# 关于强预不变凸函数的注记*

彭再云, 罗洪林
(重庆师范大学 数学与计算机科学学院, 重庆 400047)

**摘 要**:预不变凸函数是凸函数的一个重要分支,在文献[5]中,作者提出了一类新的广义凸函数——强预不变凸函数并给出了它的一些性质。本文,首先通过对文献[5]中定理条件的减弱,得出相同的结果,而后对其另一结论,作了一个更为简洁的证明,最后还给出了此函数的几个新性质,从而在一定程度上完善了此类广义凸函数。

**关键词**:不变凸集;预不变凸函数;强预不变凸函数
**中图分类号**:O221.1 **文献标识码**:A **文章编号**:1672-6693(2006)03-0036-04

## Technical Note on Characterrizations of Strongly Preinvex Functions

*PENG Zai-yun*, *LUO Hong-lin*
(College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 40047, China)

**Abstract**:Preinvex function is one kind of important functions of convex function. In [5], the authors gave some properties of strongly preinvex functions under a certain set of conditions. In this note, some of these conditions which can be weakened to get the same results, and another simplified proof for a criterion of strongly preinvex functions. At last, some new properties of strongly preinvex functions are obtained.

**Key words**:invex set; preinvex functions; strongly preinvex functions

凸性和广义凸性在数学经济、工程、管理科学和优化理论中扮演着重要角色;有关凸性和广义凸性的研究是数学规划中最重要的方向之一,关于它的讨论已成为这一领域问题的流行趋势。近年来,很多学者在这方面做了大量研究工作。杨新民教授对凸函数极其在规划方面的应用作了深入研究[3,4],Weir 和 Mond[1],Weir 和 Jeyakumar[2] 在凸函数的基础上,定义了预不变凸函数,这类函数是凸函数的推广,而后文献[6]和文献[7]对预拟不变凸函数作了进一步研究。在文献[3]中,作者提出了一类新的广义凸函数——强预不变凸函数并给出了它的一些性质。基于凸性研究的重要性及以上研究,本文首先将文献[3]中定理的条件加以削弱,得出相同的结果;而后对文献[3]中另一命题给出了一个更简单的证明。最后还讨论了强预不变凸函数的两个新的性质,并说明此类广义凸函数的重要意义,从而在一定程度上完善了此类广义凸函数。

## 1 基本定义

**定义 1**[1] 设集合 $K\subseteq \mathbf{R}^n$,如果存在一个向量函数 $\eta:\ \mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 使得 $\forall x,y\in K,\lambda\in[0,1]$,$y+\lambda\eta(x,y)\in K$,则称集合 $K$ 是不变凸集。

**定义 2**[2] 设集合 $K\subseteq \mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的不变凸集,函数 $f:K\to\mathbf{R}$ 如果满足 $f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$,$\forall x,y\in K,\lambda\in[0,1]$,则称函数 $f$ 是预不变凸函数。

**定义 3**[5] 设集合 $K\subseteq \mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta:\ \mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的不变凸集,函数 $f:K\to\mathbf{R}$,如果存在一个常数 $\beta>0$,使得 $\forall x,y\in K,\lambda\in[0,1]$ 满足 $f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2$,则称函数 $f$ 是强预不变凸函数。

---

* 收稿日期:2005-01-21
作者简介:彭再云(1980-),男,重庆人,硕士研究生,研究方向为数学规划与最优化。

**条件 C**[8] 对于向量值函数 $\eta$: $K\times K\to K$,如果 $\forall x,y\in K,\lambda\in[0,1]$,有

$$\eta(y,y+\lambda\eta(x,y))=-\lambda\eta(x,y),$$
$$\eta(y,y+\lambda\eta(x,y))=(1-\lambda)\eta(x,y)$$

则 $\eta$ 称为满足条件 C。

**例 1** 若 $\eta(x,y)=\begin{cases}x-y,(x\geqslant0,y\geqslant0)\\x-y,(x<0,y<0)\\-2-y,(x>0,y\leqslant0)\\2-y,(x\leqslant0,y>0)\end{cases}$

则由文献[8]中的例 2.2,可以知道 $\eta$ 满足条件 C。另外,文献[2]中的例 2.4 也给出了满足条件 C 的函数 $\eta$,于是可以知道满足条件 C 的函数 $\eta$ 是大量存在的。

**条件 D**[8] 设集合 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta$: $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的不变凸集,函数 $f$: $K\to\mathbf{R}$ 如果满足

$$f(y+\eta(x,y))\leqslant f(x),\ \forall x,y\in K$$ 则称 $f$ 满足条件 D。

**例 2** 对函数 $f(x)=(|x|-1)^2$,取 $\eta(x,y)=\begin{cases}x-y,(x\geqslant0,y\geqslant0\text{ 或 }x<0,y<0)\\-x-y,(x\geqslant0,y<0\text{ 或 }x\leqslant0,y>0)\end{cases}$

则由文献[5]可知,$f(x)$ 是关于 $\eta$ 的强预不变凸函数,由此知道所讨论和研究的强预不变凸函数是普遍存在的。

## 2 主要结果

为了证明后面的定理,首先引入下面的引理(见文献[5]的引理 1)。

**引理 1** 设集合 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta$: $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的不变凸集,$\eta$ 满足条件 C,如果函数 $f$: $K\to\mathbf{R}$ 满足条件 D,存在常数 $\lambda\in(0,1)$ 和 $\beta>0$ 使得 $f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2$,$\forall x,y\in K$,则集合 $A=\{\alpha\in[0,1]\mid f(y+\alpha\eta(x,y))\leqslant\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)-\beta\alpha(1-\alpha)\|\eta(x,y)\|^2\}$,$\forall x,y\in K$ 在 $[0,1]$ 区间稠密。

下面的结果在文献[5]中已经证明,见文献[5]中的定理 5。

**定理 2** 设集合 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta$: $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的开不变凸集,$\eta$ 满足条件 C,如果函数 $f$: $K\to\mathbf{R}$ 在 $K$ 上是上半连续的且满足条件 D,则 $f$ 在 $K$ 上是关于 $\eta$ 的强预不变凸函数当且仅当存在常数 $\lambda\in(0,1)$ 和 $\beta>0$,使得 $f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2$,$\forall x,y\in K$。

现在,作者将以上定理改进如下。

**定理 3** 设集合 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta$: $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的不变凸集,$\eta$ 满足条件 C,如果函数 $f$: $K\to\mathbf{R}$ 在 $K$ 上是上半连续的且满足条件 D,则 $f$ 在 $K$ 上是关于 $\eta$ 的强预不变凸函数当且仅当存在常数 $\lambda\in(0,1)$ 和 $\beta>0$,使得 $f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2$,$\forall x,y\in K$。

**证明** 必要性直接由 $f$ 是关于 $\eta$ 的强预不变凸函数得到,下证充分性。

由引理 2.1,有

$A=\{\alpha\in[0,1]\mid f(y+\alpha\eta(x,y))\leqslant\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)-\beta\alpha(1-\alpha)\|\eta(x,y)\|^2,\forall x,y\in K\}$ 在 $[0,1]$ 中稠密。显然,$0,1\in A$。则 $\forall\bar{\alpha}\in(0,1)$,$\exists\ \{\alpha_n\}\subseteq(0,1)\cap A$,使得 $\alpha_n<\bar{\alpha}$,$\forall n\in N$,且 $\alpha_n\to\bar{\alpha}(n\to+\infty)$,任意给定 $x,y\in K$,记 $z=y+\bar{\alpha}\eta(x,y)$。对 $\forall n$,定义

$$y_n=y+\frac{\bar{\alpha}-\alpha_n}{1-\alpha_n}\eta(x,y) \tag{1}$$

则 $y_n\to y(n\to+\infty)$。又 $0<\alpha_n<\bar{\alpha}<1$,有 $0<\dfrac{\bar{\alpha}-\alpha_n}{1-\alpha_n}<1$,$K$ 是关于 $\eta$ 的不变凸集,因此 $y_n\in K$。由(1)式及条件 C,得到

$$y_n+\alpha_n\eta(x,y_n)=y+\frac{\bar{\alpha}-\alpha_n}{1-\alpha_n}\eta(x,y)+\alpha_n\eta\left(x,y+\frac{\bar{\alpha}-\alpha_n}{1-\alpha_n}\eta(x,y)\right)$$

$$=y+[\frac{\bar{\alpha}-\alpha_n}{1-\alpha_n}+\alpha_n(1-\frac{\bar{\alpha}-\alpha_n}{1-\alpha_n})]\eta(x,y)=y+\bar{\alpha}\eta(x,y)=z \tag{2}$$

由 $f$ 在 $K$ 的上半连续性，$\forall\varepsilon>0,\exists N>0$，当 $n>N$ 时有

$$f(y_n)\leqslant f(y)+\varepsilon \tag{3}$$

故由(2)、(3)式及 $\alpha_n\in A$，有

$$f(z)=f(y_n+\alpha_n\eta(x,y_n))\leqslant\alpha_nf(x)+(1-\alpha_n)f(y_n)-\beta\alpha_n(1-\alpha_n)\|\eta(x,y_n)\|^2\leqslant$$
$$\alpha_nf(x)+(1-\alpha_n)f[(y)+\varepsilon]-\beta\alpha_n(1-\alpha_n)\|\eta(x,y_n)\|^2\to$$
$$\bar{\alpha}f(x)+(1-\bar{\alpha})f[(y)+\varepsilon]-\beta\bar{\alpha}(1-\bar{\alpha})\|\eta(x,y)\|^2(n\to+\infty)。$$

当 $\varepsilon>0$ 充分小时，从而有 $f(z)\leqslant\bar{\alpha}f(x)+(1-\bar{\alpha})f(y)-\beta\bar{\alpha}(1-\bar{\alpha})\|\eta(x,y)\|^2$，故 $\bar{\alpha}\in A$，即存在常数 $\beta>0$，使得

$$f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2,\forall x,y\in K,\lambda\in[0,1]$$

所以 $f$ 是关于 $\eta$ 的强预不变凸函数。　　证毕

注 1　从定理 3 可知定理 2 中的开集条件去掉后也能得到相同的结果，而且定理 3 也给出了不同于定理 2 的另外的证明方法。

下面列出文献[3]中的另一个结果，见文献[5]的定理 6。事实上，可用更简单的方法证明该结论。

定理 4　设集合 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta$: $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的不变凸集，$\eta$ 满足条件 C，如果函数 $f$: $K\to\mathbf{R}$ 在 $K$ 上是下半连续的且满足条件 D，则 $f$ 在 $K$ 上是关于 $\eta$ 的强预不变凸函数当且仅当存在常数 $\beta>0$，使得 $\forall x,y\in K,\exists\lambda\in(0,1)$，满足 $f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2$。

证明　由引理 2.1 知 $\forall x,y\in K$，$A$ 在$[0,1]$中稠密，显然，$0,1\in A$，则 $\forall\bar{\alpha}\in(0,1)$，$\exists\{\alpha_n\}\subseteq(0,1)\cap A$，使得 $\alpha_n\to\bar{\alpha},n\to+\infty$。又 $f(y+\alpha_n\eta(x,y))\leqslant\alpha_nf(x)+(1-\alpha_n)f(y)-\beta\alpha_n(1-\alpha_n)\|\eta(x,y)\|^2$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\inf f(y+\alpha_n\eta(x,y))\leqslant\bar{\alpha}f(x)+(1-\bar{\alpha})f(y)-\beta\bar{\alpha}(1-\bar{\alpha})\|\eta(x,y)\|^2 \tag{4}$$

由 $f$ 在 $K$ 上的下半连续性，有

$$f(y+\bar{\alpha}\eta(x,y))\leqslant\lim_{n\to\infty}\inf f(y+\alpha_n\eta(x,y)) \tag{5}$$

由(4)式和(5)式有 $f(y+\bar{\alpha}\eta(x,y))\leqslant\bar{\alpha}f(x)+(1-\bar{\alpha})f(y)-\beta\bar{\alpha}(1-\bar{\alpha})\|\eta(x,y)\|^2$，故 $\bar{\alpha}\in A$，即存在常数 $\beta>0$，使得

$$f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2,\forall x,y\in K,\lambda\in(0,1)$$

所以 $f$ 是关于 $\eta$ 的强预不变凸函数。　　证毕

下面给出关于强预不变凸函数的两个新的性质。

定理 5　$f,g$: $K\to\mathbf{R}$ 是两个关于 $\eta$ 的强预不变凸函数，则 $f+g$ 也是关于 $\eta$ 的强预不变凸函数。

证明　因为 $f,g$ 是关于 $\eta$ 的强预不变凸函数。故存在常数 $\beta_1>0,\beta_2>0$，使得 $\forall x,y\in K,\lambda\in(0,1)$，有

$$f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)-\beta_1\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2,$$
$$g(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant\lambda g(x)+(1-\lambda)g(y)-\beta_2\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2。$$

所以，$(f+g)(y+\lambda\eta(x,y))=f(y+\lambda\eta(x,y)+g(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant$

$$\lambda[f(x)+g(x)]+(1-\lambda)[f(y)+g(y)]-(\beta_1+\beta_2)\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2=$$
$$\lambda(f+g)(x)+(1-\lambda)(f+g)(y)-(\beta_1+\beta_2)\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2。$$

故 $f+g$ 是关于 $\eta$ 的强预不变凸函数。　　证毕

记对于 $x\in K$ 的求 $f(x)$ 的最小值的规划问题为$(P)$。

定理 6　设非空集合 $K$ 是关于 $\eta$: $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的不变凸集，函数 $f$: $K\to\mathbf{R}$ 是在 $K$ 上关于 $\eta$ 的强预不变凸函数。如果 $\bar{x}$ 是关于规划问题$(P)$的局部最优点，则 $\bar{x}$ 一定是关于规划问题$(P)$的全局最优点。

证明　如果 $\bar{x}$ 是关于规划问题$(P)$的局部最优点，于是存在关于 $\bar{x}$ 的一个领域 $N_\varepsilon(\bar{x})$，使得

$$f(\bar{x})\leqslant f(x),\forall x\in k\cap N_\varepsilon(\bar{x}) \tag{6}$$

假设 $\bar{x}$ 不是规划问题$(P)$的全局最优点，则必存在 $\hat{x}\in k$，使得

$$f(\hat{x}) \leqslant f(\bar{x}) \tag{7}$$

因为 $f$ 是在 $K$ 上关于 $\eta$ 的强预不变凸函数,故存在常数 $\beta>0$ 使得 $\forall x,y \in k, \lambda \in [0,1]$ 有

$$f(\bar{x}+\lambda\eta(\hat{x},\bar{x})) \leqslant \lambda f(\hat{x}) + (1-\lambda)f(\bar{x}) - \beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(\hat{x},\bar{x})\|^2 < \lambda f(\hat{x}) + (1-\lambda)f(\bar{x}) < f(\bar{x}) \tag{8}$$

当 $\lambda>0$ 充分小时,有

$$\bar{x}+\lambda\eta(\hat{x},\bar{x}) \in K \cap N_\varepsilon \bar{x} \tag{9}$$

于是(8)、(9)式与(6)式矛盾,假设不成立。

所以 $\bar{x}$ 一定是关于规划问题($P$)的全局最优点。 证毕

注 2　定理 6 一方面可以看作是强预不变凸函数的一个很好的性质,同时它也充分表明了强预不变凸函数在数学规划中有其非常重要的意义和地位。

## 参考文献:


[1] WEIR T,MOND B. Preinvex Functions in Multiple Objective Optimizatio[J]. J Math Anal Appl,1988,136:29-38.

[2] MOHAN S R,NEOGY S K. On Invex Sets and Preinvex Functions[J]. J Math Anal Appl,1995,189:901-908.

[3] 杨新民. 凸函数的两个充分性条件[J]. 重庆师范学院学报(自然科学版),1994,11(4):9-12.

[4] 杨新民. 多目标分式规划解的一些必要条件[J]. 重庆师范学院学报(自然科学版),1997,14(2):8-12.

[5] 颜丽佳,刘芙萍. 强预不变凸函数[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2005,22(1):11-15.

[6] YANG X M,LI D. On Properties of Preinvex Functions[J]. J Math Anal Appl,2001,256:229-241.

[7] YANG X M,LI D. Semistrictly Preinvex Functions[J]. J Math Anal Appl,2001,258:287-308.

[8] YANG X M,YANG X Q,TEO K L. Generalized Invexity and Invariant Monotonicicy[J]. J Optim Theory Appl,2003,117:607-625.


(责任编辑　游中胜)