Banach 空间中一类含 H-增生算子的新型广义非线性混合似变分包含组*

张 旭[1,2]，叶志强[2]
（1. 重庆师范大学 初等教育学院，重庆 400700；2. 西南大学 数学与统计学院，重庆 400715）

摘 要：引入并研究了一类含 H-增生算子的广义线性混合似变分包含组。应用关于 H-增生算子的预解算子技巧和不动点理论，这类变分包含组解的存在性得到了证明。本文同时提出了一种新的迭代算法来计算这类变分组的近似解，并研究了这类算法的收敛性。本文所得结果是新的，并推广和统一了近期文献中的一些相关结论。

关键词：广义非线性混合似变分包含组；H-增生算子；预解算子；算法；Banach 空间
中图分类号：O177.91 **文献标识码**：A **文章编号**：1672-6693（2006）04-0006-04

A New System of Generalized Nonlinear Mixed Variational-like Inclusions Involving H-Accretive Operators in Banach Spaces

ZHANG Xu[1,2]，*YE Zhi-qiang*[2]
（1. College of Elementary Education，Chongqing Normal University，Chongqing 400700；
2. School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China）

Abstract：In this paper，we introduce and study a new system of generalized nonlinear mixed variational-like inclusions involving H-accretive operators. By applying resolvent operator technique for H-accretive operators and fixed point technique，the existence of solutions of the system of generalized nonlinear mixed variational-like inclusions involving H-accretive mappings is proved. A novel and innovative algorithm to compute approximate solutions is suggested and analyzed. The convergence criteria is also given. The results are new，and unify and generalize the corresponding conclusions in recent literatures.

Key words：system of generalized nonlinear mixed variational-like inclusions；H-accretive operators；resolvent operator；algorithm；Banach spaces

变分包含是传统的变分不等式的重要推广，其在物理学、优化及控制、非线性规划、经济学等许多领域都有重要应用。因此，近年来多种开工的变分包含被推广和研究[1~11]。在近期的文献[1]中，方和黄引入了一类称为 H- 增生算子的广义增生算子，其为 m- 增生算子、经典的增生算子、H- 单调算子和极大单调算子提供了一致的框架[2,10,11]。利用关于 H- 增生算子的预解算子技巧，他们讨论了一类变分包含。

本文引入并研究了一类新的含 H- 增生算子的广义非线性混合似变分包含组。应用关于 H- 增生算子的预解算子技巧和不动点理论，这类变分包含组解的存在性得到了证明。同时提出了一种新的迭代算法来计算这类变分组的近似解，并研究了这类算法的收敛性，推广了一些已知的关于变分包含的结果和算法[4~6]。

1 预备知识

令 X 是实的 Banach 空间，其范数和对偶分别记成 $\|\cdot\|$ 与 X^*，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为 X 与 X^* 间的广义对偶对。又设 2^X 表示 X 的所有非空子集组成的集族，I 是 X 上的恒等映射。广义对偶映射 $J_q: X\to 2^{X^*}$ 定义为对 $\forall x\in X$，有 $J_q(x)=\{f^*\in X^*:\langle x,f^*\rangle=\|x\|^q,\|f^*\|=\|x\|^{q-1}\}$。这里 $q>1$ 是一常数。特别地，J_2 是通常的

* 收稿日期：2006-06-28
资助项目：国家自然科学基金资助项目（No. 10471113）；重庆市科委自然科学基金资助项目（No. 2005BB2097）
作者简介：张旭（1978-），女，四川南充人，硕士研究生，研究方向为生物数学及泛函分析。

正规对偶映射。显然,J_q 是单值的当且仅当 X^* 是严格凸的。在下文中,除非特别声明,令 X 是一个满足 J_q 的单值的实的 Banach 空间,$\mathcal{H}$是一个 Hilbert 空间。如果 $X = \mathcal{H}$,那么 J_2 就为$\mathcal{H}$中的恒等映射。

设 X 是 Banach 空间。X 称为一致光滑的,若它的光滑模 $\rho_X(\tau) = \sup\{\frac{1}{2}(\|x+y\| + \|x-y\| - 1):\|x\| \leqslant 1, \|y\| \leqslant \tau\}$ 满足 $\lim\limits_{\tau\to\infty}\frac{\rho_X(\tau)}{\tau} = 0$。由文献[12]知,$X$ 是一致光滑的,当且仅当 J_q 是单值的且在 X 的有界子集上一致连续。对实数 $1 < p \leqslant 2$,Banach 空间 X 称为 q 一致光滑的,如果 $\rho_X(\tau) \leqslant d\tau^q, \forall \tau > 0$,其中 $d > 0$ 是常数。由文献[13]可知,对 Hilbert 空间$\mathcal{H}$,$\rho_{\mathcal{H}}(\tau) = (1+\tau^2)^{\frac{1}{2}} - 1$,故$\mathcal{H}$是 2 一致光滑的。Xu 在文献[3]中,已给出了 q 一致光滑 Banach 空间的如下表征。

引理 1 设 X 设是实的一致光滑 Banach 空间,那么 X 是 q 一致光滑的,当且仅当存在常数 $c_q > 0$,使得对于任意 $x, y \in X$,有 $\|x+y\|^q \leqslant \|x\|^q + q\langle y, J_q(x)\rangle + c_q\|y\|^q$ 成立。

下面引入一些后面要用到的内容。

定义 1[1] 令 $T, H: X \to X$ 是两个单值算子。T 被称为

1)增生的,如果$\langle Tx - Ty, J_q(x-y)\rangle \geqslant 0, \forall x, y \in X$ 成立;

2)严格增生的,如果$\langle Tx - Ty, J_q(x-y)\rangle \geqslant 0, \forall x, y \in X$ 成立,而且等号成立,当且仅当 $x = y$ 成立;

3)强增生的,如果存在常数 $r \geqslant 0$,使得$\langle Tx - Ty, J_q(x-y)\rangle \geqslant r\|x-y\|^q, \forall x, y \in X$ 成立;

4)相对于 H 强增生的,如果存在常数 $\gamma > 0$,使得$\langle Tx - Ty, J_q(H(x) - H(y))\rangle \geqslant \gamma\|x-y\|^q, \forall x, y \in X$ 成立;

5)Lipschitz 连续的,如果存在常数 $s > 0$,使得 $\|Tx - Ty\| \leqslant s\|x-y\|, \forall x, y \in X$ 成立。

定义 2[1] 多值算子 $M: X \to 2^X$ 被称为

1)增生的,如果对于 $\forall x, y \in X$,有$\langle u - v, J_q(x-y)\rangle \geqslant 0, \forall x, y \in X, u \in M(x), v \in M(y)$ 成立;

2)m-增生的,如果 M 是增生的,而且对于任意 $\lambda > 0$,$(I + \lambda M)(X) = X$ 都成立。这里 I 表示 X 上的恒等映射。

注 1 如果 $X = \mathcal{H}$,那么由定义 1 和定义 2,可以得到相应的单调、严格单调、强单调、相对于 H 强单调,以及极大单调的定义。

定义 3[1] 令 $H: X \to X$ 是单值算子,$M: X \to 2^X$ 是多值算子,称 M 是 H-增生的,如果 M 是增生的,且对于任意 $\lambda > 0$,$(H + \lambda M)(X) = X$ 成立。

注 2 如果 $H = I$,那么定义 3 退化为 m-增生算子的定义 如果 $X = \mathcal{H}, H = I$,那么定义 3 就退化为极大单调算子的定义。

定义 4[1] 令 $H: X \to X$ 为严格增生算子,$M: X \to 2^X$ 为 H-增生算子。关于 H 和 M 的预解算子 $R_{M,\lambda}^H: X \to X$ 定义为 $R_{M,\lambda}^H(u) = (H + \lambda M)^{-1}(u), \forall u \in X$。

定理 1[1] 令 $H: X \to X$ 为关于常数 r 的强增生算子,$M: X \to 2^X$ 为 H-增生算子。那么预解算子 $R_{M,\lambda}^H: X \to X$ 关于常数$\frac{1}{r}$Lipschitz 连续,即 $\|R_{M,\lambda}^H(u) - R_{M,\lambda}^H(v)\| \leqslant \frac{1}{r}\|u - v\|, \forall u, v \in X$。

2 主要结论

本节首先引入了 Banach 空间中一类含 H-增生算子的广义非线性混合似变分包含组。进而,提出了一种新的迭代算法,并证明了这类算法产生的迭代序列,强收敛到这类广义非线性混合似变分包含组的解。

令 $H, T, S: X \to X$ 为单值算子,$M, N: X \to 2^X$ 为两个多值算子。又令 $g: X \to X$ 为强增生单值算子。考虑如下广义非线性混合似变分包含组问题 求$(x, y) \in X \times X$,使得

$$0 \in Hg(x) - Hg(y) + \rho(S(y) + M(g(x))), 0 \in Hg(y) - Hg(x) + \gamma(T(x) + N(g(y))) \quad (1)$$

成立,这里 $\rho > 0$ 和 $\gamma > 0$ 为两个常数。

下面给出(1)式的一些特例。

1)如果 $H \equiv I$,H-增生算子 M, N 退化为 m-增生算子,那么(1)式等价于求$(x, y) \in X \times X$ 满足

$$0 \in g(x) - g(y) + \rho(S(y) + M(g(x))), 0 \in g(y) - g(x) + \gamma(T(x) + N(g(y)))。\quad (2)$$

上式被称为广义非线性混合变分包含组。

2) 如果 $X = \mathcal{H}$ 是 Hilbert 空间,$\rho = \gamma$,$M \equiv N$,$g \equiv I$ 恒等算子,对于任意 $u \in \mathcal{H}$ 都有 $S(u) = T(u)$,而且 $x = y$,那么(2) 式等价于,求 $x \in \mathcal{H}$ 满足

$$0 \in T(x) + M(x) \tag{3}$$

这里 M 是 Hilbert 空间中的 H- 单调算子,这个问题在文献[4] 中被讨论过。

3) 如果 $X = \mathcal{H}$ 是 Hilbert 空间,$M = \partial\varphi_1$,$N = \partial\varphi_2$,这里 $\varphi_1,\varphi_2: \mathcal{H} \to (\mathbf{R} \cup +\infty)$ 为两个真凸下半连续泛函,那么(2) 式退化为,求 $(x^*,y^*) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ 满足

$$\begin{aligned}&\langle \rho S(y^*) + x^* - y^*, x - x^* \rangle \geqslant \rho\varphi_1(x^*) - \rho\varphi_1(x), \forall x \in \mathcal{H},\\ &\langle \gamma T(x^*) + y^* - x^*, x - y^* \rangle \geqslant \gamma\varphi_2(y^*) - \gamma\varphi_2(x), \forall x \in \mathcal{H},\end{aligned} \tag{4}$$

上式被称为广义非线性混合变分不等式组。

4) $\varphi_1 = \varphi_2 = \delta_k$($\delta_k$ 为非空闭凸子集 K 的指示函数),那么(4) 式退化为,求 $(x^*,y^*) \in K \times K$ 满足

$$\langle \rho S(y^*) + x^* - y^*, x - x^* \rangle \geqslant 0, \forall x \in K, \langle \gamma T(x^*) + y^* - x^*, x - y^* \rangle \geqslant 0, \forall x \in K \tag{5}$$

上式被称非线性变分不等式组,Verma 在文献[5] 中讨论过。

5) 若 $x^* = y^*$,而且 $S(u) = T(u)$,$\forall u \in H$,则(5) 式退化为,求 $x^* \in K$ 满足 $\langle S(x^*), x - x^* \rangle \geqslant 0$,$\forall x \in K$。此式即为经典的变分不等式,Stampacchia 在文献[6] 中引入并研究。

引理 2　$(x,y) \in X \times X$ 为(1) 式的解,当且仅当,$(x,y) \in X \times X$ 使得

$$g(x) = R^H_{M,\rho}[H(g(y)) - \rho S(y)], g(y) = R^H_{N,\gamma}[H(g(x)) - \gamma T(x)],$$

成立,这里 $R^H_{M,\rho}(u) = (H + \rho M)^{-1}(u)$,$\forall u \in H$,$R^H_{N,\gamma}(u) = (H + \gamma N)^{-1}(u)$,$\forall u \in H$,$\rho > 0$,$\gamma > 0$ 为两个常数。

此引理可由 $R^H_{M,\rho}$ 和 $R^H_{N,\gamma}$ 的定义直接得到。

算法 1　对于任意给定的 $x_0 \in X$,$y_0 \in X$,由以下迭代过程计算序列 $\{x_n\}$,$\{y_n\}$:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n - g(x_n) + R^H_{M,\rho}[H(g(y_n)) - \rho S(y_n)],\\ y_{n+1} &= y_n - g(y_n) + R^H_{N,\gamma}[H(g(x_n)) - \gamma T(x_n)], n = 0,1,2,\cdots\end{aligned} \tag{6}$$

这里的 $\rho > 0$ 和 $\gamma > 0$ 为两个常数。

定理 2　令 X 为 q 一致光滑 Banach 空间,$g: X \to X$ 分别关于常数 σ,ζ 强增生和 Lipschitz 连续。又令 S,$T: X \to X$ 分别关于常数 λ_S,λ_T Lipschitz 连续,而且 S,$T: X \to X$ 相对于 g 分别关于常数 α_S,α_T 强增生。再令 $H: X \to X$ 分别关于常数 r 和 τ 是强增生和 Lipschitz 连续的。设 M,$N: X \to 2^X$ 为 H- 增生算子。如果存在常数 $\rho > 0$,$\gamma > 0$,满足

$$0 < (1 - q\sigma + c_q\zeta^q)^{\frac{1}{q}} + \frac{1}{r}\zeta(1 - qr + c_q\tau^q)^{\frac{1}{q}} + \frac{1}{r}(\zeta^q - q\gamma\alpha_T + c_q\gamma^q\lambda_T)^{\frac{1}{q}} < 1 \tag{7}$$

和

$$0 < (1 - q\sigma + c_q\zeta^q)^{\frac{1}{q}} + \frac{1}{r}\zeta(1 - qr + c_q\tau^q)^{\frac{1}{q}} + \frac{1}{r}(\zeta^q - q\rho\alpha_S + c_q\rho^q\lambda_S)^{\frac{1}{q}} < 1 \tag{8}$$

那么存在 $(x^*,y^*) \in X \times X$ 为(1) 式的解。而且,算法 1 产生的序列 $\{x_n\}$,$\{y_n\}$ 分别强收敛到 x^*,y^*。

证明　由算法 1 和定理 1,可得

$$\begin{aligned}&\| x_{n+1} - x_n \| = \| x_n - g(x_n) + R^H_{M,\rho}[H(g(y_n)) - \rho S(y_n)] - x_{n-1} + g(x_{n-1}) - R^H_{M,\rho}[H(g(y_{n-1})) - \rho S(y_{n-1})] \| \leqslant\\ &\| x_n - g(x_n) - x_{n-1} + g(x_{n-1}) \| + \| R^H_{M,\rho}[H(g(y_n)) - \rho S(y_n)] - R^H_{M,\rho}[H(g(y_{n-1})) - \rho S(y_{n-1})] \| \leqslant\\ &\| x_n - g(x_n) - x_{n-1} + g(x_{n-1}) \| + \frac{1}{r}\| H(g(y_n)) - \rho S(y_n) - H(g(y_{n-1})) + \rho S(y_{n-1}) \| \leqslant \| x_n - g(x_n) - x_{n-1} + g(x_{n-1}) \| +\\ &\frac{1}{r}\| H(g(y_n)) - H(g(y_{n-1})) - g(y_n) + g(y_{n-1}) \| + \frac{1}{r}\| g(y_n) - g(y_{n-1}) - \rho S(y_n) + \rho S(y_{n-1}) \|\end{aligned} \tag{9}$$

因为 g 分别关于常数 σ,ζ 强增生和 Lipschitz 连续,由引理 1 可得

$$\begin{aligned}\| x_n - g(x_n) - x_{n-1} + g(x_{n-1}) \|^q &= \| x_n - x_{n-1} \|^q + c^q \| g(x_n) - g(x_{n-1}) \|^q -\\ q\langle g(x_n) - g(x_{n-1}), J_q(x_n - x_{n-1}) \rangle &\leqslant (1 - q\sigma + c_q\zeta^q) \| x_n - x_{n-1} \|^q\end{aligned} \tag{10}$$

因为 H 分别关于常数 r 和 τ 是强增生和 Lipschitz 连续的,g 关于常数 ζ 是 Lipschitz 连续,应用引理 1 可得

$$\| Hg(y_n) - Hg(y_{n-1}) - g(y_n) + g(y_{n-1}) \|^q = \| g(y_n) - g(y_{n-1}) \|^q + c^q \| Hg(y_n) - Hg(y_{n-1}) \|^q - q\langle Hg(y_n) -$$

$$Hg(y_{n-1}),J_q(g(y_n)-g(y_{n-1}))\rangle \leqslant (1-qr+c_q\tau^q)\|g(y_n)-g(y_{n-1})\|^q \leqslant \zeta^q(1-qr+c_q\tau^q)\|y_n-y_{n-1}\|^q \quad (11)$$

因为 S 关于常数 λ_SLipschitz 连续,相对于 g 关于常数 α_S 强增生,并且 g 关于常数 ζ 是 Lipschitz 连续,于是由引理1可得

$$\|g(y_n)-g(y_{n-1})-\rho S(y_n)+\rho S(y_{n-1})\|^q = \|g(y_n)-g(y_{n-1})\|^q + c^q\rho^q\|S(y_n)-S(y_{n-1})\|^q - q\rho\langle S(y_n)-S(y_{n-1}),J_q(g(y_n)-g(y_{n-1}))\rangle \leqslant (\zeta^q-q\rho\alpha_S+c_q\rho^q\lambda_S)\|y_n-y_{n-1}\|^q \quad (12)$$

根据(9)~(12)式,可得

$$\|x_{n+1}-x_n\| \leqslant (1-q\sigma+c_q\zeta^q)^{\frac{1}{q}}\|x_n-x_{n-1}\| + \frac{1}{r}[\zeta(1-qr+c_q\tau^q)^{\frac{1}{q}}+(\zeta^q-q\rho\alpha_S+c_q\rho^q\lambda_S)^{\frac{1}{q}}]\|y_n-y_{n-1}\| \quad (13)$$

类似地,可得

$$\|y_{n+1}-y_n\| \leqslant (1-q\sigma+c_q\zeta^q)^{\frac{1}{q}}\|y_n-y_{n-1}\| + \frac{1}{r}[\zeta(1-qr+c_q\tau^q)^{\frac{1}{q}}+(\zeta^q-q\gamma\alpha_T+c_q\gamma^q\lambda_T)^{\frac{1}{q}}]\|x_n-x_{n-1}\| \quad (14)$$

现由(13)、(14)式可推得

$$\|x_{n+1}-x_n\|+\|y_{n+1}-y_n\| \leqslant \left\{(1-q\sigma+c_q\zeta^q)^{\frac{1}{q}}+\frac{1}{r}\zeta(1-qr+c_q\tau^q)^{\frac{1}{q}}+\frac{1}{r}(\zeta^q-q\gamma\alpha_T+c_q\gamma^q\lambda_T)^{\frac{1}{q}}\right\}\|x_n-x_{n-1}\| + \left\{(1-q\sigma+c_q\zeta^q)^{\frac{1}{q}}+\frac{1}{r}\zeta(1-qr+c_q\tau^q)^{\frac{1}{q}}+\frac{1}{r}(\zeta^q-q\rho\alpha_S+c_q\rho^q\lambda_S)^{\frac{1}{q}}\right\}\|y_n-y_{n-1}\| + \omega(\|x_n-x_{n-1}\|+\|y_n-y_{n-1}\|) \quad (15)$$

这里

$$\omega = \max\left\{(1-q\sigma+c_q\zeta^q)^{\frac{1}{q}}+\frac{1}{r}\zeta(1-qr+c_q\tau^q)^{\frac{1}{q}}+\frac{1}{r}(\zeta^q-q\gamma\alpha_T+c_q\gamma^q\lambda_T)^{\frac{1}{q}},\ (1-q\sigma+c_q\zeta^q)^{\frac{1}{q}}+\frac{1}{r}\zeta(1-qr+c_q\tau^q)^{\frac{1}{q}}+\frac{1}{r}(\zeta^q-q\rho\alpha_S+c_q\rho^q\lambda_S)^{\frac{1}{q}}\right\} \quad (16)$$

由(7)、(8)式,可知 $0<\omega<1$。于是,由(16)式可知 $\{x_n\}$,$\{y_n\}$ 为 X 中的 Cauthy 列。因此,存在 $x^*,y^*\in X$,使得 $x_n\to x^*(n\to+\infty)$ 和 $y_n\to y^*(n\to+\infty)$。因为 $H,S,T,g,R_{M,\rho}^H,R_{N,\gamma}^H$ 都是连续的,则

$$g(x^*) = R_{M,\rho}^H[H(g(y^*))-\rho S(y^*)],$$
$$g(y^*) = R_{N,\gamma}^H[H(g(y^*))-\gamma T(x^*)]$$

成立。由引理2,可得 $x^*,y^*\in X$ 为(1)式的解。 证毕

注3 变分包含组问题(1)式,不但在形式上推广了文献[4~6]中的变分包含或变分不等式,而且将讨论的空间拓宽到了 Banach 空间。

参考文献:

[1] FANG Y P, HUANG N J. *H*-Accretive Operators and Resolvent Operator Technique for Solving Variational Inclusions in Banach Spaces[J]. Applied Mathematics Letters, 2004, 17: 647-653.

[2] FANG Y P, HUANG N J. *H*-monotone Operator and Resolvent Operator Technique for Variational Inclusions[J]. Appl Math Comput, 2003, 145: 795-803.

[3] XU H K. Inequalities in Banach Spaces with Applications[J]. Nonlinear Anal, 1991, 16(12): 1127-1138.

[4] FANG Y P, HUANG N J. *H*-Monotone Operator and Resolvent Operator Technique for Variational Inclusions[J]. Appl Math Comput, 2003, 145: 795-803.

[5] VERMA R U. Projection Methods, Algorithms, and a New System of Nonlinear Variational Inequalities[J]. Comput Math Appl, 2001: 41(7/8): 1025-1031.

[6] STAMPACCHIA G. Formes Bilineaires Coercivites Sur Les Ensembles Convexes[J]. C R Acad Paris, 1964, 258: 4413-4416.

[7] GIANNNESSI F, MAUGERI A. Variational Inequalities and Network Equilibrium Problems[M]. NewYork: Plenum, 1995.

[8] DING X P. Algorithms of Solutions for Completely Generalized Mixed Implicit Quasi-variational Inclusions[J]. Appl Math Comput, 2004, 148: 47-66.

[9] DING X P, LUO C L. Perturbed Proximal Point Algorithms for Generalized Quasi-variational-like Inclusions[J. J Comput Appl Math, 2000, 210: 153-165.

页)

(上接 9 页)

[10] CHANG S S. Variational Inequality and Complementarity Problem Theory with Applications[M]. Shanghai: Shanghai Scientific and Tech Literature, 1991.

[11] NOOR M A. Some Developments in General Variational Inequalities[J]. Applied Mathematics and Computation, 2004,152: 197-277.

[12] XU Z B, ROACH G F. Characteristic Inequalities of Uniformly Convex and Uniformly Smooth Banach Spaces[J]. J Math Analysis Applic, 1991,157:189-210.

[13] DIESTEL J. Geometry of Banach Spaces-selected Topics, Lecture Notes in Mathematics[M]. NewYork: Springer-Verlag, 1975.

(责任编辑　黄　颖)