

强预不变凸函数的性质^{*}

秦 春 蓉

(重庆师范大学 数学与计算机科学学院 , 重庆 400047)

摘 要 :在文献 [1] 中 ,作者给出了强预不变凸函数的一些性质。本文首先通过对文献 [1] 中定理条件的减弱 ,得出相同的结果 ;而后对文献 [1] 中建立在下半连续条件下的强预不变凸函数的性质 ,做了一个更简单的证明。最后得到一个关于强预不变凸函数的新性质。

关键词 :不变凸集 ;预不变凸函数 ;强预不变凸函数

中图分类号 :O221.1

文献标识码 :A

文章编号 :1672-6693(2006)03-0030-03

Properties of Strongly Preinvex Functions

QIN Chun-rong

(College of Mathematics and Computer Science , Chongqing Normal University , Chongqing 400047 , China)

Abstract :In [1] , the author has given out some properties of strongly preinvex functions under a certain set of conditions. In this note , some of these conditions can be weakened to get the same results , and gives another simplified proof for a criterion of strongly preinvex functions established under the condition of lower semicontinuity. At last , some new properties of strongly preinvex functions are obtained.

Key words :invex set ; preinvex functions ; strongly preinvex functions

1 基本定义

凸性和广义凸性在数学经济、工程、管理科学和优化理论中扮演着重要的角色。近年来 ,很多人在这方面做了大量的工作 ,如文献 [2 ~ 5]。本文通过对文献 [1] 中定理条件的减弱 ,得出相同的结果 ;而后对文献 [1] 中建立在下半连续条件下的强预不变凸函数的性质 ,做了一个更简单的证明。最后得到一个关于强预不变凸函数的新性质。

下面先给出一些相关的定义。

定义 1^[3] 设集合 $K \subseteq \mathbf{R}^n$,如果存在一个向量函数 $\eta: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$,使得 $\forall x, y \in K, \lambda \in [0, 1]$,有 $y + \lambda\eta(x, y) \in K$,则称集合 K 是不变凸集。

定义 2^[3] 设集合 $K \subseteq \mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 的不变凸集 ,函数 $f: K \rightarrow \mathbf{R}$ 若满足

$$f(y + \lambda\eta(x, y)) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \forall x, y \in K, \lambda \in [0, 1],$$

则称函数 f 是预不变凸函数。

定义 3^[1] 设集合 $K \subseteq \mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 的不变凸集 ,函数 $f: K \rightarrow \mathbf{R}$,如果存在一个常数 $\beta > 0$,使得 $\forall x, y \in K, \lambda \in [0, 1]$ 满足

$$f(y + \lambda\eta(x, y)) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) - \beta\lambda(1 - \lambda)\|\eta(x, y)\|^2,$$

则称函数 f 是强预不变凸函数。

条件 C^[5] 函数 $\eta: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 满足条件 C ,如果 $\forall x, y \in K, \lambda \in [0, 1]$,有

$$\eta(y, y + \lambda\eta(x, y)) = -\lambda\eta(x, y), \eta(x, y + \lambda\eta(x, y)) = (1 - \lambda)\eta(x, y)。$$

* 收稿日期 2005-10-14 修回日期 2006-05-09

作者简介 秦春蓉(1982-) ,女 ,重庆忠县人 ,硕士研究生 ,研究方向为最优化论与算法。

条件 D^[5] 设集合 $K \subseteq \mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 的不变凸集, 函数 $f: K \rightarrow \mathbf{R}$ 如果满足 $f(y + \eta(x, y)) \leq f(x), \forall x, y \in K$, 则称 f 满足条件 D。

2 主要结果

定理 1^[1] 设集合 $K \subseteq \mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 的开不变凸集, η 满足条件 C, 如果函数 $f: K \rightarrow \mathbf{R}$ 在 K 上是上半连续的且满足条件 D, 则 f 在 K 上是关于 η 的强预不变凸函数当且仅当存在常数 $\lambda \in (0, 1)$ 和 $\beta > 0$, 使得 $f(y + \lambda\eta(x, y)) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) - \beta\lambda(1 - \lambda)\|\eta(x, y)\|^2, \forall x, y \in K$ 。

现在将以上定理改变如下。

定理 2 设集合 $K \subseteq \mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 的不变凸集, η 满足条件 C, 如果函数 $f: K \rightarrow \mathbf{R}$ 在 K 上是上半连续的且满足条件 D, 则 f 在 K 上是关于 η 的强预不变凸函数当且仅当存在常数 $\lambda \in (0, 1)$ 和 $\beta > 0$, 使得 $f(y + \lambda\eta(x, y)) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) - \beta\lambda(1 - \lambda)\|\eta(x, y)\|^2, \forall x, y \in K$ 。

证明 必要性。直接由 f 是关于 η 的强预不变凸函数得到。

充分性。由文献 [1] 中的引理 1 有

$$A = \{\alpha \in [0, 1] \mid f(y + \alpha\eta(x, y)) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) - \beta\alpha(1 - \alpha)\|\eta(x, y)\|^2, \forall x, y \in K\}$$

在 $[0, 1]$ 中稠密。显然 $0, 1 \in A$ 。则 $\forall \bar{\alpha} \in (0, 1), \exists \{\alpha_n\} \subseteq (0, 1) \cap A$, 使得 $\alpha_n < \bar{\alpha}, \forall n \in \mathbf{N}$, 且 $\alpha_n \rightarrow \bar{\alpha}, n \rightarrow +\infty$ 。任意给定 $x, y \in K$, 记 $Z = y + \bar{\alpha}\eta(x, y)$ 。对每一个 n , 定义

$$y_n = y + \frac{\bar{\alpha} - \alpha_n}{1 - \alpha_n}\eta(x, y) \quad (1)$$

则 $y_n \rightarrow y, n \rightarrow +\infty$ 。又 $0 < \alpha_n < \bar{\alpha} < 1$, 有 $0 < \frac{\bar{\alpha} - \alpha_n}{1 - \alpha_n} < 1$, 亦即 $y_n \in K$ 。由 (1) 式, 且 K 是关于 η 的不变凸集, 根据条件 C, 得到

$$\begin{aligned} y_n + \alpha_n\eta(x, y_n) &= y + \frac{\bar{\alpha} - \alpha_n}{1 - \alpha_n}\eta(x, y) + \alpha_n\eta(x, y + \frac{\bar{\alpha} - \alpha_n}{1 - \alpha_n}\eta(x, y)) = \\ &= y + [\frac{\bar{\alpha} - \alpha_n}{1 - \alpha_n} + \alpha_n(1 - \frac{\bar{\alpha} - \alpha_n}{1 - \alpha_n})]\eta(x, y) = y + \bar{\alpha}\eta(x, y) = Z \end{aligned} \quad (2)$$

由 f 在 K 的上半连续性, $\forall \varepsilon > 0$, 当 n 充分大时, 有

$$f(y_n) \leq f(y) + \varepsilon \quad (3)$$

故由 (2) 式, 以及 $\alpha_n \in A$ 和 (3) 式, 有

$$\begin{aligned} f(Z) &= f(y_n + \alpha_n\eta(x, y_n)) \leq \alpha_n f(x) + (1 - \alpha_n)f(y_n) - \beta\alpha_n(1 - \alpha_n)\|\eta(x, y_n)\|^2 \leq \alpha_n f(x) + \\ &+ (1 - \alpha_n)f(y + \varepsilon) - \beta\alpha_n(1 - \alpha_n)\|\eta(x, y_n)\|^2 = \alpha_n f(x) + (1 - \alpha_n)f(y + \varepsilon) - \\ &- \beta\alpha_n(1 - \alpha_n)\|\eta(x, y + \frac{\bar{\alpha} - \alpha_n}{1 - \alpha_n}\eta(x, y))\|^2 = \alpha_n f(x) + (1 - \alpha_n)f(y + \varepsilon) - \\ &- \beta\alpha_n(1 - \alpha_n)(1 - \frac{\bar{\alpha} - \alpha_n}{1 - \alpha_n})^2\|\eta(x, y)\|^2 \rightarrow \bar{\alpha}f(x) + (1 - \bar{\alpha})f(y + \varepsilon) - \beta\bar{\alpha}(1 - \bar{\alpha})\|\eta(x, y)\|^2 (n \rightarrow +\infty) \end{aligned}$$

由于 $\varepsilon > 0$ 可以任意的小, 故 $f(Z) \leq \bar{\alpha}f(x) + (1 - \bar{\alpha})f(y) - \beta\bar{\alpha}(1 - \bar{\alpha})\|\eta(x, y)\|^2$ 。所以 f 是关于 η 的强预不变凸函数。证毕

注 1 从定理 2 可知定理 1 中的开集条件省略后也能得到相同的结果。

下面用更简单的方法证明文献 [1] 的定理 6。

定理 3^[1] 设集合 $K \subseteq \mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 的不变凸集, η 满足条件 C, 如果函数 $f: K \rightarrow \mathbf{R}$ 在 K 上是下半连续的且满足条件 D, 则 f 在 K 上是关于 η 的强预不变凸函数当且仅当存在常数 $\beta > 0$, 使得 $\forall x, y \in K, \exists \lambda \in (0, 1)$, 满足

$$f(y + \lambda\eta(x, y)) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) - \beta\lambda(1 - \lambda)\|\eta(x, y)\|^2 \quad (4)$$

为证明以上定理, 先给出下面的引理。

引理 1 设集合 $K \subseteq \mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 的不变凸集, η 满足条件 C, 如果函数 $f: K \rightarrow \mathbf{R}$ 在 K 上

是下半连续的且满足条件 D, 如果存在常数 $\beta > 0$, 使得 $\forall x, y \in K, \exists \lambda \in (0, 1)$, 由 (4) 式, 则集合

$A(x, y) = \{\alpha \in [0, 1] | f(y + \alpha\eta(x, y)) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) - \beta\alpha(1 - \alpha) \|\eta(x, y)\|^2\}, \forall x, y \in K$ 在 $[0, 1]$ 区间稠密。

证明 任意给定 $x, y \in K, x \neq y$. 假定 $A(x, y)$ 在 $[0, 1]$ 区间不稠密, 则存在 $\bar{\alpha} \in (0, 1)$ 和 $\varepsilon > 0$, 使得

$$A(x, y) \cap (\bar{\alpha} - \varepsilon, \bar{\alpha} + \varepsilon) = \emptyset.$$

注意到 $0 \in A(x, y)$, 且由条件 D 知 $1 \in A(x, y)$. 定义 $u = \sup\{\alpha \in A(x, y) | \alpha < \bar{\alpha}\}, v = \inf\{\alpha \in A(x, y) | \alpha > \bar{\alpha}\}$. 令 $u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_k \leq \dots \leq u$, 使得 $u_k \rightarrow u, k \rightarrow +\infty$. 因对每个 k , 有 $u_k \in A(x, y)$, 故

$$f(y + u_k\eta(x, y)) \leq u_k f(x) + (1 - u_k)f(y) - \beta u_k(1 - u_k) \|\eta(x, y)\|^2.$$

所以

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} f(y + u_k\eta(x, y)) \leq u f(x) + (1 - u)f(y) - \beta u(1 - u) \|\eta(x, y)\|^2. \quad (5)$$

又 f 在 K 上下半连续, 于是

$$f(y + u\eta(x, y)) \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} f(y + u_k\eta(x, y)) \quad (6)$$

由 (5), (6) 式得到 $f(y + u\eta(x, y)) \leq u f(x) + (1 - u)f(y) - \beta u(1 - u) \|\eta(x, y)\|^2$. 故 $u \in A(x, y)$. 类似地有 $v \in A(x, y)$. 由 u, v 的定义知 $0 \leq u < \bar{\alpha} < v \leq 1$, 且

$$\alpha u + (1 - \alpha)v \notin A(x, y), \forall \alpha \in (0, 1) \quad (7)$$

现记 $x_u = y + u\eta(x, y), y_v = y + v\eta(x, y)$. 由不等式 (4) 式, 存在 $\lambda \in (0, 1)$, 使得

$$f(y_v + \lambda\eta(x_u, y_v)) \leq \lambda f(x_u) + (1 - \lambda)f(y_v) - \beta\lambda(1 - \lambda) \|\eta(x_u, y_v)\|^2 \quad (8)$$

由条件 C, 知

$$\begin{aligned} y_v + \lambda\eta(x_u, y_v) &= y + v\eta(x, y) + \lambda\eta(y + u\eta(x, y), y + v\eta(x, y)) = \\ &= y + v\eta(x, y) + \lambda\eta(y + u\eta(x, y), y + u\eta(x, y)) - (u - v)\eta(x, y) = \\ &= y + v\eta(x, y) + \lambda\eta(y + u\eta(x, y), y + u\eta(x, y)) + \frac{v - u}{1 - u}\eta(x, y + u\eta(x, y)) = \\ &= y + v\eta(x, y) - \lambda \frac{v - u}{1 - u}\eta(x, y + u\eta(x, y)) = y + [\lambda u + (1 - \lambda)v]\eta(x, y). \end{aligned}$$

故由 (8) 式和 $u, v \in A(x, y)$, 有

$$f(y + [\lambda u + (1 - \lambda)v]\eta(x, y)) = f(y_v + \lambda\eta(x_u, y_v)) \leq \lambda f(x_u) + (1 - \lambda)f(y_v) -$$

$$\beta\lambda(1 - \lambda) \|\eta(x_u, y_v)\|^2 = \lambda f(y + u\eta(x, y)) + (1 - \lambda)f(y + v\eta(x, y)) -$$

$$\beta\lambda(1 - \lambda) \|\eta(y + u\eta(x, y), y + v\eta(x, y))\|^2 = \lambda f(y + u\eta(x, y)) + (1 - \lambda)f(y + v\eta(x, y)) -$$

$$\beta\lambda(1 - \lambda)(u - v)^2 \|\eta(x, y)\|^2 \leq \lambda[u f(x) + (1 - u)f(y) - \beta u(1 - u) \|\eta(x, y)\|^2] +$$

$$(1 - \lambda)[v f(x) + (1 - v)f(y) - \beta v(1 - v) \|\eta(x, y)\|^2] - \beta\lambda(1 - \lambda)(u - v)^2 \|\eta(x, y)\|^2 =$$

$$[\lambda u + (1 - \lambda)v] f(x) + [1 - (\lambda u + (1 - \lambda)v)] f(y) - \beta[\lambda u + (1 - \lambda)v][1 - (\lambda u + (1 - \lambda)v)] \|\eta(x, y)\|^2.$$

这意味着 $\lambda u + (1 - \lambda)v \in A(x, y)$, 此与 (7) 式矛盾. 于是引理 1 得证. 证毕

证明 (定理 3) 由引理 1 知 $\forall x, y \in K, A(x, y)$ 在 $[0, 1]$ 中稠密. 则 $\forall \bar{\alpha} \in (0, 1), \exists \{\alpha_n\} \subseteq (0, 1) \cap A(x, y)$, 使得 $\alpha_n \rightarrow \bar{\alpha}, n \rightarrow +\infty$. 又

$$f(y + \alpha_n\eta(x, y)) \leq \alpha_n f(x) + (1 - \alpha_n)f(y) - \beta\alpha_n(1 - \alpha_n) \|\eta(x, y)\|^2,$$

所以

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} f(y + \alpha_n\eta(x, y)) \leq \bar{\alpha} f(x) + (1 - \bar{\alpha})f(y) - \beta\bar{\alpha}(1 - \bar{\alpha}) \|\eta(x, y)\|^2.$$

由 f 在 K 上的下半连续性, 有 $f(y + \bar{\alpha}\eta(x, y)) \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} f(y + \alpha_n\eta(x, y))$. 也即是

$$f(y + \bar{\alpha}\eta(x, y)) \leq \bar{\alpha} f(x) + (1 - \bar{\alpha})f(y) - \beta\bar{\alpha}(1 - \bar{\alpha}) \|\eta(x, y)\|^2.$$

所以 f 是关于 η 的强预不变凸函数. 证毕

定理 4 $f, g: K \rightarrow \mathbf{R}$ 是两个关于 η 的强预不变凸函数, 则 $f + g$ 也是关于 η 的强预不变凸函数.

证明 因为 f, g 是关于 η 的强预不变凸函数. 故存在常数 $\beta_1 > 0, \beta_2 > 0$, 使得 $\forall x, y \in K, \lambda \in [0, 1]$,

有

$$f(y + \lambda\eta(x, y)) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) - \beta_1\lambda(1 - \lambda) \|\eta(x, y)\|^2,$$

)

$$g(y + \lambda \eta(x, y)) \leq \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y) - \beta_2 \lambda(1 - \lambda) \|\eta(x, y)\|^2.$$

所以,

$$\begin{aligned} (f + g)(y + \lambda \eta(x, y)) &= f(y + \lambda \eta(x, y)) + g(y + \lambda \eta(x, y)) \leq \\ \lambda[f(x) + g(x)] + (1 - \lambda)[f(y) + g(y)] - (\beta_1 + \beta_2)\lambda(1 - \lambda) \|\eta(x, y)\|^2 &= \\ \lambda(f + g)(x) + (1 - \lambda)(f + g)(y) - (\beta_1 + \beta_2)\lambda(1 - \lambda) \|\eta(x, y)\|^2. \end{aligned}$$

故 $f + g$ 是关于 η 的强预不变凸函数。

证毕

参考文献:

- [1] 颜丽佳, 刘芙蓉. 强预不变凸函数[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版) 2005, 22(1): 11-15.
- [2] YANG X M, LI D. On Properties of Preinvex Functions[J]. J Math Anal Appl 2001, 256: 229-241.
- [3] WEIR T, MOND B. Preinvex Functions in Multiple Objective Optimization[J]. J Math Anal Appl 1988, 136: 29-38.
- [4] LUO H Z, WU H X, Zhu Y H. Remarks on Criteria of Prequasi-Invex Functions[J]. Appl Math J Chinese Univ Ser B 2004, 19(3): 335-341.
- [5] YANG X M, YANG X Q, TEO K L. Characterizations and Applications of Prequasi-Invex Functions[J]. J Optim Theory Appl, 2001, 110(3): 645-668.

(责任编辑 黄 颖)