关于代数体函数的一个界囿定理*

卢 谦[1], 桑汉英[2]
(1. 西南科技大学 理学院, 四川 绵阳 621010; 2. 重庆师范大学 数学与计算机科学学院, 重庆 400047)

摘 要: 使用 v-值代数体函数的对数导数引理,通过估计代数体函数的第二基本定理中的余项,得到代数体函数不涉及导数的一个界囿定理。

关键词: 代数体函数; 第二基本定理; 余项; 界囿定理
中图分类号: O174.52 文献标识码: A 文章编号: 1672-6693(2006)04-0015-03

On Bounded Theorem of Algebroid Functions

LU Qian[1], *SANG Han-ying*[2]
(1. School of Science, Southwest of Scientific and Technology University, Mianyang Sichuan, 621010;
2. College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: In this paper, from the lemma of logarithmic derivatives of v-value algebroid functions $\omega(z)$, we estimated the error terms in the second fundamental theorem and got a bounded theorem of characteristic functions of $\omega(z)$.

Key words: algebroid functions; second fundamental theorem; error terms; bounded theorem

1 主要结果

亚纯函数值分布理论,包括亚纯函数的模分布和幅角分布论以及正规族理论。1979 年顾永兴[1] 证实了 Hayman 猜想[2],将 Miranda 正规定则[3] 推广到亚纯函数的情形,国内外对此正规定则做了广泛和深入的研究。1996 年,本文作者在文献[4] 又得到亚纯函数族结合微分多项式及重值的正规性。在正规族理论和幅角分布的研究过程中[5,6],界囿定理起着十分重要的作用[7,8]。

设 $A_v(z),\cdots,A_0(z)$ 为 $|z|<+\infty$ 内没有公共零点的整函数,记 $\omega(z)$ 为 $|z|<+\infty$ 上由不可约方程

$$\varphi(z,\omega)\equiv A_v(z)\omega^v+A_{v-1}(z)\omega^{v-1}+\cdots+A_0(z)=0 \tag{1}$$

所确定的 v 值代数体函数。

代数体函数是一类较亚纯函数更为广泛的函数,关于它的值分布理论人们有比较深入的研究和讨论,得到很多有意义的相应于亚纯函数的结果。本文主要讨论相应于亚纯函数的一些界囿定理能否建立这个问题,得到一个界囿定理。本文使用的常用记号和意义与文献[9] 相同。

定理 1 (界囿定理) 设 $\omega(z)$ 为 $|z|<+\infty$ 上由(1) 式所确定的 v- 值代数体函数。若 $a_k(k=1,2,\cdots,p)$ 为 p 个相互判别复数,$p\geqslant 2v+1$,则当 $0<r<R$ 时,有

$$T(r,\omega)<K\{\sum_{k=1}^{p}\overline{N}(R,\omega=a_k)+1+\sum_{j=1}^{v}\log^+|\omega_j(0)|+\log\left|\frac{B_v(0)}{B_0(0)}\right|+\sum_{k=1}^{p}\log^+n\left(0,\frac{1}{\varphi(0)}\right)\log a+$$

$$\sum_{k=1}^{p}\log|A_k|+\log^+\left[2n(0,\omega)+n\left(0,\frac{1}{J(z)}\right)\right]+\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant p}\log\frac{1}{|a_i,a_j|}+$$

* 收稿日期: 2006-05-17
资助项目: 西南科技大学"十一五"规划重点科研项目资助(No. 06zx2116)
作者简介: 卢谦(1965-),男,四川中江人,副教授,博士,研究方向为复分析。

$$\log^+\log^+|A_v(0)|+\log^+\log^+\frac{1}{|J(0)|}+\log^+\log^+\frac{1}{R}+\log\frac{R}{R-r}\}$$

其中 $\omega_j(0)$ 为 $\omega(z)$ 的第 j 个分支 $\omega_j(z)$ 在原点处的值,$J(z)$ 为 $\omega(z)$ 的判别式。

2 主要引理

引理1[7,8] 设 $U(r)$ 为一个非负且非减的函数,定义在一区间 $0<r<R$ 内,设 a,b 及 c 均为正数,若不等式 $U(r)<a\log^+U(\rho)+b\left(\log^+\frac{1}{\rho-r}+\log^+\rho+\log^+\frac{1}{r}\right)+c$ 于 $0<r<\rho<R$ 成立,则当 $0<r<R$ 时,有 $U(r)<4(a+b)\left(\log\frac{R}{R-r}+\log^+R+\log^+\frac{1}{R}\right)+20(a+b+1)^2+2c$。

引理2[9] 设 $\omega(z)$ 是 $|z|<+\infty$ 上由不可约方程(1)式确定的 v 值代数体函数,则对 $0<r<\rho<+\infty$,有

$$m\left(r,\frac{\omega'}{\omega}\right)<10\log^+T(\rho,\omega)+12\log^+\frac{\rho}{\rho-r}+3\log^+\frac{1}{r}+\log^+\log^+|A_v(0)|+$$

$$\log^+\log^+\left|\frac{|A_v(0)|}{|A_0(0)|}\right|+\log^+\log^+\frac{1}{|J(0)|}+\log^+\left[2n(0,\omega)+n\left(0,\frac{1}{\omega}\right)+n\left(0,\frac{1}{J(0)}\right)\right]+8\log v+10 \quad (2)$$

其中 $A_v(z),\cdots,A_0(z)$ 为 $|z|<+\infty$ 内没有公共零点的整函数。

根据文献[9]的定理2.21,不难得出 σ_0 的具体表达式为引理2中的形式。

引理3 (第二基本定理)设 $\omega(z)$ 满足引理2中的条件。若 $a_1,a_2,\cdots,a_p$ 是 p 个判别复数(有穷或否),则有

$$(p-2v)T(r,\omega)<\sum_{k=1}^{p}\overline{N}\left(r,\frac{1}{\omega-a_k}\right)+N_x(r,\omega)+S(r,\omega)+$$

$$\sum_{k=0}^{p}\log\left|\frac{\varphi(0,a_k)}{A_v(0)}\right|+\log\left|\frac{B_v(0)}{B_0(0)}\right|+\sum_{k=1}^{p}\log|A_k|+p\log a+2p\log 2 \quad (3)$$

其中 $N_x(r,\omega)$ 是 $\tilde{R}_z$ 在 $|z|<r$ 上的分支点密指量;$\omega'(z)$ 由不可约方程

$$\phi(z,\omega')\equiv B_v(z)(\omega')^v+B_{v-1}(z)(\omega')^{v-1}+\cdots+B_0(z)=0$$

所确定。其中 $S(r,\omega)=\sum_{k=0}^{p}m\left(r,\frac{\omega'}{\omega-a_k}\right)$,$a_0=0$,且

$$A_k=[(a_1-a_k)(a_2-a_k)\cdots(a_{k-1}-a_k)(a_{k+1}-a_k)\cdots(a_p-a_k)]^{-1},a=\max_{1\leqslant k\leqslant p}\{|a_k|\}。$$

此引理根据文献[9]中定理2.22的证明过程,即可得结果。

3 定理1的证明

证明 由于 $N_x(r,\omega)\leqslant 2(v-1)T(r,\omega)$,因此由引理3有

$$(p-2v)T(r-\omega)<\sum_{k=1}^{p}\overline{N}\left(R,\frac{1}{\omega-a_k}\right)+S(r,\omega)+$$

$$\sum_{k=0}^{p}\log\left|\frac{\varphi(0,a_k)}{A_v(0)}\right|+\log\left|\frac{B_v(0)}{B_0(0)}\right|+\sum_{k=1}^{p}\log|A_k|+p\log a+2p\log 2 \quad (4)$$

下面估计 $S(r,\omega)$,即 $m\left(r,\frac{\omega'}{\omega-a_k}\right)$。$a_0=0$,$m\left(r,\frac{\omega'}{\omega}\right)$ 满足(2)式。$a_k\neq 0$ 时,令 $W=\omega-a_k$,即 $\omega=W+a_k$,由于 $\omega(z)$ 由(1)式所确定,即有

$$A_v(z)\cdot(W+a_k)^v+A_{v-1}(z)\cdot(W+a_k)^{v-1}+\cdots+A_0(z)=0。$$

展开整理得

$$A_v(z)W^v+(C_v^1\cdot a_k^1\cdot A_v(z)+A_{v-1}(z))W^{v-1}+\cdots+$$

$$\left(\sum_{j=0}^{i} C_{v-j}^{i-j}\cdot a_k^{i-j}\cdot A_{v-j}(z)\right)W^{v-i}+\cdots+\left(\sum_{j=0}^{v} A_{v-j}(z)\cdot a_k\right)^{v-j}\equiv 0 \tag{5}$$

这样 $\omega - a_k$ 是由(5)式所确定的 v 值代数体函数,显然,ω 与 $\omega - a_k$ 具有相同的极点,且 $\omega(z)$ 与 $\omega(z) - a_k$ 具有相同的差别式 $J(z)$,而 $\omega - a_k$ 有零点即为 $\varphi(z,a_k)$ 的零点,所以有

$$m\left(r,\frac{\omega'}{\omega-a_k}\right)<10\log^+T(\rho,\omega-a_k)+12\log^+\frac{\rho}{\rho-r}+3\log^+\frac{1}{r}+\log^+\log^+|A_v(0)|+\log^+\log^+\left|\frac{A_v(0)}{\varphi(0,a_k)}\right|+$$
$$\log^+\log^+\frac{1}{|J(0)|}+\log^+\left[2n(0,\omega)+n\left(0,\frac{1}{\varphi(z,a_k)}\right)+n\left(0,\frac{1}{J(z)}\right)\right]+8\log v+10\leqslant 10\log^+T(\rho,\omega)+$$
$$12\log^+\frac{\rho}{\rho-r}+3\log^+\frac{1}{r}+\log^+\log^+|A_v(0)|+\log^+\log^+\left|\frac{A_v(0)}{\varphi(0,a_k)}\right|+\log^+\log^+\frac{1}{|J(0)|}+\log^+|a_k|+$$
$$\log^+\left[2n(0,\omega)+n\left(0,\frac{1}{J(z)}\right)+n\left(0,\frac{1}{\varphi(z,a_k)}\right)\right]+8\log v+10+3\log 2 \tag{6}$$

将(2),(6)式代入(4)式得

$$T(r,\omega)\leqslant(p-2v)T(r,\omega)<(p+1)\log^+T(\rho,\omega)+\left[12(p+1)\log^+\frac{\rho}{\rho-r}+3(p+1)\log^+\frac{1}{r}\right]+$$
$$\Big\{8(p+1)\log v+11(p+1)p\log a+\log\left|\frac{B_v(0)}{B_0(0)}\right|+\sum_{k=0}^{p}\log^+\left|\frac{\varphi(0,a_k)}{A_v(0)}\right|+\sum_{k=0}^{p}\log|A_k|+\sum_{k=0}^{p}\log^+|a_k|+$$
$$(p+1)\log^+\left[2n(0,\omega)+n\left(0,\frac{1}{J(z)}\right)\right]+\sum_{k=0}^{p}\log^+n\left(0,\frac{1}{\varphi(z,a_k)}\right)+\log^+\log^+|A_v(0)|+\log^+\log^+\frac{1}{|J(0)|}\Big\} \tag{7}$$

另外,
$$\sum_{k=1}^{p}\log^+\left|\frac{\varphi(0,a_k)}{A_v(0)}\right|=\sum_{k=1}^{p}\log^+\prod_{j=1}^{v}|\omega_j-a_k|\leqslant$$
$$\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{v}\log^+|\omega_j(0)|+v\log^+|a_k|+v\log 2\right)=p\sum_{j=1}^{v}\log^+|\omega_j(0)|+v\sum_{k=1}^{p}\log^+|a_k|+pv\log 2 \tag{8}$$

且
$$\log\frac{1}{|a_i-a_j|}+\log^+|a_i|+\log^+|a_j|<2\log 2+\log^+\frac{1}{|a_i,a_j|}(i\neq j) \tag{9}$$

由(8)、(9)式得

$$\sum_{k=0}^{p}\log^+\left|\frac{\varphi(0,a_k)}{A_v(0)}\right|+\sum_{k=0}^{p}\log|A_k|+\sum_{k=1}^{p}\log^+|a_k|\leqslant(p+1)\sum_{j=1}^{v}\log^+|\omega_j(0)|+(v+1)\sum_{k=1}^{p}\log^+|a_k|+pv\log 2+$$
$$2\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant p}\log\frac{1}{|a_i-a_j|}<(p+1)\sum_{j=1}^{v}\log^+|\omega_j(0)|+2\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant p}\log\frac{1}{|a_i,a_j|}+p(p-1)\log 2-$$
$$(p-v-2)\sum_{k=1}^{p}\log^+|a_k|+pv\log 2<(p+1)\sum_{j=1}^{v}\log^+|\omega_j(0)|+2\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant p}\log\frac{1}{|a_i,a_j|}+p(p-1+v)\log 2 \tag{10}$$

将(10)式代入(7)式后,根据引理 1,则有

$$T(r,\omega)<K\Big\{\sum_{k=1}^{p}\overline{N}(R,\omega=a_k)+1+\log^+\frac{R}{R-r}+\log^+R+\log^+\frac{1}{r}+\log a+$$
$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant p}\log\frac{1}{|a_i,a_j|}+\log^+\left[2n(0,\omega)+n\left(0,\frac{1}{J(z)}\right)\right]+\sum_{k=0}^{p}\log^+n\left(0,\frac{1}{\varphi(z,a_k)}\right)+$$
$$\log^+\log^+|A_v(0)|+\log^+\log^+\frac{1}{|J(0)|}+\sum_{j=1}^{v}\log^+|\omega_j(0)|+\log\left|\frac{B_v(0)}{B_0(0)}\right| \tag{11}$$

则定理 1 得证。　　证毕

参考文献:

[1] 顾永兴. 亚纯函数族的一个正规定则[J]. 中国科学,1979(数学专辑 I):267-274.

[2] HAYMAN W K. Research Problems in Function Theory[M]. London:Athlone Press, 1967.

[3] MIRANDA C. Sur un Nouveau Critère de Normalité Pour les Familles des Fonctions Holomorphes[J]. Bull Sci Math France,

1935,63(1):185-196.
[4] 桑汉英. 亚纯函数族结合微分多项式及重值的正规性[J]. 重庆师范学院学报(自然科学版),1996,13(4):70-80.
[5] 杨乐. 整函数与其导数的幅角分布和重值[J]. 中国科学,1979,8(2):731-751.
[6] 顾永兴,龚向宏. 关于 Hayman 方向[J]. 中国科学,1987,10(2):1019-1029.
[7] 杨乐. 值分布及其新研究[M]. 北京:科学出版社,1982.
[8] 顾永兴. 亚纯函数的正规族[M]. 成都:四川教育出版社,1991.
[9] 何育赞,萧修治. 代数体函数与常微分方程[M]. 北京:科学出版社,1988.

(责任编辑 黄 颖)