关于弧式连通函数的一个准则*

王　刚[1]，刘彩平[2]
(1. 四川农业大学都江堰分校 基础科学部，四川 都江堰 611830；2. 重庆师范大学 数学与计算机科学学院，重庆 400047)

摘　要：给出了弧式连通函数的一个准则，即定义在弧式连通集上的一个函数是弧式连通函数当且仅当在同一弧式连通集上，此函数是 Q-连通的且中间弧式连通的。

关键词：弧式连通集；弧式连通函数；Q-连通函数；准则
中图分类号：O221.2　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1672-6693(2006)04-0025-03

A Criterion for Arcwise Connected Functions

WANG Gang[1]，*LIU Cai-ping*[2]
(1. Dept. of Foundational Courses, Sichan Agricultural University Dujiangyan Campus, Dujiangyan Sichan 611830；
2. College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract：In this paper, a criterion for arcwise connected functions is given, i. e. a function defined on an arcwise connected set is an arcwise connected function if and only if it is Q-connected and intermediate arcwise connected on the same arcwise set.

Key words：arcwise connected set；arcwise connected function；Q-connected function；criteria

1970 年 Ortega 和 Rheinboldt 在文献[1]中引入了广义凸函数，将连结两个给定点的线段替换为连结这两点的一个连续弧，他们称此函数为定义在弧式连通集上的弧式连通函数。按照 Ortega 和 Rheinboldt 的方法，1980 年 Avriel 和 Zang 在文献[2]中将拟凸、严格拟凸、强拟凸、伪凸和严格伪凸函数进行推广，得到相应形式的弧式连通函数，并给出了它们之间的一些内部关系。接下来，1983 年 Singh 在文献[3]中和 1985 年 Mukherjee 和 Yadav 在文献[4]中也讨论了弧式连通集和弧式连通函数的一些性质。

关于凸函数，许多文章给出了中点凸函数成为凸函数的条件，1973 年 Roberts 和 Varberg 在文献[5]中关于这个问题给出了系统的论述。近年来，Nikodem 在文献[6]中得到了下列一个有趣的结果。

定理 1　C 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个开凸子集，f: $C\to\mathbf{R}$，f 是凸函数当且仅当 f 在 C 上是拟凸函数，且有

$$f\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\right)\leqslant\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(y),\ \forall x,y\in C。$$

本文在已有工作的基础上[7,8]，给出了关于弧式连通函数的一个准则，推广了定理 1 的结果。

1　预备知识

本文中将使用如下记号，$\mathbf{R}$ 表示实数集，$\mathbf{R}^n$ 表示 n 维欧氏空间。

定义 1[1,2]　称 $C\subseteq\mathbf{R}^n$ 是弧式连通集(AC)，如果对于每对点 $x,y\in C$，存在一个定义在 $[0,1]\subset\mathbf{R}$ 上取值在 C 上的连续向量值函数 $H_{x,y}$(称为一个弧)，即 $H_{x,y}$: $[0,1]\to C$，使得 $H_{x,y}(0)=x$，$H_{x,y}(1)=y$。

定义 2[1,2]　设 $C\subseteq\mathbf{R}^n$ 是 AC 集，f: $C\to\mathbf{R}$，称 f 是弧式连通函数(CN)，如果 $\forall x,y\in C$，存在一个弧 $H_{x,y}\subseteq C$，使得 $f(H_{x,y}(\lambda))\leqslant(1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)$，$\forall\lambda\in[0,1]$。

定义 3[1,2]　设 $C\subseteq\mathbf{R}^n$ 是 AC 集，f: $C\to\mathbf{R}$，称 f 是 Q-连通函数(QCN)，如果 $\forall x,y\in C$，有 $f(x)\leqslant f(y)\Rightarrow\exists H_{x,y}\subseteq C$，使得

* 收稿日期：2006-11-15
资助项目：国家自然科学基金(No. 10471159)
作者简介：王刚(1962-)，男，成都人，副教授，研究方向为应用数学。

$$f(H_{x,y}(\lambda)) \leqslant f(y), \forall \lambda \in [0,1]。$$

2 主要结果

定理2 设$C \subseteq \mathbf{R}^n$是关于弧$H_{x,y}$的非空AC集，$f: C \to \mathbf{R}$是一个实值函数，若$\exists \alpha \in (0,1)$，使得

$$f(H_{x,y}(\alpha)) \leqslant (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y), \forall x,y \in C \tag{1}$$

则集合

$$K = \{\lambda \in [0,1] \mid f(H_{x,y}(\lambda)) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y), \forall x,y \in C\}$$

在$[0,1]$中是稠密的。

证明 设在给定的条件下集合K在$[0,1]$不稠密，则$\exists \lambda_0 \in (0,1)$，存在$\lambda_0$的一个邻域$N(\lambda_0)$，使得

$$N(\lambda_0) \cap K = \varnothing \tag{2}$$

令

$$\lambda_1 = \inf\{\lambda \in K \mid \lambda \geqslant \lambda_0\} \tag{3}$$

$$\lambda_2 = \sup\{\lambda \in K \mid \lambda \leqslant \lambda_0\} \tag{4}$$

根据(2)式得$0 \leqslant \lambda_2 < \lambda_1 \leqslant 1$，因为$\{\alpha,(1-\alpha)\} \in (0,1)$，可以取$u_1,u_2 \in K, u_1 \geqslant \lambda_1, u_2 \leqslant \lambda_2$，使得

$$\max\{\alpha,(1-\alpha)\}(u_1 - u_2) < \lambda_1 - \lambda_2 \tag{5}$$

令$\bar{\lambda} = (1-\alpha)u_1 + \alpha u_2, z_u = H_{x,y}(u), \forall u \in (0,1)$，定义

$$H_{z_{u_1},z_{u_2}}(\theta) = H_{x,y}((1-\theta)u_1 + \theta u_2), \forall \theta \in [0,1],$$

则$H_{z_{u_1},z_{u_2}}(\theta)$表示连接$C$中$z_{u_1}$与$z_{u_2}$两点的弧，且$H_{x,y}(\bar{\lambda}) = H_{z_{u_1},z_{u_2}}(\alpha)$。

因此，根据(1)式和$u_1,u_2 \in K$，得

$$\begin{aligned} f(H_{x,y}(\bar{\lambda})) &= f(H_{z_{u_1},z_{u_2}}(\alpha)) \leqslant \\ &(1-\alpha)f(z_{u_1}) + \alpha f(z_{u_2}) = \\ &(1-\alpha)f(H_{x,y}(u_1)) + \alpha f(H_{x,y}(u_2)) \leqslant \\ &(1-\alpha)[(1-u_1)f(x) + u_1 f(y)] + \\ &\alpha[(1-u_2)f(x) + u_2 f(y)] = (1-\bar{\lambda})f(x) + \bar{\lambda}f(y) \end{aligned}$$

从而，$\bar{\lambda} \in K$。

若$\bar{\lambda} \geqslant \lambda_0$，根据(5)式得

$$\bar{\lambda} - u_2 = \alpha(u_1 - u_2) < \lambda_1 - \lambda_2$$

则$\bar{\lambda} < \lambda_1$。又因为$\bar{\lambda} \geqslant \lambda_0$且$\bar{\lambda} \in K$，这与(3)式矛盾。类似地，可证得$\bar{\lambda} \leqslant \lambda_0$时与(4)式矛盾。

综上证得K在$[0,1]$中是稠密的。 证毕

定理3 设$C \subseteq \mathbf{R}^n$是AC集，$f: C \to \mathbf{R}, \forall x,y \in C$，$f$在$C$上关于弧$H_{x,y}(\theta)$是弧式连通函数(CN)的充要条件是$f$在$C$上关于同一弧$H_{x,y}(\theta)$是$Q$-连通函数(QCN)，且$\exists \alpha \in (0,1)$，使得

$$f(H_{x,y}(\alpha)) \leqslant (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y), \forall x,y \in C \tag{6}$$

证明 必要性是显然的，只需证明$\forall x,y \in C$，f在C上关于弧$H_{x,y}(\theta)$是CN函数。

1) 若$f(x) = f(y)$，将证明$f(H_{x,y}(\lambda)) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y), \forall \lambda \in [0,1]$。

事实上，若$\exists \beta \in (0,1)$，使得

$$f(H_{x,y}(\beta)) > (1-\beta)f(x) + \beta f(y) = f(x) = f(y) \tag{7}$$

令$z = H_{x,y}(\beta) \in C$。

若$0 < \alpha < \beta < 1$，令$z_1 = H_{x,y}\left(\frac{\beta-\alpha}{1-\alpha}\right) \in C$，定义$H_{z_1,y}(\theta) = H_{x,y}\left(\frac{1-\beta}{1-\alpha}\theta + \frac{\beta-\alpha}{1-\alpha}\right), \forall \theta \in [0,1]$，则$H_{z_1,y}(\theta)$表示$C$中连结$z_1$与$y$的一个弧，且$z = H_{x,y}(\beta) = H_{z_1,y}(\alpha)$，从而根据(6)式与(7)式，有

$$\begin{aligned} f(z) &= f(H_{z_1,y}(\alpha)) \leqslant \\ &(1-\alpha)f(z_1) + \alpha f(y) < f(z_1) \end{aligned} \tag{8}$$

另一方面，定义$H_{x,z}(\theta) = H_{x,y}(\theta\beta)$，则$H_{x,z}(\theta)$表示$C$中连结$x$与$z$的一个弧，且

$$z_1 = H_{x,y}\left(\frac{\beta-\alpha}{1-\alpha}\right) = H_{x,z}\left(\frac{\beta-\alpha}{\beta(1-\alpha)}\right)$$

因为f是Q-连通函数，且根据(7)式知$f(x) < f(z)$，有

$$\begin{aligned} f(z_1) &= f\left(H_{x,z}\left(\frac{\beta-\alpha}{\beta(1-\alpha)}\right)\right) \leqslant \\ &\max\{f(x),f(z)\} = f(z) \end{aligned} \tag{9}$$

则(9)式与(8)式矛盾。

若$0 < \beta < \alpha < 1$，令$z_2 = H_{x,y}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \in C$，定义$H_{x,z_2}(\theta) = H_{x,y}\left(\frac{\beta}{\alpha}\theta\right), \forall \theta \in [0,1]$。则$H_{x,z_2}(\theta)$表示$C$中连结$x$与$z_2$的一个弧，且$z = H_{x,y}(\beta) = H_{x,z_2}(\alpha)$，从而根据(6)式与(7)式有

$$\begin{aligned} f(z) &= f(H_{x,z_2}(\alpha)) \leqslant \\ &(1-\alpha)f(x) + \alpha f(z_2) < f(z_2) \end{aligned} \tag{10}$$

同时，定义$H_{z,y}(\theta) = H_{x,y}((1-\beta)\theta + \beta)$，则$H_{z,y}(\theta)$表示$C$中连结$z$与$y$的一个弧，且

$$z_2 = H_{x,y}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = H_{z,y}\left(\frac{\beta(1-\alpha)}{\alpha(1-\beta)}\right)$$

因为f是Q-连通函数且根据(7)式知$f(y) < f(z)$，有

$$\begin{aligned} f(z_2) &= f\left(H_{z,y}\left(\frac{\beta(1-\alpha)}{\alpha(1-\beta)}\right)\right) \leqslant \\ &\max\{f(y),f(z)\} = f(z) \end{aligned} \tag{11}$$

则(11)式与(10)式矛盾。

2)若 $f(x) \neq f(y)$,也将证明

$f(H_{x,y}(\lambda)) \leqslant (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y), \forall \lambda \in [0,1]$。

事实上,若 $\exists \beta \in (0,1)$,使得

$$f(H_{x,y}(\beta)) > (1-\beta)f(x) + \beta f(y) = f(x) = f(y) \tag{12}$$

根据定理 2,有

$f(H_{x,y}(\lambda)) \leqslant (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y), \forall \lambda \in K$,

其中 K 是定理 2 中所定义的集合。

ⅰ)若 $f(y) < f(x)$,由(12)式和 K 在[0,1]中的稠密性得,$\exists u_1 \in K, u_1 < \beta$,使得

$$(1-u_1)f(x) + u_1 f(y) < f(H_{x,y}(\beta))$$

令 $z_3 = H_{x,y}(u_1)$,则

$$f(z_3) = f(H_{x,y}(u_1)) \leqslant (1-u_1)f(x) + u_1 f(y) < f(H_{x,y}(\beta)) \tag{13}$$

定义 $H_{z_3,y}(\theta) = H_{x,y}((1-u_1)\theta + u_1)$,则有

$$H_{x,y}(\beta) = H_{z_3,y}\left(\frac{\beta-u_1}{1-u_1}\right)$$

a)若 $f(y) \leqslant f(z_3)$,由 f 是 Q-连通函数,有

$$f(H_{x,y}(\beta)) = f\left(H_{z_3,y}\left(\frac{\beta-u_1}{1-u_1}\right)\right) \leqslant \max\{f(z_3), f(y)\} = f(z_3) \tag{14}$$

则(14)式与(13)式矛盾。

b)若 $f(y) > f(z_3)$,由 f 是 Q-连通函数,有

$$f(H_{x,y}(\beta)) = f\left(H_{z_3,y}\left(\frac{\beta-u_1}{1-u_1}\right)\right) \leqslant \max\{f(z_3), f(y)\} = f(y) < (1-\beta)f(x) + \beta f(y) < f(H_{x,y}(\beta))$$

这是一个矛盾的不等式。

ⅱ)若 $f(x) < f(y)$,根据(12)式和 K 在[0,1]中的稠密性得,$\exists u_2 \in K, u_2 > \beta$,使得

$$(1-u_2)f(x) + u_2 f(y) < f(H_{x,y}(\beta))$$

令 $z_4 = H_{x,y}(u_2)$,则

$$f(z_4) = f(H_{x,y}(u_2)) \leqslant (1-u_2)f(x) + u_2 f(y) < f(H_{x,y}(\beta)) \tag{15}$$

定义 $H_{x,z_4}(\theta) = H_{x,y}(u_2\theta)$,则有

$$H_{x,y}(\beta) = H_{x,z_4}\left(\frac{\beta}{u_2}\right)$$

a)若 $f(x) \leqslant f(z_4)$,由 f 是 Q-连通函数有

$$f(H_{x,y}(\beta)) = f\left(H_{x,z_4}\left(\frac{\beta}{u_2}\right)\right) \leqslant \max\{f(x), f(z_4)\} = f(z_4) \tag{16}$$

则(16)式与(15)式矛盾。

b)若 $f(x) > f(z_4)$,由 f 是 Q-连通函数,有

$$f(H_{x,y}(\beta)) = f\left(H_{x,z_4}\left(\frac{\beta}{u_2}\right)\right) \leqslant \max\{f(x), f(z_4)\} = f(x) < (1-\beta)f(x) + \beta f(y) < f(H_{x,y}(\beta))$$

这是一个矛盾的不等式。

综上证得 $\forall x, y \in C$,f 在 C 上关于弧 $H_{x,y}(\theta)$ 是弧式连通函数(CN)。　　证毕

参考文献:

[1] ORTEGA J M, RHEINBOLDT W C. Iterative Solutions of Nonlinear Equations in Several Variables[M]. New York: Academic Press, 1970.

[2] AVRIEL M, ZANG I. Generalizedn Arcwise Connected Functions and Characterization of Local-global Minimum Properties[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1980, 32: 407-425.

[3] SINGH C. Elementary Properties of Arcwise Connected Sets and Functions[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1983, 41: 377-387.

[4] MUKHERJEE R N, YADAV S R. A Note on Arcwise Connected Sets and Functions[J]. Bulletin of Australian Mathematical Society, 1985, 31: 369-375.

[5] ROBERTS A W, VARBERG D E. Convex Functions[M]. New York: Academic Press, 1970.

[6] NIKODEM K. On Some Class of Midconvex Functions[J]. Annales Polonici Mathematics, 1989, 50: 145-151.

[7] BEER G. Topologies on Closed and Closed Convex Sets[M]. Berlin: Kluwer Academic-Verlag, 1998.

[8] YANG X M, TEO K L, YANG X Q. A Characterization of Convex Functions[J]. Appl Math Lett, 2000, 13: 27-30.

(责任编辑　黄　颖)