L-拓扑空间中的 p-良紧性*

马保国,王延军,姜金平
(延安大学 数学与计算机科学学院,陕西 延安 716000)

摘 要:首先讨论了 L-拓扑空间中的预开集、预半开集等概念,然后利用这些概念在 L-拓扑空间中提出了 p-(ps-)良紧集的概念,研究了它们的基本特征,讨论了它们的一些基本性质。

关键词:L-拓扑空间;预开集;预半开集;p-(ps-)良紧集;α-p(α-ps)远域族
中图分类号:O189.1 **文献标识码**:A **文章编号**:1672-6693(2006)04-0010-05

The p-N-compactness in L-fuzzy Topological Spaces

MA Bao-guo, WANG Yan-jun, JIANG Jin-ping
(College of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, 716000, China)

Abstract: In this paper, the notions of preopen sets and pre-semiopen sets are introduced in L-topological spaces. Using these notions, the concept of p-(ps-) N-compact sets is presented, and its properties are discussed.

Key words: L-topological space; preopen sets; pre-semiopen sets; p-(ps-) N-compact sets; α-p(α-ps) remoteneighborhood family

1 预备知识

模糊紧性理论是 L-fuzzy 拓扑学中最重要的研究内容之一,许多学者对其进行了一系列的研究,特别是王国俊教授提出的良紧性[1] 概念,由于它充分反映了模糊拓扑层次结构的特点,保持了一般拓扑空间中紧性的各种基本性质,因而被国内外学者广泛采纳。本文在引入并讨论 L-fuzzy 预开集、预半开集等概念的基础上,从层次结构入手引入 L- 拓扑空间中的 p- 良紧性和 ps- 良紧性,并给出了 p- 良紧性和 ps- 良紧性的分子式、覆盖式、具有有限交性质的集族式等多种方式的特征刻划。同时还证明了 p- 良紧性(ps- 良紧性)对预闭子集(预半闭子集)遗传,p-(ps-)良紧子集在 p-(ps-)连续映射下的像保持等基本性质。

在本文中 L 表示 fuzzy 格,1 和 0 分别表示 L 中的最大元和最小元。$M(L)$ 表示 L 中全部分子之集,X 表示非空集,L^X 表示 X 上的全体 LF 集。若 $A \in L^X$,则 A^0,A^- 分别表示 LF 集 A 的内部和闭包。$M^*(L^X)$ 表示 L^X 的全体分子之集,$\beta(\alpha)$ 表示 $\alpha(\alpha \in L)$ 的最大极小集,$\beta^*(\alpha) = \beta(\alpha) \cap M(L)$ 表示 α 的标准极小集[2],$\alpha^*(r) = (\beta^*(r'))'$ 表示 r 的由异于 1 的素元组成的极大集,$p(L)$ 表示 L 中异于 1 的全体素元之集。其它未列出的记号和术语均可在参考文献[3 ~ 16] 中找到。

定义 1 设 (L^X,δ) 是 L- 拓扑空间,$x_\alpha \in M^*(L^X)$,$A \in \delta'$,如果 $x_\alpha \notin A$,则称 A 为 x_α 的闭远域。设 $B \in L^X$,如果 x_α 有闭远域 A 使 $B \leqslant A$,则称 B 为 x_α 的远域。分子 x_α 的一切远域和一切闭远域之集记作 $\eta(x_\alpha)$ 与 $\eta^-(x_\alpha)$。

定义 2 设 (L^X,δ) 是 L- 拓扑空间,$A \in L^X$,$\Phi \subset \delta'$,$\alpha \in M(L)$。如果对 A 中的每个高为 α 的分子 x_α,有 $p \in \Phi$ 使 $p \in \eta(x_\alpha)$,则称 Φ 为 A 的 α- 远域族,记作 $\wedge \Phi < A(\alpha)$(或 α-RF)。如果存在 $r \in \beta^*(\alpha)$,使 $\wedge \Phi < A(r)$,则称 Φ 为 A 的 α^- - 远域族,记作 $\Phi \ll A(\alpha)$(或 α^- -RF)。

* 收稿日期:2006-03-27
资助项目:延安大学重点学科建设基金资助项目
作者简介:马保国(1953-),男,陕西绥德人,教授,研究方向为格上拓扑。

定义3 设(L^X,δ)是L-拓扑空间,$A\in L^X$。如果对A的任一α-远域族$\Phi\subset\delta'$,Φ有有限子族Ψ,使Ψ构成A的α^--远域族,则称A为良紧集。当最大LF子集1是良紧集时,称(L^X,δ)为良紧空间。

定义4 设(L^X,δ)是L-拓扑空间,$A\in L^X$称为

1)半开集当且仅当存在开集U,使得$U\leqslant A\leqslant U^-$;

2)半闭集当且仅当存在闭集F,使得$F^0\leqslant A\leqslant F$。

L-拓扑空间(L^X,δ)中的所有半开集、半闭集分别记为$\mathrm{LSO}(L^X)$、$\mathrm{LSC}(L^X)$。显然,$A\in\mathrm{LSO}(L^X)$当且仅当$A'\in\mathrm{LSC}(L^X)$。

定义5 设(L^X,δ)是L-拓扑空间,$A\in L^X$,则A的半内部和半闭包分别定义为

$$A_0=\cap\{B\mid B\in\mathrm{LSO}(L^X),A\leqslant B\},$$

$$A_-=\cup\{B\mid B\in\mathrm{LSC}(L^X),B\leqslant A\}。$$

定理1 设(L^X,δ)是L-拓扑空间,$A\in L^X$,则关系式$A^0\leqslant A_0\leqslant A\leqslant A_-\leqslant A^-$成立。

定理2 设(L^X,δ)是L-拓扑空间,$A\in L^X$,则下列等式成立

1)$(A_-)^0=A^{-0}$;

2)$A^{0-}=(A_0)^-$;

3)$(A_-)^-=(A^-)_-=A^-$;

4)$(A_0)^0=(A^0)_0=A^0$;

5)$(A_-)^0\leqslant A^{-0}\leqslant A_{-0}\leqslant(A^-)_0$;

6)$(A^0)_-\leqslant A_{0-}\leqslant A^{0-}\leqslant(A_0)^-$。

2 L-拓扑空间中的预开集和预半开集

定义6 设(L^X,δ)是L-拓扑空间,$A\in L^X$称为预开集当且仅当存在开集U,使得$A\leqslant U\leqslant A^-$;若$A$是预开集,则称$A'$是预闭集。

L-拓扑空间(L^X,δ)中的所有预开集记作$\mathrm{LPO}(L^X)$,所有的预闭集记作$\mathrm{LPC}(L^X)$。

定义7 设(L^X,δ)是L-拓扑空间,$A\in L^X$称为预半开集当且仅当存在半开集U,使得$A\leqslant U\leqslant A_-$;若$A$是预半开集,则称$A'$是预半闭集。

L-拓扑空间(L^X,δ)中的所有预半开集记作$\mathrm{LPSO}(L^X)$,所有预半闭集记作$\mathrm{LPSC}(L^X)$。

定理3 设(L^X,δ)是L-拓扑空间,$A\in L^X$,则

1)A是预开集当且仅当$A\leqslant A^{-0}$,A是预闭集当且仅当$A\geqslant A^{0-}$;

2)A是预半开集当且仅当$A\leqslant A_{-0}$,A是预半闭集当且仅当$A\geqslant A_{0-}$。

定理4 设(L^X,δ)是L-拓扑空间,则

1)$\delta\subset\mathrm{LPO}(L^X)\subset\mathrm{LPSO}(L^X)$,

$\delta'\subset\mathrm{LPC}(L^X)\subset\mathrm{LPSC}(L^X)$;

2)$\delta\subset\mathrm{LSO}(L^X)\subset\mathrm{LPSO}(L^X)$。

定义8 设(L^X,δ)是L-拓扑空间,$A\in L^X$,

1)若$A=A^{0-}$($A=A^{-0}$),则称A为正则闭集(正则开集);

2)若$A=A_{0-}$($A=A_{-0}$),则称A为正则半闭集(正则半开集)。

L-拓扑空间(L^X,δ)中的所有正则闭集(正则开集)记作$\mathrm{LRC}(L^X)$($\mathrm{LRO}(L^X)$),所有的正则半闭集(正则半开集)记作$\mathrm{LRSC}(L^X)$($\mathrm{LRSO}(L^X)$)。

显然,若A是正则闭集,则A'是正则开集;若A是正则半闭集,则A'是正则半开集。

定理5 设(L^X,δ)是L-拓扑空间,则下列命题成立

1)A是正则闭集当且仅当A是开集的闭包;A是正则开集当且仅当A是闭集的内部;

2)正则闭集是闭的半开集,半开集的闭包是正则闭集;

3)正则开集是半闭集,正则闭集是半开集。

证明 1)设A是正则闭集,则$A=A^{0-}$,所以A是开集的闭包;反之,设U是开集,则由$U\leqslant U^{-0}\leqslant U^-$,得$U^-=(U^-)^{0-}$,即开集$U$的闭包$U^-$是正则闭集。

2)设A是正则闭集,则$A^0\leqslant A\leqslant(A^0)^-$,所以$A$是半开集。若$A$是半开集,则有开集$U$,使得$U\leqslant A\leqslant U^-$,这时$A^-=U^-$,由1)知$A^-$是正则闭集。

3)由2)是明显的。 证毕

定理6 设(L^X,δ)是L-拓扑空间,则下列命题成立

1)A是正则半闭集当且仅当A是半开集的半闭包;A是正则半开集当且仅当A是半闭集的半内部;

2)正则半闭集是半开集,正则半开集是半闭集。

此定理的证明类似定理5的相应部分。

定理7 设(L^X,δ)是L-拓扑空间,$A\in L^X$,则下列命题成立

1)若$A\in\mathrm{LPO}(L^X)$,则$A^-\in\mathrm{LRC}(L^X)$;

2)若$A\in\mathrm{LPC}(L^X)$,则$A^0\in\mathrm{LRO}(L^X)$;

3)$A\in\mathrm{LPO}(L^X)\cap\delta'$当且仅当$A\in\delta\cap\delta'$;

4)$A\in\mathrm{LPC}(L^X)\cap\delta$当且仅当$A\in\delta\cap\delta'$;

5）若 $A\in \mathrm{LPO}(L^X)$，$U\in\delta$，则 $A\cap U\in \mathrm{LPO}(L^X)$；

6）若 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}\subset \mathrm{LPO}(L^X)$，则 $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\in \mathrm{LPO}(L^X)$。

定理 8　设 (L^X,δ) 是 L-拓扑空间，$A\in L^X$，则下列命题成立

1）若 $A\in \mathrm{LPSO}(L^X)$，则 $A_-\in \mathrm{LRSC}(L^X)$；

2）若 $A\in \mathrm{LPSC}(L^X)$，则 $A_0\in \mathrm{LRSO}(L^X)$；

3）$A\in \mathrm{LPSO}(L^X)\cap \mathrm{LSC}(L^X)$ 当且仅当 $A\in \mathrm{LSO}(L^X)\cap \mathrm{LSC}(L^X)$；

4）$A\in \mathrm{LPSC}(L^X)\cap \mathrm{LSO}(L^X)$ 当且仅当 $A\in \mathrm{LSO}(L^X)\cap \mathrm{LSC}(L^X)$；

5）若 $A\in\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}\subset \mathrm{LPSO}(L^X)$，则 $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\in \mathrm{LPSO}(L^X)$。

定理 9　设 (L^X,δ) 是 L-拓扑空间，$A\in L^X$，则下列命题成立

1）$A\in \mathrm{LPO}(L^X)$ 当且仅当 $A_-=A^{-0}$；

2）$A\in \mathrm{LPO}(L^X)$ 当且仅当 $A_-\in \mathrm{LRO}(L^X)$；

3）$\mathrm{LRO}(L^X)=\mathrm{LPO}(L^X)\cap \mathrm{LSC}(L^X)$。

证明　1）若 $A\in \mathrm{LPO}(L^X)$，只需证明 $A_-\leqslant A^{-0}$ 即可。由于 $A\in \mathrm{LPO}(L^X)$，故有 $A_-\leqslant (A^{-0})_-$，且由 $A^{-0}\in \mathrm{LSC}(L^X)$，得 $A_-\leqslant A^{-0}$，反之显然。

2）若 $A_-\in \mathrm{LRO}(L^X)$，则 $A_-=(A_-)^{-0}$ 且 $A_-\leqslant A^{--0}=A^{-0}$，由 1），$A_-=A^{-0}$，再由 1）知 $A\in \mathrm{LPO}(L^X)$，反过来，由 1）显然。

3）$A\in \mathrm{LPO}(L^X)\cap \mathrm{LSC}(L^X)$，由 2）$A\in \mathrm{LRO}(L^X)$，即 $\mathrm{LPO}(L^X)\cap \mathrm{LSC}(L^X)\subset \mathrm{LRO}(L^X)$。

反之，若 $A\in \mathrm{LRO}(L^X)$，则 $A^{-0}=A$，又正则开集是半闭集，故 $A^{-0}=A_-$，从而 $A^{-0}=A_-=A$，由 1），$A\in \mathrm{LPO}(L^X)\cap \mathrm{LSC}(L^X)$。　　**证毕**

定义 9　设 (L^Y,δ) 是 LF 拓扑空间，$A\in L^Y$，

1）包含于 A 的一切预开集的并叫做 A 的 LF 预内部，记作 A^Δ，即

$$A^\Delta=\bigvee\{B\in \mathrm{LPO}(L^Y)\mid B\leqslant A\};$$

2）包含 A 的一切预闭集的交叫做 A 的 LF 预闭包，记作 $A^\leftarrow$，即

$$A^\leftarrow=\bigwedge\{B\in \mathrm{LPC}(L^Y)\mid A\leqslant B\}。$$

定义 10　设 (L^Y,δ) 是 LF 拓扑空间，$A\in L^Y$，

1）包含于 A 的一切预半开集的并叫做 A 的预半内部，记作 A_Δ，即

$$A_\Delta=\bigvee\{B\in \mathrm{LPSO}(L^Y)\mid B\leqslant A\};$$

2）包含 A 的一切预半闭集的交叫做 A 的预半闭包，记作 $A_\leftarrow$，即

$$A_\leftarrow=\bigwedge\{B\in \mathrm{LPSC}(L^Y)\mid A\leqslant B\}。$$

定理 10　设 (L^X,δ) 是 L-拓扑空间，$A\in L^X$，则下列命题成立

1）$A\in \mathrm{LPO}(L^X)$ 当且仅当 $A=A^\Delta$，$A\in \mathrm{LPC}(L^X)$ 当且仅当 $A=A^\leftarrow$；

2）$A\in \mathrm{LPSO}(L^X)$ 当且仅当 $A=A_\Delta$，$A\in \mathrm{LPSC}(L^X)$ 当且仅当 $A=A_\leftarrow$。

定理 11　设 (L^X,δ) 是 L-拓扑空间，$A\in L^X$，则下列关系式成立

$$A^0\leqslant A^\Delta\leqslant A_\Delta\leqslant A_0\leqslant A\leqslant A_-\leqslant A_\leftarrow\leqslant A^\leftarrow\leqslant A^-。$$

定义 11　设 S 是 (L^X,δ) 中的分子网，$e\in M^*(L^X)$，称 e 为 S 的 p-极限点（ps-极限点），若对每一个 $P\in\eta_p(x_\alpha)$（$P\in\eta_{ps}(x_\alpha)$），S 最终不在 P 中 称 e 为 S 的 p-聚点（ps-聚点），若对每一个 $P\in\eta_p(x_\alpha)$（$P\in\eta_{ps}(x_\alpha)$），S 经常不在 P 中。

3　L-拓扑空间中的 p-（ps-）良紧集

定义 12　设 (L^X,δ) 是 L-拓扑空间，$x_\alpha\in M^*(L^X)$，$A\in \mathrm{LPC}(L^X)$（$\mathrm{LPSC}(L^X)$），如果 $x_\alpha\notin A$，则称 A 为 x_α 的预闭远域（预半闭远域）。设 $B\in L^X$，如果 x_α 有预闭远域（预半闭远域）A，使 $B\leqslant A$，则称 B 为 x_α 的 p-远域（ps-远域）。分子 x_α 的一切 p-远域（ps-远域）和一切 p-闭远域（ps-闭远域）之集记作 $\eta_p(x_\alpha)$（$\eta_{ps}(x_\alpha)$）与 $\eta^-_p(x_\alpha)$（$\eta^-_{ps}(x_\alpha)$）。

定义 13　设 (L^X,δ) 是 L-拓扑空间，$A\in L^X$，$\Phi\subset \mathrm{LPC}(L^X)$（$\mathrm{LPSC}(L^X)$），$\alpha\in M(L)$。如果对 A 中的每个高为 α 的分子 x_α，有 $P\in\Phi$，使 $P\in\eta_p(x_\alpha)$（$P\in\eta_{ps}(x_\alpha)$），则称 Φ 为 A 的 α-p 远域族（α-ps 远域族），记作 α-$p\mathrm{RF}$（α-$ps\mathrm{RF}$）。如果存在 $r\in\beta^*(\alpha)$，使 Φ 为 A 的 r-$p\mathrm{RF}$（r-$ps\mathrm{RF}$），则称 Φ 为 A 的 α^--p 远域族（α^--ps 远域族），记作 α^--$p\mathrm{RF}$（α^--$ps\mathrm{RF}$）。

定义 14　设 (L^X,δ) 是 L-拓扑空间，$A\in L^X$。如果对 A 的任一 α-p 远域族（α-ps 远域族）Φ，Φ 有有限子族 Ψ，使 Ψ 构成 A 的 α^--p 远域族（α^--ps 远域族），则称 A 为 p-良紧集（ps-良紧集）。当最大 LF 集 1 是 p-良紧集（ps-良紧集）时，称 (L^X,δ) 为 p-（ps-）良紧空间。

由定义，显然以下结论成立。

定理 12　设 (L^X,δ) 是 L-拓扑空间，$A\in L^X$，则 A 是良紧集 $\Rightarrow A$ 是 p-良紧集 $\Rightarrow A$ 是 ps-良紧集，反之一般都不成立。

定理 13　设 (L^X,δ) 是 L-拓扑空间，$A\in L^X$ 是 p-

良紧集(ps-良紧集)当且仅当 $\forall \alpha \in M(L)$ 及 A 中的每个 α-网 S,S 在 A 中有一高度等于 α 的 p-聚点(ps-聚点)。

此定理的证明与文献[2]中定理6.2.7类似。

定义15 设 (L^X,δ) 是 L-拓扑空间,$A \in L^X$,$r \in p(L)$,$\Omega \subset \mathrm{LPO}(L^X)(\mathrm{LPSO}(L^X))$。称 Ω 为 A 的 r-p 覆盖(r-ps 覆盖),若 $\forall x \in A_{[r']} = \{x \in X | A(x) \geqslant r'\}$,存在 $U \in \Omega$,使 $U(x) \nless r$。称 Ω 为 A 的 r^+-p 覆盖(r^+-ps 覆盖),若存在 $t \in \alpha^*(r)$,使 Ω 是 A 的 t-p 覆盖(t-ps 覆盖)。

定义16 设 (L^X,δ) 是 L-拓扑空间,$A \in L^X$,$\Omega \subset L^X$,$\alpha \in M(L)$。称 Ω 在 A 中具有 α-p(α-ps)交性质,若 $\forall \Psi \in 2^{(\Omega)}$,$\exists x \in A_{[\alpha]}$ 使 $(\wedge \Psi)(x) \geqslant \alpha$。称 Ω 在 A 中具有 α^+-p(α^+-ps)交性质,若 $\forall t \in \beta^*(\alpha)$,$\Omega$ 在 A 中具有 t-p(t-ps)交性质。

引理1 设 (L^X,δ) 是 L-拓扑空间,$A \in L^X$,$r \in p(L)$,$\Omega \subset \mathrm{LPO}(L^X)(\mathrm{LPSO}(L^X))$,则

1) Ω 为 A 的 r-p 覆盖(r-ps 覆盖)当且仅当 Ω' 是 A 的 r'-pRF($-ps$RF);

2) Ω 为 A 的 r^+-p 覆盖(r^+-ps 覆盖)当且仅当 Ω' 是 A 的 $(r')^-$-pRF($(r')^-$-psRF)。

此引理的证明参见文献[14]中的引理1.11。

定理14 设 (L^X,δ) 是 L-拓扑空间,$A \in L^X$,则下列条件等价

1) A 是 p-良紧集(ps-良紧集);

2) $\forall r \in p(L)$ 及 A 的 r-p 覆盖(r-ps 覆盖)$\Omega \subset \mathrm{LPO}(L^X)(\mathrm{LPSO}(L^X))$,存在 $\Psi \in 2^{(\Omega)}$ 使 Ψ 是 A 的 r^+-p 覆盖(r^+-ps 覆盖);

3) $\forall \alpha \in M(L)$ 及每个在 A 中具有 α^+-p(α^+-ps)交性质的 $\Omega \subset \mathrm{LPC}(L^X)(\mathrm{LPSC}(L^X))$,$\exists x \in A_{[\alpha]}$,使 $(\wedge \Omega)(x) \geqslant \alpha$;

4) $\forall \alpha \in M(L)$ 及每个在 A 中具有 α^+-p(α^+-ps)交性质的 $\Omega \subset L^X$,$\exists x \in A_{[\alpha]}$,使 $(\wedge \Omega^{\leftarrow})(x) \geqslant \alpha$ $((\wedge \Omega^{\sim})(x) \geqslant \alpha)$。

证明 仅就 p-良紧集的情形予以证明,ps-良紧集的情形类似可证。

1)⇒2),设 $\Omega \subset \mathrm{LPO}(L^X)$ 是 A 的 r-p 覆盖,则 Ω' 是 A 的 r'-pRF,从而存在 $\Psi \in 2^{(\Omega)}$ 使 Ψ' 是 A 的 $(r')^-$-pRF,于是 Ψ 是 A 的 r^+-p 覆盖。

2)⇒3),若存在 $\alpha \in M(L)$ 及某个在 A 中具有 α^+-p 交性质的 $\Omega \subset \mathrm{LPC}(L^X)$,使 $\exists x \in A_{[\alpha]}$,使 $(\wedge \Omega)(x) \ngeqslant \alpha$,则不难看出 Ω' 是 A 的 α'-p 覆盖。于是存在 $\Psi \in 2^{(\Omega)}$ 使 Ψ' 是 A 的 $(\alpha')^+$-p 覆盖,即存在 $t \in \alpha^*(\alpha')$ 使 Ψ' 是 A 的 t-p 覆盖。从而 $\exists x \in A_{[t']}$,$\exists P \in \Psi$,使 $P'^{\leftarrow}(x) \nless t$,于是

$$(\wedge((\Psi'^{\leftarrow})'))(x) = (\wedge \Psi^{\Delta})(x) \ngeqslant t' \in (\alpha^*(\alpha'))' = \beta^*(\alpha),$$

这表明 Ω 在 A 中不具有 α^+-p 交性质,矛盾。

3)⇒4),显然。

4)⇒1),若 A 不是 p-良紧集,则存在 $\alpha \in M(L)$ 及某个 α-pRF$\Omega \subset \mathrm{LPC}(L^X)$,使 $\forall \Psi \in 2^{(\Omega)}$ 不是 A 的 α^--pRF,即 $\forall t \in \beta^*(\alpha)$,$\Psi$ 不是 A 的 t-pRF。因此存在 $x \in A_{[t]}$ 使 $(\wedge \Psi^{\Delta})(x) \geqslant t$,可见 Ω 在 A 中具有 α^+-p 交性质。于是 $\exists x \in A_{[\alpha]}$,使得 $(\wedge \Omega^{\leftarrow})(x) = (\wedge \Omega)(x) \geqslant \alpha$。这与 Ω 是 A 的 α-pRF 不合,所以 A 是 p-良紧集。 证毕

定理15 设 (L^X,δ) 是 L-拓扑空间,$A \in L^X$ 是 p-良紧集(ps-良紧集)当且仅当 A 的每个有正则预闭集(正则预半闭集)构成的 α-pRF(α-psRF)Ω,$\alpha \in M(L)$,存在 $\Psi \in 2^{(\Omega)}$ 使 Ψ 是 A 的 α^--pRF(α^--psRF)。

定理16 设 (L^X,δ) 是 L-拓扑空间,$A \in L^X$ 是 p-良紧集(ps-良紧集),$B \in L^X$ 是预闭集(预半闭集),则 $A \wedge B$ 是 p-良紧集(ps-良紧集)。

证明 设 S 是 $A \wedge B$ 中 α-网,则 S 也是 A 中的 α-网。因为 A 是 p-良紧集,S 在 A 中有一高度等于 α 的 p-聚点 x_α。但 S 又是预闭集 B 中分子网,x_α 作为 S 的 p-聚点应当有 $x_\alpha \leqslant B$,所以 $x_\alpha \leqslant A \wedge B$,即 x_α 是 S 在 $A \wedge B$ 中的 p-聚点,因此 $A \wedge B$ 是 p-良紧集的。

$A \wedge B$ 是 ps-良紧集的情形,类似可以证明。

证毕

推论1 p-良紧(ps-良紧)的 L-拓扑空间的任一预闭子集(预半闭子集),都是 p-良紧集(ps-良紧集)。

定理17 设 (X,δ) 是 F 拓扑空间,A 是 (X,δ) 中的 p-良紧集(ps-良紧集),则 A 作为 X 上的函数可在某点取得其最大值。

此定理的证明与文献[2]的定理6.2.8类似。

定义17 设 (L^X,δ) 和 (L^Y,μ) 是 L-拓扑空间,$f:(L^X,\delta) \to (L^Y,\mu)$ 是 L 值 Zadeh 型函数,称 f 是 p-(ps-)连续的,若对 (L^Y,μ) 中的每个预开集(预半开集)U,$f^{-1}(U) \in \mathrm{LPO}(L^X)(\mathrm{LPSO}(L^X))$。

定理18 设 $f:(L^X,\delta) \to (L^Y,\mu)$ 是 L 值 Zadeh 型函数,$A \in L^X$ 是 p-良紧集(ps-良紧集),如果 f 是 p-(ps-)连续的,则 $f(A)$ 是 (L^Y,μ) 中的 p-良紧集(ps-良紧集)。

证明　设 f: $(L^X,\delta)\to(L^Y,\mu)$ 是 p- 连续的 L 值 Zadeh 型函数,$A\in L^X$ 是 p- 良紧集,Ω 是 $f(A)$ 的 α-pRF($\alpha\in M(L)$),则对 A 中任一分子 x_α,$f(x_\alpha)=(f(x))_\alpha$ 是 $f(A)$ 中高度等于 α 的分子,所以 Ω 中有预闭集 P 使 $(f(x))_\alpha\not\leq P$,或 $\alpha\not\leq P(f(x))$。这等价于 $\alpha\not\leq f^{-1}(P)(x)$ 或 $x_\alpha\not\leq f^{-1}(P)$。因为 f 是 p- 连续的,$f^{-1}(P)$ 是 (L^X,δ) 中的预闭集,所以

$$f^{-1}(P)\in\eta_p^-(x_\alpha),$$

从而 $f^{-1}(\Omega)$ 是 A 的 α-pRF。由 A 是 p- 良紧集知有有限子族 $\Psi=\{P_1,P_2\cdots,P_n\}$ 使 $f^{-1}(\Psi)$ 是 A 的 α^--pRF,以下只需证明 Ψ 就是 $f(A)$ 的 α^--pRF,为此又只需证明存在 $t\in\beta^*(\alpha)$ 使对 $f(A)$ 中任一高度等于 t 的分子 y_t 而言,存在 $i\leq n$ 使 $y_t\not\leq P_i$,即证明

$$\exists t\in\beta^*(\alpha),\forall y_t\leq f(A),y_t\not\leq P_1\wedge P_2\wedge\cdots\wedge P_n \quad (1)$$

事实上,由 $f^{-1}(\Psi)$ 是 A 的 α^--pRF 知有 $r\in\beta^*(\alpha)$ 使对 A 中任一分子 x_r 有 $i\leq n$,使 $x_r\not\leq f^{-1}(p_i)$,即

$$\exists r\in\beta^*(\alpha),\forall x_r\leq A,$$

$$x_r\not\leq f^{-1}(P_1)\wedge f^{-1}(P_2)\wedge\cdots\wedge f^{-1}(P_n) \quad (2)$$

现在设(1)式不成立,即

$$\forall t\in\beta^*(\alpha),\exists y_t\leq f(A),y_t\leq P_1\wedge P_2\wedge\cdots\wedge P_n \quad (3)$$

因为 $\alpha=\sup\beta^*(\alpha)$,所以由极小映射的性质[2] 知

$$\beta(\alpha)=\beta(\sup\beta^*(\alpha))=\cup\{\beta(t)\mid t\in\beta^*(\alpha)\}。$$

由 $r\in\beta^*(\alpha)\subset\beta(\alpha)$ 知有 $t\in\beta^*(\alpha)$,使 $r\in\beta(t)$。因为 r 是分子,所以 $r\in\beta^*(t)$。另一方面,设 y_t 满足(3)式,则 $f(A)\geq y_t$,因此由 L 值 Zadeh 型函数的定义得

$$f(A)(y)=\sup\{A(x)\mid f(x)=y\}\geq t。$$

由 $r\in\beta^*(t)$ 知,有 $x\in X$ 使 $A(x)\geq r$ 且 $f(x)=y$。这时 x_r 是 A 中分子,从而满足(2)式。又有 $(f(x))_r=y_r\leq y_t$,所以由(3)式得

$$f(x_r)=(f(x))_r=y_r\leq P_1\wedge P_2\wedge\cdots\wedge P_n,$$

即

$$x_r\leq f^{-1}(P_1\wedge P_2\wedge\cdots\wedge P_n)=$$
$$f^{-1}(P_1)\wedge f^{-1}(P_2)\wedge\cdots\wedge f^{-1}(P_n)。$$

上式与(2)式相矛盾,所以(1)式成立。　　证毕

参考文献:

[1] WANG G J. A New-fuzzy Compactness Defined by Fuzzy Nets[J]. J Math Anal Appl,1983,94:1-23.

[2] 王国俊. L-fuzzy 拓扑空间论[M]. 西安:陕西师范大学出版社,1988.

[3] CHANG C L. Fuzzy Topological Spaces[J]. J Math Anal Appl,1968,24:182-190.

[4] LOWEN R. Fuzzy Topological Spaces and Fuzzy Compactness[J]. J Math Anal Appl,1976,56:621-633.

[5] ZHAO D S. The N-compactness in L-fuzzy Topological Spaces[J]. J Math Anal Appl,1987,128:64-79.

[6] 彭育威. L-fuzzy 拓扑空间的良紧性[J]. 数学学报,1986,29:555-558.

[7] 彭育威. L-良紧子集的刻画[J]. 数学进展,1987,16:87-90.

[8] LOWEN R. A Comparison of Different Compactness Notions in Fuzzy Topological Spaces[J]. J Math Anal Appl,1978,64:446-454.

[9] SHANA A S B. On Fuzzy Strong Semicontinuity and Fuzzy Precontinuity[J]. Fuzzy Sets and Systems,1991,44:303-308.

[10] 马保国. 模糊半预开集与模糊半预半连续多值映射[J]. 延安大学学报(自然科学版),1999(2):6-10.

[11] 马保国. 模糊预开集与模糊预半开集[J]. 纺织基础科学学报,1993(4):293-298.

[12] YALVAC T H. Fuzzy Sets and Function on Fuzzy Topological Spaces[J]. J Math Anal Appl,1987,126:409-423.

[13] GANGULY S, SAHA S. A Note on Semi-open Set in Fuzzy Topological Spaces[J]. Fuzzy Sets and Systems,1986,18:83-96.

[14] MENG G W. Lowen's Compactness in L-fuzzy Topological Spaces[J]. Fuzzy Sets and Systems,1993,53:329-334.

[15] ZADEH L A. Fuzzy Sets[J]. Inform and Control,1965,8:338-353.

[16] 张一进,陈波. L-fuzzy 保序算子空间的拟 ω-T_0 分离性[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2005,22(4):14-15.

(责任编辑　黄　颖)