Banach 空间中显凸泛函的两个充分条件*

刘 彩 平
(重庆师范大学 数学与计算机科学学院,重庆 400047)

摘 要:在 Banach 空间中给出了显凸泛函的概念,然后利用泛函的 G-可微性,给出了显凸泛函的两个充分条件。即如果泛函 $J: V\to\mathbf{R}$ 在 V 中是 G-可微的,且其 G-微分满足 1) $\forall u,v\in V, J(u)\neq J(v)$,有 $J'(v,u-v)<J(u)-J(V)$ 或者 2),$\forall u,v\in V, J(u)\neq J(v)$,有 $J'(u,u-v)-J'(v,u-v)>0$,那么 J 在 V 中是显凸的。

关键词:显凸泛函;G-微分;充分条件
中图分类号:O221 **文献标识码**:A **文章编号**:1672-6693(2006)04-0018-03

Two Sufficient Conditions of Explicit Convex Functions in Banach Spaces

LIU Cai-ping
(College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: In this paper, the concept of explicit convex function is given, then tow sufficient conditions of explicit convex functions are obtained by using G-differentiability of functions in Banach space. They are that if $J: V\to\mathbf{R}$ is G-differentiable in V, either 1) and if for any $u,v\in V$ with $J(u)\neq J(v)$, we have $J'(v,u-v)<J(u)-J(v)$; or 2), if for any $u,v\in V$ with $J(u)\neq J(v)$, we have $J'(u,u-v)-J'(v,u-v)>0$, then J is explicit convex function in V.

Key words: explicit convex; G-differential; sufficient condition

在 $\mathbf{R}^n$ 中,函数的凸性具有许多优良的性质,人们先后提出了许多凸性和广义凸性,这些凸性在数学规划和最优化理论中占有重要的地位。作为一种新的凸性——函数的显凸性首次由薛和沈在文献[1]中提出,它不同于函数的凸与严格凸且在最优化理论中有较好的应用。杨在文献[2]中利用可微函数的梯度得到了显凸函数的两个重要性质,简和薛[3]及曾韧英[4]对显凸函数(文献[3]中称为半严格凸函数)的性质及其与凸函数、严格凸函数之间的关系进行了深入的讨论。但在无限维空间中对显凸泛函的性质还未见有过讨论,G-微分是有限维空间中梯度概念在无限维空间中的一种自然推广,这种可微性也是无限维空间中一种最弱的可微性,文献[5]给出了 Banach 空间中凸泛函与严格凸泛函的一些性质。受文献[2]与[5]的启发,本文首先在 Banach 空间中引入了显凸泛函的概念,随后利用 G-微分给出了 Banach 空间中显凸泛函的两个充分条件,推广了文献[2]的结果,充实了无限维空间中的凸性理论。

1 预备知识

定义 1[5] 设 V,H 是两个 Banach 空间,泛函 $J: V\to H, u,\phi\in V, t\in\mathbf{R}$,如果极限
$$\lim_{t\to 0}\frac{J(u+t\phi)-J(u)}{t}$$
存在,则称 J 在点 u 沿方向 ϕ 是 G-可微的,极限称为 J 在点 u 沿方向 ϕ 的 G-微分,记为 $J'(u,\phi)$。若 J 在点 u 沿任何方向 $\phi\in V$ 都是 G-可微的,则称 J 在点 u 是 G-可微的。

引理 1[5] (G-微分对方向的齐次性)设 V 是 Banach 空间中的一个子集,J 在点 $u\in V$ 沿方向 $\phi\in V$ 是 G-可微的,则对 $\forall\lambda\in\mathbf{R}$,有
$$J'(u,\lambda\phi)=\lambda J'(u,\phi)。$$

引理 2[5] (Banach 空间中泛函情形的 Lagrange 公式)设 V 是 Banach 空间中的一个子集,泛函 $J: V\to\mathbf{R}, \forall u+\theta\phi\in V(\theta\in[0,1])$,沿方向

* 收稿日期:2006-06-05
作者简介:刘彩平(1974-),女,黑龙江齐齐哈尔人,硕士研究生,研究方向为最优化理论与算法。

$\phi \in V$ 是 G- 可微的,则 $\exists \theta_0 \in (0,1)$,使得

$$J(u+\phi) - J(u) = J'(u+\theta_0\phi, \phi)。$$

2 主要结果

定义 2 设 V 是 Banach 空间中的非空开凸集,泛函 $J: V \to \mathbf{R}$,称 J 在 V 中是显凸的,若 $\forall u, v \in V$, $\forall \alpha \in (0,1)$, $J(u) \neq J(v)$,有

$$J(\alpha u + (1-\alpha)v) < \alpha J(u) + (1-\alpha)J(v)。$$

定理 1 设 V 是 Banach 空间中的非空开凸集,泛函 $J: V \to \mathbf{R}$ 在 V 中是 G- 可微的,若 $\forall u, v \in V$, $J(u) \neq J(v)$,有

$$J(u) > J(v) + J'(v, u-v),$$

则 J 在 V 中是显凸的。

证明 只需证明时 $\forall u, v \in V$, $J(u) \neq J(v)$ 时,$\forall \alpha \in (0,1)$,有

$$J(\alpha u + (1-\alpha)v) < \alpha J(u) + (1-\alpha)J(v)$$

即可。

不失一般性,不妨设 $J(u) > J(v)$,则 $\forall \alpha \in (0,1)$, $z = \alpha u + (1-\alpha)v$,都有

$$J(z) \neq J(u) \tag{1}$$

反证,若 $\exists \alpha_0 \in (0,1)$, $z_0 = \alpha_0 u + (1-\alpha_0)v$,使得

$$J(z_0) = J(u) \tag{2}$$

则 $\forall \beta \in (0,1)$, $w = \beta u + (1-\beta)z_0$,有

$$J(w) = J(u) \tag{3}$$

事实上,若 $\exists \beta_0 \in (0,1)$,使得

$$J(\beta_0 u + (1-\beta_0)z_0) \neq J(u)。$$

下面分两种情况讨论。

1) $$J(\beta_0 u + (1-\beta_0)z_0) > J(u) \tag{4}$$

由(2)式知

$$J(\beta_0 u + (1-\beta_0)z_0) > J(z_0) \tag{5}$$

因 V 是开凸集,故 $\exists \varepsilon > 0$ 且充分小,记 $A = (-\varepsilon + 0, 1+\varepsilon)$,使得 $\forall \beta \in A$,有 $\beta u + (1-\beta)z_0 \in V$,令 $f(\beta) = J(\beta u + (1-\beta)z_0) = J(z_0 + \beta(u-z_0))$, $\beta \in A$。由 J 在 V 中是 G- 可微的,则 $\forall \beta \in A$,有

$$f'(\beta) = \lim_{\delta \to 0} \frac{f(\beta+\delta) - f(\beta)}{\delta} =$$

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{J(z_0 + \beta(u-z_0) + \delta(u-z_0)) - J(z_0 + \beta(u-z_0))}{\delta} =$$

$$J'(z_0 + \beta(u-z_0), u-z_0)$$

即 $f(\beta)$ 在 A 中的导数存在,且

$$f'(\beta) = J'(z_0 + \beta(u-z_0), u-z_0)。$$

从而,可得 f 在 $[0,1]$ 上是连续的,故 f 在 $[0,1]$ 上可取到极大值,设极大值在 $\bar{\beta}$ 处取到。于是根据(4)式与(5)式得 $\bar{\beta} \in (0,1)$,故有

$$0 = f'(\bar{\beta}) = J'(z_0 + \bar{\beta}(u-z_0), u-z_0) \tag{6}$$

且

$$J(z_0 + \bar{\beta}(u-z_0)) > J(u)。 \tag{7}$$

从而由条件知

$$J(u) > J(z_0 + \bar{\beta}(u-z_0)) + J'(z_0 + \bar{\beta}(u-z_0), u - (z_0 + \bar{\beta}(u-z_0))) \tag{8}$$

根据引理 1 及(6)、(8)式得

$$J(u) > J(z_0 + \bar{\beta}(u-z_0)),$$

此与(7)式矛盾。

2) $J(\beta_0 u + (1-\beta_0)z_0) < J(u)$

由 $J(u) > J(v)$ 与 $J(z_0) = J(u)$ 得

$$J(\beta_0 u + (1-\beta_0)z_0) < J(z_0), J(v) < J(z_0)。$$

令 $g(\lambda) = J(\lambda v + (1-\lambda)(\beta_0 u + (1-\beta_0)z_0)) = J(\beta_0 u + (1-\beta_0)z_0 + \lambda(v - (\beta_0 u + (1-\beta_0)z_0)))$

与 1)同理可证,存在 $\lambda_0 \in (0,1)$,使得 $g(\lambda)$ 在 λ_0 处达到极大值。故有

$$0 = g'(\lambda_0) = J'(\beta_0 u + (1-\beta_0)z_0 + \lambda_0(v - \beta_0 u - (1-\beta_0)z_0), v - \beta_0 u - (1-\beta_0)z_0) \tag{9}$$

且

$$J(\beta_0 u + (1-\beta_0)z_0 + \lambda_0(v - \beta_0 u - (1-\beta_0)z_0)) > J(u) \tag{10}$$

由条件得

$$J(u) > J(\beta_0 u + (1-\beta_0)z_0 + \lambda_0(v - \beta_0 u - (1-\beta_0)z_0)) + J'(\beta_0 u + (1-\beta_0)z_0 + \lambda_0(v - \beta_0 u - (1-\beta_0)z_0), u - (\beta_0 u + (1-\beta_0)z_0 + \lambda_0(v - \beta_0 u - (1-\beta_0)z_0)))$$

注意到 $z_0 = \alpha_0 u + (1-\alpha_0)v$,根据引理 1、(9)式及上式得到

$$J(u) > J(\beta_0 u + (1-\beta_0)z_0 + \lambda_0(v - \beta_0 u - (1-\beta_0)z_0)),$$

此与(10)式矛盾。

综上由 1),2)证得(3)式成立。

设 $f(\beta) = J(\beta u + (1-\beta)z_0)$, $\beta \in A$,根据(3)式得 $f(\beta) =$ 常数,$\beta \in [0,1]$,又因 $f'(\beta) = J'(z_0 + \beta(u-z_0), u-z_0)$, $\beta \in A$,所以有

$$0 = f'_-(1) = f'(1) = J'(u, u-z_0) \tag{11}$$

因 $z_0 = \alpha_0 u + (1-\alpha_0)v$ 得

$$u - z_0 = (1-\alpha_0)(u-v),$$

根据(11)式和引理 1 可得 $J'(u, u-v) = 0$。由条件知 $J(v) > J(u) + J'(u, u-v)$,故 $J(v) > J(u)$,与 $J(u) > J(v)$ 矛盾,从而(1)式成立。即 $\forall \alpha \in (0,1)$, $z = \alpha u + (1-\alpha)v$,都有 $J(z) \neq J(u)$。

若 $J(z) = J(v)$,因 $J(u) > J(v)$,则 $\forall \alpha \in (0,1)$,有 $J(z) < \alpha J(u) + (1-\alpha)J(v)$。

若 $J(z) \neq J(v)$，则由条件知 $\forall \alpha \in (0,1)$，有

$$J(v) > J(z) + J'(z, v - z) \quad (12)$$

又 $J(z) \neq J(u)$，由条件知 $\forall \alpha \in (0,1)$，有

$$J(u) > J(z) + J'(z, u - z) \quad (13)$$

因为 $z = \alpha u + (1-\alpha)v$，所以有

$$\begin{aligned} v - z &= (-\alpha)(u - v); \\ u - z &= (1-\alpha)(u - v) \end{aligned} \quad (14)$$

根据(12)、(13)、(14)式和引理 1 得

$$J(v) > J(z) - \alpha J'(z, u - v) \quad (15)$$

$$J(u) > J(z) + (1-\alpha) J'(z, u - v) \quad (16)$$

$(15) \times (1-\alpha) + (16) \times \alpha$ 得

$$J(z) < \alpha J(u) + (1-\alpha) J(v),$$

即 $J(\alpha u + (1-\alpha)v) < \alpha J(u) + (1-\alpha) J(v)$。

综上证得，$\forall u, v \in V$，$\forall \alpha \in (0,1)$，$J(u) \neq J(v)$ 有

$$J(\alpha u + (1-\alpha)v) < \alpha J(u) + (1-\alpha) J(v),$$

即 J 在 V 中是显凸的。　　证毕

定理 2　设 V 是 Banach 空间中的非空开凸集，泛函 $J: V \to \mathbf{R}$ 在 V 中是 G- 可微的，若 $\forall u, v \in V$，$J(u) \neq J(v)$，有

$$J'(u, u - v) - J'(v, u - v) > 0,$$

则 J 在 V 中是显凸的。

证明　$\forall u, v \in V$，$J(u) \neq J(v)$，由 $J: V \to \mathbf{R}$ 在 V 中是 G- 可微的，根据引理 2 知 $\exists \theta_0 \in (0,1)$，使得

$$J(u) - J(v) = J'(v + \theta_0(u - v), u - v) \quad (17)$$

由定理 1 知只需证得

$$J'(v + \theta_0(u - v), u - v) > J'(v, u - v)$$

即可。

下面分两种情况讨论。

1) $J(v) \neq J(v + \theta_0(u - v))$

由条件得

$$J'(v + \theta_0(u - v), v + \theta_0(u - v) - v) > J'(v, v + \theta_0(u - v) - v),$$

因 $\theta_0 \in (0,1)$ 有

$$J'(v + \theta_0(u - v), u - v) > J'(v, u - v) \quad (18)$$

由(17)与(18)式得 $J(u) - J(v) > J'(v, u - v)$。

2) $J(v) = J(v + \theta_0(u - v))$

下证 $\exists \alpha_0 \in (0,1)$，$w_0 = \alpha_0 v + (1-\alpha_0)(v + \theta_0(u - v))$，使得

$$J(v) = J(v + \theta_0(u - v)) \neq J(w_0) \quad (19)$$

反证，若 $\forall \alpha \in (0,1)$，$w = \alpha v + (1-\alpha)(v + \theta_0(u - v))$，都有 $J(v) = J(v + \theta_0(u - v)) = J(w)$，则令 $g(\alpha) = J(\alpha(v + \theta_0(u - v)) + (1-\alpha)v)$，$\alpha \in [0,1]$，于是得 $g(\alpha) =$ 常数，$\forall \alpha \in [0,1]$。从而有 $0 = g'_-(1) = g'(1) = J'(v + \theta_0(u - v), \theta_0(u - v))$，故 $J'(v + \theta_0(u - v), u - v) = 0$，由(17)式知 $J(u) = J(v)$，与 $J(u) \neq J(v)$ 矛盾，从而(19)式成立。

由条件得

$$J'(v, v - w_0) - J'(w_0, v - w_0) > 0 \quad (20)$$

$$J'(v + \theta_0(u - v), v + \theta_0(u - v) - w_0) - J'(w_0, v + \theta_0(u - v) - w_0) > 0 \quad (21)$$

因为 $w_0 = \alpha_0 v + (1-\alpha_0)(v + \theta_0(u - v))$，从而有

$$v - w_0 = -\theta_0(1-\alpha_0)(u - v);$$

$$v + \theta_0(u - v) - w_0 = \theta_0 \alpha_0 (u - v) \quad (22)$$

根据(20)、(21)、(22)式得

$$J'(w_0, u - v) - J'(v, u - v) > 0 \quad (23)$$

$$J'(v + \theta_0(u - v), u - v) - J'(w_0, u - v) > 0 \quad (24)$$

(23) + (24) 式得

$$J'(v + \theta_0(u - v), u - v) - J'(v, u - v) > 0,$$

由(17)式知 $J(u) - J(v) > J'(v, u - v)$。

综上证得 $\forall u, v \in V$，$J(u) \neq J(v)$，有 $J(u) > J(v) + J'(v, u - v)$，根据定理 1 知 J 在 V 中是显凸的。　　证毕

参考文献：

[1] 薛声家，沈舜莺. 十一种凸性[J]. 运筹学杂志，1989，8(1)：72-75.

[2] YANG X M. Two Gradient Properties Of Explicitly Convex Functions[J]. J Australian Math Society Ser A，1995，58(1)：404-410.

[3] 简金宝，薛声家. 显凸函数与严格凸函数的新特征[J]. 广西大学学报(自然科学版)，1996，21(3)：213-217.

[4] 曾韧英. Banach 空间的强光滑性及对偶空间的严格凸性[J]. 重庆师范学院学报(自然科学版)，1994，11(2)：62-65.

[5] CéA J. 最优化理论与算法[M]. 胡毓达，郑权译. 北京：高等教育出版社，1982.

(责任编辑　黄　颖)