系

**定理 9**　设 $(X,V)$ 是邻域空间，$f: X\to Y$ 是映射，则 $f$ 连续即等价于

$$\forall B\subset Y, \overline{f^{-1}(B)}\subset f^{-1}(\overline{B}) \tag{3}$$

**证明**　据定理 2 知 $f$ 连续等价于

任意闭集 $B\subset Y$，$f^{-1}(B)$ 是 $X$ 中闭集。　(4)

下只须证(3)式、(4)式等价。若(3)式成立，$B$ 是 $Y$ 中闭集，据(3)式有

$$\overline{f^{-1}(B)}\subset f^{-1}(\overline{B})=f^{-1}(B),$$

$f^{-1}(B)$ 闭于 $X$。

反之若(4)成立，$\forall B\subset Y$，则 $f^{-1}(\overline{B})$ 是 $X$ 中包含 $f^{-1}(B)$ 的闭子集，故有 $f^{-1}(\overline{B})\supset\overline{f^{-1}(B)}$，则命题得证。　证毕

**定理 10**　$T_{2\frac{3}{4}}$- 分离型邻域空间与 $T_3$，$T_{2\frac{1}{2}}$- 型邻域空间的关系是 $T_3\Rightarrow T_{2\frac{3}{4}}\Rightarrow T_{2\frac{1}{2}}$。

**证明**　$T_3\Rightarrow T_{2\frac{3}{4}}$，由定理 5 显然成立。

$T_{2\frac{3}{4}}\Rightarrow T_{2\frac{1}{2}}$，设 $(X,V)$ 是次正则的、$T_1$- 型邻域空间。任意 $x,y\in X$ 且 $x\neq y$，存在连续函数 $f: X\to[0,1]$，使得 $f(x)=0, f(y)=1$。$[0,1]$ 作为实直线的子空间，$[0,\frac{1}{3})$，$(\frac{2}{3},1]$ 是其开集，于是 $f^{-1}([0,\frac{1}{3}))$，$f^{-1}((\frac{2}{3},1])$ 是 $X$ 上开集且

$$x\in f^{-1}([0,\tfrac{1}{3}))\subset\overline{f^{-1}([0,\tfrac{1}{3}))},$$

$$y\in f^{-1}((\tfrac{2}{3},1])\subset\overline{f^{-1}((\tfrac{2}{3},1])},$$

据定理 9 有

$$\overline{f^{-1}([0,\tfrac{1}{3}))}\subset f^{-1}(\overline{[0,\tfrac{1}{3})})=f^{-1}([0,\tfrac{1}{3})),$$

$$\overline{f^{-1}((\tfrac{2}{3},1])}\subset f^{-1}(\overline{(\tfrac{2}{3},1]})=f^{-1}([\tfrac{2}{3},1]),$$

而 $\left[0,\frac{1}{3}\right]$，$\left[\frac{2}{3},1\right]$ 是 $[0,1]$ 上两无交闭集，由 $f$ 连续，则

$$f^{-1}([0,\tfrac{1}{3}])\cap f^{-1}([\tfrac{2}{3},1])=\varnothing,$$

故 $\overline{f^{-1}([0,\frac{1}{3}))}\cap\overline{f^{-1}(([\frac{2}{3},1])}=\varnothing$，即 $X$ 是 $T_{2\frac{1}{2}}$- 型邻域空间。　证毕

根据文献[1]可得如下推论。

**推论**　$T_{3\frac{1}{2}}\Rightarrow T_3\Rightarrow T_{2\frac{3}{4}}\Rightarrow T_{2\frac{1}{2}}\Rightarrow T_2\Rightarrow T_{1\frac{1}{2}}\Rightarrow T_1$。

**注**　定理 10 所阐述的关系反之不一定成立。

**例 1**　设 $P=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{R}, y>0\}$ 为上半平面，在 $P$ 上取欧氏拓扑 $\tau$，$L$ 代表实数轴。令 $X=P\cup L$，在 $X$ 上取拓扑 $\tau^*$：$\tau$ 加上形如 $\{x\}\cup(P\cap U)$ 的集组成，其中 $x\in L$，$U$ 是平面内点 $x$ 的欧氏邻域。

则 $(X,\tau^*)$ 是 $T_{2\frac{3}{4}}$- 分离型邻域空间。事实上，对 $\forall x,y\in X, x\neq y, \exists f: X\to[0,1]$ 且

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{|x-z|}{|x-y|} & z\in A=\{a\in X\mid a=(1-t)x+ty, t\in[0,1]\}\\ 0 & z\in X-A\end{cases}$$

满足 $f(x)=0, f(y)=1$，下只须说明 $f$ 是连续函数。由于

$$\varphi=\{\{[0,\alpha)\mid\alpha\in(0,1]\}\cup\{(\beta,1]\mid\beta\in[0,1)\}\}$$

作成 $[0,1]$ 的一个子基，据定理 4、定理 5，只证 $f^{-1}([0,\alpha))$ 是 $X$ 中的开集。由

$$f^{-1}([0,\alpha))=(X-A)\cup\{a\mid a\in(1-t)x+ty, 0\leqslant t<t_0\}$$

其中由 $t_0$ 所得 $a_0$ 满足 $f(a_0)=\alpha$，故只证

$$B=A-\{a\mid a\in(1-t)x+ty, 0\leqslant t<t_0\}$$

为 $X$ 中闭集。分 3 种情况讨论，如图 1 所示。

1) 当 $B$ 位于 $P$ 中，显然是闭集；

2) 当 $B$ 一端点位于 $L$ 上，其余各点位于 $P$ 中时，

$d(B) = B$,$\bar{B} = B \cup d(B) = B$,$B$ 为闭集;

3)当 $B$ 位于 $L$ 上,$d(B) = \varnothing \subset B$,$B$ 为闭集。但 $(X,\tau^*)$ 却不是 $T_3$- 型邻域空间[8]。

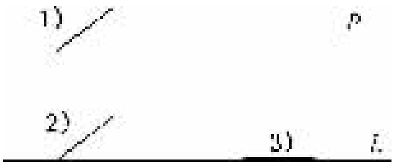


图 1 $B$ 点存在的 3 种情况

例 2 设 $S$ 是平面上单位正方形的内部除了横坐标为 $\frac{1}{2}$ 的点以外的一切有理点。令

$$X = S \cup \{(0,0)\} \cup \{(1,0)\} \cup \left\{\frac{(\frac{1}{2}, r\sqrt{2})}{r} \in \mathbf{Q}, 0 < r\sqrt{2} < 1\right\}$$

其中 Q 为有理数集。定义 $X$ 上拓扑邻域基如下:取 $S$ 中每一点的邻域基为单位正方形的欧氏邻域基,$X$ 中其余各点邻域基分别如图 2 所示,为

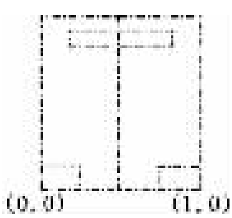


图 2 $X$ 中其余各点邻域基

$$U_n(0,0) = \{(0,0)\} \cup \{(x,y) \mid 0 < x < \frac{1}{4}, 0 < y < \frac{1}{n}\},$$

$$U_n(1,0) = \{(1,0)\} \cup \{(x,y) \mid \frac{3}{4} < x < 1, 0 < y < \frac{1}{n}\},$$

$$U_n(\frac{1}{2}, r\sqrt{2}) = \{(x,y) \mid \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}, \mid y - r\sqrt{2} \mid < \frac{1}{n}\}$$

此空间为 Arens 空间。则 $X$ 是 $T_{2\frac{1}{2}}$- 型邻域空间[8]。却不是 $T_{2\frac{3}{4}}$- 分离型邻域空间。事实上,对于 $X$ 中不同的两点 $(0,0)$,$(1,0)$,找不出连续函数

$$f: X \to [0,1], \text{s.t.} \quad f(0,0) = 0, f(1,0) = 1。$$

**致谢** 本文撰写得到金渝光教授对本文的悉心指导,在此表示真诚的感谢!

**参考文献:**

[1] 陈祥平. $T_{2\frac{1}{2}}$和 $T_{3\frac{1}{2}}$-型邻域空间[J]. 南阳师范学院学报,2002,6(1):12-14.

[2] 熊金城. 点集拓扑讲义[M]. 北京:高等教育出版社,1998.

[3] KELLEY J L. 一般拓扑学[M]. 吴从炘,吴让泉译. 北京:科学出版社,1982.

[4] 蒲保明,蒋继光,胡淑礼. 拓扑学[M]. 北京:高等教育出版社,1985.

[5] 江泽涵. 拓扑学引论[M]. 上海:上海科技出版社,1978.

[6] 李孝传,陈玉清. 一般拓扑学导引[M]. 北京:人民教育出版社,1982.

[7] 曼克勒斯 J R. 拓扑学基本教程[M]. 北京:科学出版社,1987.

[8] 汪林,杨富春. 拓扑空间中的反例[M]. 北京:科学出版社,2000. 69-71.

(责任编辑 黄 颖)