古典概型中随机事件相互独立的充要条件*

王 毅 刚
(华南师范大学 数学科学学院概率统计系，广州 510631)

摘　要：在古典概型和概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$[1]上，讨论随机事件相互独立的充要条件。证明概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上随机事件相互独立的充要条件是随机事件可表示成不同轴条事件。

关键词：概率空间；概率；样本空间；随机事件；相互独立性；条事件
中图分类号：O211.1　　文献标识码：A　　文章编号：1672-6693(2006)04-0021-04

Sufficient and Necessary Condition of Independence About Random Events in Classic Probability Model

WANG Yi-gang
(School of Mathematics Science, South China Normal University, Guangzhou 510631, China)

Abstract: On the basis of classic probability model and probability space $(\Omega,\mathscr{F},P)$, this thesis discusses the sufficient and necessary condition of independence about random events. We have proved that random events are independent if and only if random events can be transformed into strip events and different axis.

Key words: probability space; probability; sample space; random event; independent; strip event

本文的概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$和随机事件与文献[2]中相同并均在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上讨论。

本文规定 N 为自然数集；n 为大于 1 的自然数；$r_1,r_2,\cdots,r_t$ 均表示对任意 $t\in\{1,2,\cdots,n\}$，任意 $r_k\in\{1,2,\cdots,n\}$，$k=1,2,\cdots,t$，$r_1<r_2<\cdots<r_t$；用 $\#A$ 表示集合 A 中的元素个数；$\#\Omega=m=v_1v_2\cdots v_n$，$v_i\in\mathbf{N}$，$v_i>1$，$s_i\in\mathbf{N}$，$s_i<v_i$，$i=1,2,\cdots,n$，若不存在此分解，则 m 为素数，由文献[2]中定理 4 知此概率空间中不存在相互独立的随机事件；将随机事件 A 和 B 相互独立表为 $A\amalg B$，随机事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立表示为 $\coprod_{i=1}^{n}A_i$。

定义 1　设 $\Omega=\{a_{i_1i_2\cdots i_n}\mid i_j=1,2,\cdots,v_j,j=1,2,\cdots,n\}$，$A_k=\{a_{i_1i_2\cdots i_n}\mid i_j=1,2,\cdots,v_j,j\neq k,j=1,2,\cdots,n,i_k=b_1,b_2,\cdots,b_{s_k},b_t\in\mathbf{N},t=1,2,\cdots,s_k,1\leqslant b_1<b_2<\cdots<b_{s_k}\leqslant v_k\}$，$k=1,2,\cdots,n$。称 A_k 为 n 维空间 k 轴条事件，或简称为条事件。条事件为随机事件，若 $1\leqslant i<j\leqslant n$，称 A_i 和 A_j 是不同轴条事件。

引理 1　n 维空间 n 个不同轴的条事件是相互独立的。

证明　设 Ω 和 A_k 与定义 1 一样，计算可得

$$P(A_k)=\frac{S_k}{v_k},k=1,2,\cdots,n,P(A_{r_1}A_{r_2}\cdots A_{r_t})=\frac{s_{r_1}s_{r_2}\cdots s_{r_t}}{v_{r_1}v_{r_2}\cdots v_{r_t}}=P(A_{r_1})P(A_{r_2})\cdots P(A_{r_t}),$$

从而 $\coprod_{i=1}^{n}A_i$。　证毕

引理 2　$$\#\bigcap_{i=1}^{n}g_i(x_i)=\prod_{i=1}^{n}h_i(x_i)\tag{1}$$

若(1)式在 $x_i=0,1$，$i=1,2,\cdots,n$ 时成立，则 $x_i=0,\pm1$，$i=1,2,\cdots,n$ 时(1)式成立。其中

$$g_i(x)=\begin{cases}A_i, x=1\\ \overline{A}_i, x=-1\\ \Omega, x=0\end{cases},h_i(x)=\begin{cases}s_i, x=1\\ v_i-s_i, x=-1\\ v_i, x=0\end{cases}$$

$i=1,2,\cdots,n$。

证明　设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中有 c 个 -1，用数学归纳法证当 $1\leqslant c\leqslant n$ 时(1)式成立。

* 收稿日期：2005-10-20　　修回日期：2006-01-20
作者简介：王毅刚(1964-)，男，江苏苏州人，讲师，硕士，研究方向为应用统计。

先证 $c=1$，不妨设 $x_1=-1$，$g_1(-1)=\bar{A}_1$，

$$\bigcap_{i=1}^{n} g_i(x_i)=\bar{A}_1\bigcap_{i=2}^{n} g_i(x_i)=\bigcap_{i=2}^{n} g_i(x_i)-A_1\bigcap_{i=2}^{n} g_i(x_i),$$

$$\#\bigcap_{i=1}^{n} g_i(x_i)=v_1\prod_{i=2}^{n} h_i(x_i)-s_1\prod_{i=2}^{n} h_i(x_i)=\prod_{i=1}^{n} h_i(x_i)$$

上式在 $x_1=0$ 或 ±1 时成立，类似可证(1)式在 $c=1$ 时成立。

假定 $c=k$ 时成立，$k<n$，证明 $c=k+1$ 时成立，为简单，不妨设 $x_1=-1$，则

$$\bigcap_{i=1}^{n} g_i(x_i)=\bigcap_{i=2}^{n} g_i(x_i)-\overline{g_1(x_1)}\bigcap_{i=2}^{n} g_i(x_i)$$

$$\#\bigcap_{i=1}^{n} g_i(x_i)=v_1\prod_{i=2}^{n} h_i(x_i)-s_1\prod_{i=2}^{n} h_i(x_i)=$$

$$(v_1-s_1)\prod_{i=1}^{n-1} h_i(x_i)=\prod_{i=1}^{n} h_i(x_i)$$

(1)式在 $x_1=0,\pm1$ 时成立，类似可证(1)式在 $c=k+1$ 时成立，从而 $1\leqslant c\leqslant n$ 时(1)式均成立，即 $x_i=0,\pm1,i=1,2,\cdots,n$ 时(1)式成立。 证毕

引理3 若 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq(y_1,y_2,\cdots,y_n)$[3]，则 $\bigcap_{i=1}^{n} g_i(x_i)$ 与 $\bigcap_{i=1}^{n} g_i(y_i)$ 互不相容，其中

$$g_i(x)=\begin{cases}A_i, & x=1\\ \bar{A}_i, & x=-1\end{cases}$$

$x_i=\pm1,y_i=\pm1,i=1,2,\cdots,n$。

证明 由 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，存在 $j\in\{1,2,\cdots,n\}$，有 $x_j\neq y_j$，从而 $g_j(x_j)=\overline{g_j(y_j)}$，所以 $\bigcap_{i=1}^{n} g_i(x_i)$ 与 $\bigcap_{i=1}^{n} g_i(y_i)$ 互不相容。 证毕

引理4 下式对任意自然数 t 均成立

$$\sum_{x_1=-1}^{1}\sum_{x_2=-1}^{1}\cdots\sum_{x_t=-1}^{1}\bigcap_{i=1}^{t} g_i(x_i)=\Omega\text{[4]}\tag{2}$$

其中 $g_i(x)=\begin{cases}A_i, & x=1\\ \bar{A}_i, & x=-1\end{cases}$，$A_i\in\mathscr{F}$，$i=1,2,\cdots,t$。

证明 用数学归纳法证明。

$t=1$ 时显然成立；假定 $t=k$ 时成立，下面证明 $t=k+1$ 时成立。

$$\sum_{x_1=-1}^{1}\sum_{x_2=-1}^{1}\cdots\sum_{x_{k+1}=-1}^{1}\bigcap_{i=1}^{k+1} g_i(x_i)=$$

$$A_{k+1}\sum_{x_1=-1}^{1}\sum_{x_2=-1}^{1}\cdots\sum_{x_k=-1}^{1}\bigcap_{i=1}^{k} g_i(x_i)+$$

$$\overline{A_{k+1}}\sum_{x_1=-1}^{1}\sum_{x_2=-1}^{1}\cdots\sum_{x_k=-1}^{1}\bigcap_{i=1}^{k} g_i(x_i)=$$

$$\Omega\sum_{x_1=-1}^{1}\sum_{x_2=-1}^{1}\cdots\sum_{x_k=-1}^{1}\bigcap_{i=1}^{k} g_i(x_i)=\Omega$$

引理得证。 证毕

引理5 若(1)式在 $x_i=\pm1,i=1,2,\cdots,n$ 时成立，将 $\bigcap_{i=1}^{n} g_i(x_i)$ 设为如下集合总是可行的

$$\bigcap_{i=1}^{n} g_i(x_i)=\{a_{i_1,i_2,\cdots,i_n}\mid i_j\in B_j(x_j),j=1,2,\cdots,n\}\tag{3}$$

其中 $$g_i(x)=\begin{cases}A_i, & x=1\\ \bar{A}_i, & x=-1\end{cases},$$

$$B_i(x)=\begin{cases}\{1,2,\cdots,s_i\}, & x=1\\ \{s_i+1,s_i+2,\cdots,v_i\}, & x=-1\end{cases},$$

$i=1,2,\cdots,n$。

证明 引理2计算了 $x_i=\pm1,i=1,2,\cdots,n$ 时 $\bigcap_{i=1}^{n} g_i(x_i)$ 包含的元素个数，引理4和引理3说明(2)式左边是对 Ω 的一个剖分[1]，所以将 $\bigcap_{i=1}^{n} g_i(x_i)$ 设为(3)式右边是可行的。 证毕

引理6 若(3)式成立，则(3)式在

$$g_i(x)=\begin{cases}A_i, & x=1\\ \bar{A}_i, & x=-1\\ \Omega, & x=0\end{cases},$$

$$B_i(x)=\begin{cases}\{1,2,\cdots,s_i\}, & x=1\\ \{s_i+1,s_i+2,\cdots,v_i\}, & x=-1\\ \{1,2,\cdots,v_i\}, & x=0\end{cases},$$

$i=1,2,\cdots,n$ 时仍然成立，即 $x_i=0,\pm1,i=1,2,\cdots,n$ 时(3)式成立。

证明 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中有 c 个0，用数学归纳法证当 $1\leqslant c\leqslant n$ 时(3)式成立。

先证 $c=1$ 时，不妨设 $x_1=0$，$g_1(0)=\Omega=g_1(1)+g_1(-1)$，由

$$g_1(0)\bigcap_{i=2}^{n} g_i(x_i)=g_1(1)\bigcap_{i=2}^{n} g_i(x_i)+$$

$$g_1(-1)\bigcap_{i=2}^{n} g_i(x_i)=\{a_{i_1,i_2,\cdots,i_n}\mid i_1\in B_1(0),\ i_j\in B_j(x_j),j=2,\cdots,n\}\tag{4}$$

其中 $B_1(0)=\{1,2,\cdots,v_1\}$，

$$B_i(x)=\begin{cases}\{1,2,\cdots,s_i\}, & x=1\\ \{s_i+1,s_i+2,\cdots,v_i\}, & x=-1\end{cases},$$

$i=2,3,\cdots,n$。

所以(3)式在 $x_1=0,\pm1$ 时成立，类似可证(3)式在 $c=1$ 时成立。

假定 $c=k$ 时成立，$k<n$，证明 $c=k+1$ 时成立，为简单，不妨设 $x_1=0$，则(4)式同样成立，其中

$$B_1(0)=\{1,2,\cdots,v_1\},$$

$$B_i(x)=\begin{cases}\{1,2,\cdots,s_i\}, & x=1\\ \{s_i+1,s_i+2,\cdots,v_i\}, & x=-1\\ \{1,2,\cdots,v_i\}, & x=0\end{cases},$$

从而 $1 \leqslant c \leqslant n$ 时(3) 式成立,即 $x_i = 0, \pm 1$, $i = 1,2,\cdots,n$ 时(3) 式成立。　证毕

引理 7　按(3) 式的设定则有

$A_r = \{a_{i_1,i_2,\cdots,i_n} \mid i_r = 1,2,\cdots,s_r, i_j = 1,2,\cdots,v_j, j \neq r, j = 1,2,\cdots,n\}, r = 1,2,\cdots,n$。

证明　由引理 6,取 $x_r = 1, x_j = 0, j \neq r, j = 1,2,\cdots,n$,将 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 代入(3) 式即证。　证毕

定理 1　$\coprod_{i=1}^{n} A_i$ 的充要条件是存在 $s_i, v_i, i = 1,2,\cdots,n$,使(1) 式成立。

证明　必要性。设 m 的素数分解式为 $p_1 p_2 \cdots p_u$, $\#A_i = m_i, i = 1,2,\cdots,n$,由 $\coprod_{i=1}^{n} A_i$ 知,$u \geqslant n$[2],设 $u = an + b$,a 是自然数,b 为非负整数,$0 \leqslant b < n$。因为

$$P(A_i A_j) = P(A_i)P(A_j) = \frac{m_i m_j}{m^2}$$

且相互独立随机事件的交积非空[2],知 $\#A_i A_j$ 为大于 1 的整数,则有 $\#A_i A_j = \dfrac{m_i m_j}{m}$,即

$$m \mid m_i m_j{}^{[5]}, 1 \leqslant i < j \leqslant n, i \in \mathbf{N}, j \in \mathbf{N} \quad (5)$$

设 $m_i = x_i p_1{}^{y_{i,1}} p_2{}^{y_{i,2}} \cdots p_u{}^{y_{i,u}}$,其中 $x_i \in \mathbf{N}$, $y_{i,k} = 0$ 或 1, $k = 1,2,\cdots,u$, $i = 1,2,\cdots,n$。由(5) 式有

$$y_{i,k} + y_{j,k} \geqslant 1, k = 1,2,\cdots,u, 1 \leqslant i < j \leqslant n。$$

由 A_i 为随机事件,知 $y_{i,1}, y_{i,2}, \cdots, y_{i,u}$ 中至少有一个为 0,否则 $m_i \geqslant m, i = 1,2,\cdots,n$。

将 $y_{i,k}$ 写成 n 行 u 列的矩阵 $(y_{i,k})_{n \times u}$,这个矩阵每列中至多有一个 0 元素,每行中至少有一个 0 元素,于是至少有 n 列中有 0 元素,不为 0 的元素全为 1,由矩阵知识,可由列交换将该矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & * & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & * & \cdots & \square \\ \square & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & * \end{pmatrix} = (z_{i,k})_{n \times u}$$

其中 $*$ 可能为 0 也可能为 1,这个矩阵每列中至多有一个 0。

从而可使

$$m_i = x_i q_1 q_2 \cdots q_{i-1} q_{i+1} \cdots q_n q_{n+1}{}^{z_{i,n+1}} \cdots q_u{}^{z_{i,u}},$$

其中 $q_1 q_2 \cdots q_u$ 是 $p_1 p_2 \cdots p_u$ 的一个排列,

$$m_i = v_1 v_2 \cdots v_{i-1} s_i v_{i+1} \cdots v_n, i = 1,2,\cdots,n, \quad (6)$$

其中 $v_j = q_j, a = 1, b = 0, j = 1,2,\cdots,n$; $v_j = q_j q_{n+j} \cdots q_{an+j}, a \geqslant 1, 1 \leqslant j \leqslant b$; $v_j = q_j, a = 1, j > b$, $v_j = q_j q_{n+j} \cdots q_{(a-1)n+j}, a > 1, b < j \leqslant n$, s_i 为自然数,则 v_i 是大于 1 的自然数,$i = 1,2,\cdots,n$,且 $m = v_1 v_2 \cdots v_n$。

由 $\coprod_{i=1}^{t} A_{r_i}$ 有

$$P(A_{r_1} A_{r_2} \cdots A_{r_t}) =$$

$$P(A_{r_1}) P(A_{r_2}) \cdots P(A_{r_t}) = \frac{s_{r_1} s_{r_2} \cdots s_{r_t}}{v_{r_1} v_{r_2} \cdots v_{r_t}}。$$

所以(1) 式在 $x_i = 0,1, i = 1,2,\cdots,n$ 时成立,必要性得证。

充分性。按引理 5 的设定,由引理 7 知 A_i 设为 n 维空间 i 轴条事件,由引理 1 得证。　证毕

定理 2　随机事件相互独立的充要条件是随机事件可表示成不同轴条事件。

此定理的必要性由定理 1 和定义 1 易证,充分性在引理 1 已证。

例 1　设 $\Omega = \{1,2,\cdots,6\}$,写出 2 个相互独立的随机事件。

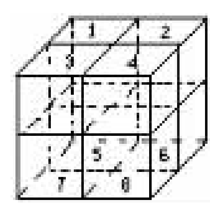
解　由 $\#\Omega = 6 = 2 \times 3$ 知可将 Ω 表示成边长分别为 2 和 3 的长方形如下

1	4	3
6	2	5

设 $A = \{1,4,3\}$, $B = \{1,6\}$,因 A 和 B 可表为二维空间中不同轴条事件,所以 $A \coprod B$。

例 2　设 $\Omega = \{1,2,\cdots,8\}$,写出 3 个相互独立的随机事件。

解　由 $\#\Omega = 8 = 2 \times 2 \times 2$ 知可将 Ω 表示成边长分别为 2 的立方体如下



设 $A_1 = \{1,2,3,4\}$, $A_2 = \{1,3,5,7\}$, $A_3 = \{1,2,5,6\}$,因 A_1, A_2 和 A_3 可表为三维空间中不同轴条事件,所以 $\coprod_{i=1}^{3} A_i$。

例 3　设 $\Omega = \{1,2,\cdots,9,a,b,c\}$, 1) 写出 2 个相互独立的随机事件,其中一随机事件含有 2 个元素 ;2) 写出 2 个相互独立的随机事件,其中一随机事件含有 3 个元素。

解　1) 由 $\#\Omega = 12 = 2 \times 6$ 知可将 Ω 表示成边长分别为 2 和 6 的长方形如下:

1	2	3	4	5	6
7	8	9	a	b	c

设 $A = \{1,7\}$, $B = \{1,2,\cdots,6\}$,因 A 和 B 可表

为二维空间中不同轴条事件，所以 $A \amalg B$；

2）由 $\#\Omega = 12 = 3 \times 4$ 知可将 Ω 表示成边长分别为 3 和 4 的长方形如下：

1	2	3	4
7	8	9	a
5	6	b	c

设 $A = \{1,5,7\}$，$B = \{7,8,9,a\}$，因 A 和 B 可表为二维空间中不同轴条事件，所以 $A \amalg B$。

定理 2 的几何意义是若 Ω 能表示成边长均不为 1 的 n 维空间中的长方体（形），则可从 n 个相互垂直的方向切该长方体（形），在每一方向上可切一刀或平行切两刀，切一刀时将该长方体（形）切成两部分，任取一部分，切两刀时取两刀中间的部分，且这样取出的 n 个部分是相互独立的。若 Ω 不能表示成边长均不为 1 的 n 维空间中的长方体（形），则 Ω 中不存在 n 个相互独立的随机事件。若 Ω 不能表示成二维空间中边长均不为 1 的长方形，则 Ω 中不存在相互独立的随机事件。若概率空间（$\Omega,\mathscr{F},P$）上存在 n 个相互独立的随机事件，则 Ω 一定可表为边长均不为 1 的 n 维空间中的长方体（形），且这 n 个随机事件一定可按上面的方法切出。从这种几何意义可知 $m = v_1 v_2 \cdots v_n$ 分解的不唯一性不影响文章的结果。例 3 说明分解的不唯一性不影响文章的结果。

参考文献：

[1] 梁之舜. 概率论及数理统计[M]. 北京：高等教育出版社，2005.

[2] 王毅刚. 古典概型中随机事件相互独立性与素数的关系[J]. 重庆师范大学学报（自然科学版），2005，22（3）：70-71.

[3] 赵树嫄. 线性代数[M]. 北京：中国人民大学出版社，1988.

[4] 沈恒范. 概率论与数理统计教程[M]. 北京：高等教育出版社，2003.

[5] 孙本旺. 数学分析[M]. 长沙：湖南人民出版社，1981.

（责任编辑 黄 颖）