关于不定方程组 $7x^2-5y^2=2$,$24y^2-7z^2=17$ 正整数解的上界*

李 杨
(重庆师范大学 数学与计算机科学学院,重庆 400047)

摘 要 运用Baker法得到不定方程组 $7x^2-5y^2=2$,$24y^2-7z^2=17$ 正整数解的上界,其中 y 的上界为 $12^{18^{393}}$。

关键词 不定方程组;解的上界;Baker方法
中图分类号 O156 **文献标识码** A **文章编号** 1672-6693(2006)03-0033-03

On the Upper Bound of the Positive Integer Solutions of the System of Diophantine Equations $7x^2-5y^2=2$, $24y^2-7z^2=17$

LI Yang
(College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: By Baker's method, the author of this paper has soluted the upper bound of the positive integer solutions of Diophantine equations $7x^2-5y^2=2$, $24y^2-7z^2=17$, and the upper bound for y is $12^{18^{393}}$。

Key words: a system of Diophantine equations; the upper bound of solutions; Baker's method

在不定方程(组)的研究中,整数解绝对值上界的确定是个重要的问题,从理论上讲,一旦知道这一上界,只要把界内的整数代入原方程(组)进行验算,即可得全部整数解。考虑不定方程组

$$\begin{cases}7x^2-5y^2=2\\24y^2-7z^2=17\end{cases}\tag{1}$$

只要能求出其所有的正整数解,即可得到它的一切整数解。记 $S=\{(x,y,z)\mid x,y,z\in\mathbf{Z}$ 且满足(1)式$\}$,$T=\{y\mid(x,y,z)\in S\}$。从理论上讲,如果能求出 T 的上界,将界内的 y 值代入(1)式,就可求出方程组的全部正整数解。称 T 的上界为方程组(1)的正整数解上界。

引理[1] 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 是 $k(k\geqslant 2)$ 个非零代数数,$\alpha(i=1,2,\cdots,k)$ 的次数和高分别不超过 $d(d\geqslant 4)$ 和 $A(A\geqslant 4)$。若存在整数 $b_1,b_2,\cdots,b_k$ 满足 $0<|b_1\lg\alpha_1+b_2\lg\alpha_2+\cdots+b_k\lg\alpha_k|<e^{-\delta H}$,其中 $0<\delta\leqslant 1$,$H=\max(|b_1|,|b_2|,\cdots,|b_k|)$,则 $H<(4^{k^2}\delta^{-1}d^{2k}\lg A)^{(2k+1)^2}$。这里 α 的次数不妨设为 n,指 α 满足一个 n 次整系数代数方程,而不满足任何低于 n 次的整系数代数方程;α 的高不妨设为 h,指 α 所适合的整系数不可约多项式 $a_mx_m+\cdots+a_1x_1+a_0$ 的系数 $a_j(j=0,1,\cdots,m)$ 绝对值的最大值,即 $h=\max(|a_m|,\cdots,|a_0|)$。

这个结论由Baker证明,运用此结论,Baker还给出了某些类型的不定方程整数解绝对值的上界,由于这个突破性的工作,Baker获得1970国际数学家会议的Fields奖。按照Baker的思路来研究不定方程(组)的方法,通常称为Baker方法[2]。方程组(1)式可化为

$$\begin{cases}49x^2-35y^2=14\\168y^2-49z^2=119\end{cases}\tag{2}$$

令 $7x=x'$,$y=y'$,$7z=z'$,则方程组(2)式变为 $\begin{cases}x'^2-35y'^2=14\\z'^2-168'y^2=-119\end{cases}$,即 $\begin{cases}x^2-35y^2=14\\z^2-168y^2=-119\end{cases}$。

* 收稿日期:2005-12-15
资助项目:重庆市教委科研基金项目(No. 010204)
作者简介:李杨(1981-),女,辽宁凤城人,硕士研究生,研究方向为数论。

易知 Pell 方程 $x^2-35y^2=1$ 的基本解为 $6+\sqrt{35}$,不定方程 $x^2-35y^2=14$ 的基本解为 $7+\sqrt{35}$。所以,方程 $x^2-35y^2=14$ 的所有正整数解为

$$x_m+y_m\sqrt{35}=(7+\sqrt{35})(6+\sqrt{35})^m,m\geqslant 0 \quad (3)$$

又因为

$$x_{m+1}+y_{m+1}\sqrt{35}=(x_m+y_m\sqrt{35})(6+\sqrt{35})$$

所以

$$\begin{cases}x_{m+1}=6x_m+35y_m\\ y_{m+1}=x_m+6y_m\end{cases},m=0,1,2,\cdots,x_0=7,y_0=1 \quad (4)$$

不难得出 Pell 方程 $z^2-168y^2=1$ 的基本解为 $13+\sqrt{168}$,不定方程 $z^2-168y^2=-119$ 的基本解为 $7+\sqrt{168}$ 或 $-7+\sqrt{168}$。所以,方程 $z^2-168y^2=-119$ 的所有正整数解为

$$z_n+y_n\sqrt{168}=(7+\sqrt{168})(13+\sqrt{168})^n,n=0,1,2,\cdots \quad (5)$$

或

$$z_n+y_n\sqrt{168}=(-7+\sqrt{168})(13+\sqrt{168})^n,n=0,1,2,\cdots \quad (6)$$

由(3)式得

$$x_m-y_m\sqrt{35}=(7-\sqrt{35})(6-\sqrt{35})^m,m\geqslant 0 \quad (7)$$

由(3)~(7)式得

$$2\sqrt{35}y_m=(7+\sqrt{35})(6+\sqrt{35})^m-(7-\sqrt{35})(6-\sqrt{35})^m$$

类似有

$$2\sqrt{168}y_n=(7+\sqrt{168})(13+\sqrt{168})^n-(7-\sqrt{168})(13-\sqrt{168})^n$$

或

$$2\sqrt{168}y_n=(-7+\sqrt{168})(13+\sqrt{168})^n+(7+\sqrt{168})(13-\sqrt{168})^n$$

令 $y_m=y_n$,得

$$\frac{(7+\sqrt{35})(6+\sqrt{35})^m}{\sqrt{35}}+\frac{(\sqrt{35}-7)(6+\sqrt{35})^{-m}}{\sqrt{35}}=\frac{(7+\sqrt{168})(13+\sqrt{168})^n}{\sqrt{168}}+\frac{(\sqrt{168}-7)(13+\sqrt{168})^{-n}}{\sqrt{168}} \quad (8)$$

或

$$\frac{(7+\sqrt{35})(6+\sqrt{35})^m}{\sqrt{35}}+\frac{(\sqrt{35}-7)(6+\sqrt{35})^{-m}}{\sqrt{35}}=\frac{(-7+\sqrt{168})(13+\sqrt{168})^n}{\sqrt{168}}+\frac{(\sqrt{168}+7)(13+\sqrt{168})^{-n}}{\sqrt{168}} \quad (9)$$

若 $(x,y,z)\in S$,则必存在 m,n,使得 $y=y_n=y_m$,从而使(8)式或(9)式成立。因此,如果求得使(8)式或(9)式成立的 m 的上界,就可通过(4)式求得 y_m 的上界,从而得 T 的上界。

定理1 (i)若(8)式成立,则 $m=n=0$ 或 $m>n$;(ii)若(9)式成立,则 $m=n=2$ 或 $m>n$。

证明 由(3)式,当 $m=0$,$y_m=1$,若(8)式成立,则必有 $y_n=1$。由(5)式算得当 $n=0$ 时,$y_n=1$,且 y_n 随 n 的增大而增大,故只可能有 $n=0$。

当 $m>0$ 时,由(4)式知 $y_m>1$,此时,若(8)式成立,则必有 $y_n>1$,由此有 $n>0$。记

$$P=\frac{(7+\sqrt{35})(6+\sqrt{35})^m}{\sqrt{35}},Q=\frac{(7+\sqrt{168})(13+\sqrt{168})^n}{\sqrt{168}} \quad (10)$$

则 $P>2,Q>1$,且由(8)式得 $P-\frac{2}{7}P^{-1}=Q+\frac{17}{24}Q^{-1}$,于是 $P-Q=\frac{2}{7}P^{-1}+\frac{17}{24}Q^{-1}>0$,因而有 $P>Q$。这样,利用(10)式得

$$\frac{(7+\sqrt{35})(6+\sqrt{35})^m}{\sqrt{35}}>\frac{(7+\sqrt{168})(13+\sqrt{168})^n}{\sqrt{168}}$$

$$(6+\sqrt{35})^m>\frac{(7+\sqrt{168})\sqrt{35}}{\sqrt{168}(7+\sqrt{35})}(13+\sqrt{168})^n$$

$$m\lg(6+\sqrt{35})>\lg 0.7+n\lg(13+\sqrt{168})$$

所以

$$2.478m>-0.349+3.257n$$

$$2.478(m-n)>0.779n-0.349\geqslant 0.43>0,n>0,n\in\mathbf{Z}$$

所以 $m>n$,(i)得证。

(ii)的证明与(i)类似,这里从略。 证毕

定理2 (i)若(8)式成立,且 $m\geqslant 3$,则 $\lg\frac{P}{Q}<0.994\,05P^{-2}$ 若(9)式成立,且 $m\geqslant 3$,则 $\lg\frac{P}{Q_1}<0.994\,05P^{-2}$,这里 $Q_1=\frac{(-7+\sqrt{168})}{\sqrt{168}}(13+$

$\sqrt{168})^n$。

证明　若(8)式成立,且 $m\geqslant 3$,则由定理 1 可知 $n\geqslant 1$,于是由(10)式可知 $P>3\,693$,$Q>39$,从而 $\frac{1}{P}<\frac{1}{3\,693}$,$\frac{1}{Q}<\frac{1}{39}$,则 $Q=P-\frac{2}{7}P^{-1}-\frac{17}{24}Q^{-1}>P-\frac{2}{7\times 3\,693}-\frac{17}{24\times 39}>P-\frac{1}{54}$,故 $Q^{-1}<\frac{54}{54P-1}$。

$P-Q=\frac{2}{7}P^{-1}+\frac{17}{24}Q^{-1}<\frac{2}{7}P^{-1}+\frac{17}{24}\times\frac{54}{54P-1}$,当 $P>3\,693$ 时,通过计算易知 $\frac{54}{54P-1}<1.000\,004P^{-1}$,所以

$P-Q<\frac{2}{7}P^{-1}+\frac{17}{24}\times 1.000\,004\,P^{-1}<0.994\,050\,4P^{-1}$,

于是 $0<\frac{P-Q}{P}<0.994\,050\,4P^{-2}<1$。

根据当 $0<x<1$ 时,$-\lg(1-x)<x+x^2$,得

$$0<\lg\frac{P}{Q}=-\lg\left(1-\frac{P-Q}{P}\right)<-\lg(1-0.994\,050\,4P^{-2})<0.994\,050\,4P^{-2}+(0.994\,050\,4P^{-2})^2=(0.994\,050\,4+0.994\,050\,4P^{-2})P^{-2}<0.994\,050\,4P^{-2}$$

于是(i)成立。

仿照上面的证明过程,易证(ii)。　证毕

定理 3　(i)若(8)式成立,则 $0\leqslant m<18^{393}$,(ii)若(9)式成立,则 $2\leqslant m<18^{393}$。

证明　由于 $P>Q$,

$$\frac{P}{Q}=\frac{\sqrt{168}(7+\sqrt{35})(6+\sqrt{35})^m}{\sqrt{35}(7+\sqrt{168})(13+\sqrt{168})^n},$$

若(8)式成立,且 $m\geqslant 3$,则由定理 2,有

$$0<\lg\frac{P}{Q}=m\lg(6+\sqrt{35})-n\lg(13+\sqrt{168})+\lg\frac{\sqrt{168}(7+\sqrt{35})}{\sqrt{35}(7+\sqrt{168})}<0.994\,050\,4P^{-2}=0.994\,050\,4\times\left[\frac{\sqrt{35}}{7+\sqrt{35}}\right]^2\times\frac{1}{(6+\sqrt{35})^{2m}}<0.208\,55\times\frac{1}{(6+\sqrt{35})^m}<0.208\,55\times\frac{1}{e^m}<e^{-m}$$

令 $\alpha_1=6+\sqrt{35}$,$\alpha_2=13+\sqrt{168}$,$\alpha_3=\frac{\sqrt{168}(7+\sqrt{35})}{\sqrt{35}(-7+\sqrt{168})}$,$\alpha_3{}'=\frac{\sqrt{168}(7+\sqrt{35})}{\sqrt{35}(-7+\sqrt{168})}$,$\alpha_1$ 和 α_2 分别满足 $x^2-12x+1=0$ 和 $x^2-26x+1=0$,且 $x^2-12x+1$ 和 $x^2-26x+1$ 均为整系数不可约多项式,α_3 在四次域上的 3 个共轭根为 $\alpha_1=\frac{\sqrt{168}(7-\sqrt{35})}{-\sqrt{35}(7+\sqrt{168})}$,$\alpha_2=\frac{-\sqrt{168}(7+\sqrt{35})}{\sqrt{35}(7-\sqrt{168})}$,$\alpha_3=\frac{\sqrt{168}(7-\sqrt{35})}{\sqrt{35}(7-\sqrt{168})}$。以这 4 个代数数为解的方程为 $7\,225x^4-40\,800x^3+25\,920x^2+23\,040x+2\,304=0$,且方程左边为一整系数不可约多项式。

由引理及这里 $k=3$,$d=4$,$A=40\,800$,$H=\max(m,n,1)=m$,所以

$$m<[4^{3^2}\times 1\times 4^{2\times 3}\lg 40\,800]^{(2\times 3+1)^2}=[4^{15}\times 10.6]^{49}<18^{393}$$

再注意到当 $m=n=0$ 时,(8)式成立,即得到(i)的结论。

仿照上面的证明过程,注意将 Q 换成 Q_1,在应用本文的引理时将 α_3 换成 $\alpha_3{}'$,可证(ii)成立。证毕

由 $m<18^{393}$ 和等式 $2\sqrt{35}y_m=(7+\sqrt{35})(6+\sqrt{35})^m-(7-\sqrt{35})(6-\sqrt{35})^m$ 可得 $y<12^{18^{393}}$,即 y 的上界为 $12^{18^{393}}$,则不定方程组 $\begin{cases}7x^2-5y^2=2\\24y^2-7z^2=17\end{cases}$ 正整数解的上界可以求得。

参考文献:

[1] BAKER A, DAVANPORT H. The Equations and Quart J Math, 1969, 20(2):129-37.

[2] 柯召,孙琦. 谈谈不定方程[M]. 上海:上海教育出版社,1980. 142-154.

[3] 陈志云. 关于不定方程组的正整数解的上界[J]. 华中师范大学学报(自然科学版),1996,31(3):253-256.

(责任编辑　欧红叶)