

# 具有调制二值噪声线性系统的随机共振\*

周玉荣<sup>1,2</sup>, 郭 锋<sup>3</sup>, 庞小峰<sup>1</sup>

(1. 电子科技大学 生命科学与技术学院, 成都 610054; 2. 攀枝花学院 电气信息工程学院, 四川 攀枝花 617000;  
3. 电子科技大学 自动化工程学院, 成都 610054)

**摘 要** :研究了系统固有频率受二值噪声扰动时,调制二值噪声驱动二阶过阻尼线性系统的随机共振现象。基于线性系统理论和相关删去法,得到系统平均输出幅度增益的精确表达式。研究表明:系统的输出幅度增益是二值噪声的强度、相关率、系统阻尼系数、系统固有频率以及激励信号频率的非单调函数;另外,适当的噪声参数可以使系统的输出幅度增益大于无噪声时的输出幅度增益。

**关键词** :随机共振;输出幅度增益;调制二值噪声;过阻尼线性系统

中图分类号 :O211.64

文献标识码 :A

文章编号 :1672-669X(2007)01-0048-04

## Stochastic Resonance of a Linear System with Modulated Dichotomous Noise

ZHOU Yu-rong<sup>1,2</sup>, GUO Feng<sup>3</sup>, PANG Xiao-feng<sup>1</sup>

(1. School of Life Science and Technology, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054;

2. School of Information and Electric Engineering, Panzhihua University, Sichuan Panzhihua 617000;

3. School of Automation Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054, China)

**Abstract** :The phenomena of stochastic resonance of an over-damped second-order linear system with modulated dichotomous noise are investigated. We assume that the system intrinsic frequency is perturbed by dichotomous noise. Based on linear-system theory and the correlation deletion method, the explicit expression of the output amplitude gain (OAG) of the system is obtained. It is shown that the OAG is a non-monotonic function of the strength of the dichotomous noise, the correlation rate of the dichotomous noise, the system damping coefficient, the system intrinsic frequency, as well as the frequency of the driving signal. In addition, by choosing appropriate parameters of the dichotomous noise and the system, the OAG of the noisy system can be larger than that of the noise-free system.

**Key words** :stochastic resonance; output amplitude gain; modulated dichotomous noise; over-damped linear system

随机共振现象的本质是指在噪声和周期信号共同驱动下,非线性系统产生的一种协同效应<sup>[1]</sup>。从广义角度上看,随机共振可以理解为在有噪声的系统中,系统的输出信号是噪声或者是周期输入信号某个参数的非单调函数。研究表明有噪声的线性系统中也存在随机共振现象。随机共振理论可以用于微弱信号的检测<sup>[2]</sup>,强噪声环境中提取信息信号<sup>[3]</sup>以及化学反应速度的控制<sup>[4]</sup>等方面。在一些实际的物理系统中,噪声和信号必须以相乘的方式出现,即信号调制噪声<sup>[5]</sup>。研究发现,在信号调制二值噪声作用下的一阶系统存在随机共振<sup>[6]</sup>;但是对于信号

调制二值色噪声作用下的二阶线性系统,其随机共振现象的研究却很少报道。另一方面,二值噪声(随机电报噪声)是真实噪声的典型模型,在不同极限条件下,二值噪声可近似为高斯白噪声或散粒白噪声<sup>[7]</sup>,故二值噪声对动力学系统行为的影响被广泛研究<sup>[8]</sup>。本文研究系统固有频率受二值噪声扰动时,信号调制二值噪声作用下的二阶过阻尼线性系统输出幅度增益的随机共振现象。

### 1 系统模型

设初始储能为零的二阶过阻尼线性系统的动力

\* 收稿日期 2006-03-31

资助项目 攀枝花学院博士基金(No. B2006-01)

作者简介 周玉荣(1968-)男,四川广安人,博士研究生,研究方向为非线性理论研究。

学方程为

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2r \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = f(t) \quad (1)$$

其中  $f(t) = A \cos(\Omega t)$  为周期激励信号,  $A$  和  $\Omega$  分别为该信号的幅度和频率,  $r$  和  $\omega_0$  分别是系统(1)的阻尼系数和固有频率, 且满足过阻尼条件, 即  $r > \omega_0$ 。就物理意义而言(1)式可描述电路理论中由电阻  $R$ 、电感  $L$ 、电容  $C$  构成的二阶线性电路的数学模型<sup>[9-10]</sup>, 也可表征经典力学中单自由度单位质量线性杜芬振子的振动方程。考虑激励信号受到二值噪声  $\eta(t)$  的调制和系统固有频率受到另一二值噪声  $\xi(t)$  的扰动, 即  $\omega_0^2 = \omega_0^2(1 + \xi(t))$  的情形下(1)式变为

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2r \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2(1 + \xi(t))x(t) = \eta(t)A \cos(\Omega t) \quad (2)$$

其中  $\xi(t)$  和  $\eta(t)$  是二值噪声, 其均值和相关函数为

$$\xi(t) = \eta(t) = 0$$

$$\xi(t)\xi(t_1) = \sigma_1 \exp(-\lambda_1 |t - t_1|)$$

$$\xi(t)\eta(t_1) = \eta(t)\xi(t_1) = \sigma_3 \exp(-\lambda_3 |t - t_1|)$$

$$\eta(t)\eta(t_1) = \sigma_2 \exp(-\lambda_2 |t - t_1|) \quad (3)$$

其中  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  分别为  $\xi(t), \eta(t)$  的强度和耦合强度,  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  分别为  $\xi(t), \eta(t)$  相关率和耦合噪声的相关率,  $\lambda_i = 1/\tau_i$ ,  $\tau_i$  为相应噪声的相关时间 ( $i = 1, 2, 3$ )。

## 2 输出幅度增益

根据线性系统理论(2)式以  $-\xi(t)\omega_0^2 x(t) + \eta(t)A \cos(\Omega t)$  为激励时的稳态输出, 是这个激励与系统冲激响应的卷积积分  $x(t)$  的形式解为

$$x(t) = \frac{1}{2\omega_1} \int_0^t \{ \exp[c_1(t-u)] - \exp[c_2(t-u)] \} \times [ \eta(t)A \cos(\Omega t) - \xi(t)\omega_0^2 x(u) ] du \quad (4)$$

其中  $\omega_1 = \sqrt{r^2 - \omega_0^2}$ ,  $\rho_1 = -r + \omega_1$ ,  $\rho_2 = -r - \omega_1$ 。

(4)式代入(2)式得

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2r \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = \eta(t)A \cos(\Omega t) - \frac{\omega_0^2}{2\omega_1} \int_0^t \{ \exp[c_1(t-u)] - \exp[c_2(t-u)] \} \times [ \xi(t)\eta(u)A \cos(\Omega u) - \xi(t)\xi(u)\omega_0^2 x(u) ] du \quad (5)$$

利用 Shapiro-Loginov 公式<sup>[11]</sup> 和相关删去法方法<sup>[12]</sup>, 对于二值噪声  $\xi(t)$ , 有

$$\xi(t)\xi(u)x(u) = \xi(t)\xi(u)x(u) \quad (6)$$

利用(6)式对(5)式两边进行随机平均, 得

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2r \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = -\frac{\omega_0^2}{2\omega_1} \times \int_0^t \{ \xi(t)\eta(u)A \cos(\Omega t) - \omega_0^2 \xi(t)\xi(u)x(u) \} \times \{ \exp[c_1(t-u)] - \exp[c_2(t-u)] \} du \quad (7)$$

用  $X(s)$  和  $F(s)$  分别表示系统平均输出  $x(t)$  和激励信号  $A \cos(\Omega t)$  的拉普拉斯变换, 把(3)式代入(7)式, 并对(7)式进行拉普拉斯变换得

$$[s^6 + s^5 f_5 + s^4 f_4 + s^3 f_3 + s^2 f_2 + s f_1 + f_0] X(s) = [s^2 g_2 + s g_1 + g_0] F(s) \quad (8)$$

其中,

$$f_0 = b_0 b_1 \omega_0^2 - \omega_0^4 \sigma_1 b_0,$$

$$f_1 = \omega_0^2 [2b_1(r + \lambda_3) + 2b_0(r + \lambda_1)] - 2\omega_0^4 \sigma_1 (r + \lambda_3) + 2r b_0 b_1,$$

$$f_2 = b_0 b_1 + 2r [2b_1(r + \lambda_3) + 2b_0(r + \lambda_1)] + \omega_0^2 [b_1 + b_0 + 4(r + \lambda_3)(r + \lambda_1)] - \omega_0^4 \sigma_1,$$

$$f_3 = 2b_1(r + \lambda_3) + 2b_0(r + \lambda_1) + \omega_0^2 [2(r + \lambda_3) + 2(r + \lambda_1)] + 2r [b_1 + b_0 + 4(r + \lambda_3)(r + \lambda_1)],$$

$$f_4 = b_1 + b_0 + 4(r + \lambda_3)(r + \lambda_1) + 2r [2(r + \lambda_3) + 2(r + \lambda_1)] + \omega_0^2,$$

$$f_5 = 2r + 2(r + \lambda_3) + 2(r + \lambda_1),$$

$$g_0 = -\omega_0^2 \sigma_3 b_0, \quad g_1 = -2\omega_0^2 \sigma_3 (r + \lambda_1),$$

$$g_2 = -\omega_0^2 \sigma_3 b_0 = (c_1 - \lambda_3)(c_2 - \lambda_3),$$

$$b_1 = (c_1 - \lambda_1)(c_2 - \lambda_1).$$

对(8)式进行拉普拉斯逆变换, 可得稳态时(2)式的平均输出  $x(t)$  满足微分方程

$$\frac{d^6 x(t)}{dt^6} + f_5 \frac{d^5 x(t)}{dt^5} + f_4 \frac{d^4 x(t)}{dt^4} + f_3 \frac{d^3 x(t)}{dt^3} + f_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + f_1 \frac{dx(t)}{dt} + f_0 x(t) = A(-g_2 \Omega^2 + g_0) \cos(\Omega t) + A g_1 \Omega \sin(\Omega t) \quad (9)$$

设(9)式的稳态解为

$$x(t) = a \cos(\Omega t + \varphi) \quad (10)$$

将(10)式代入(9)式, 可得到(2)式描述的动力学系统平均输出幅度增益的表达式

$$G = \left| \frac{a}{A} \right| = \sqrt{\frac{l_1^2 + l_2^2}{h_1^2 + h_2^2}} \quad (11)$$

其中,  $h_1 = \Omega^6 - f_4 \Omega^4 + f_2 \Omega^2 + f_0$ ,  $l_2 = g_1 \Omega$ ,

$$h_2 = f_5 \Omega^5 - f_3 \Omega^3 + f_1 \Omega, \quad l_1 = g_2 \Omega^2 - g_0,$$

$$\tan(\varphi) = \frac{h_2 l_1 - h_1 l_2}{h_1 l_1 + h_2 l_2}$$

## 3 讨论

由(11)式可见, 系统输出幅度增益  $G$  是噪声强度  $\sigma_1$ 、噪声的相关率  $\lambda_1$  和  $\lambda_3$ 、阻尼系数  $r$ 、系统固有

频率  $\omega_0$  以及激励信号频率  $\Omega$  的非单调函数,如图 1~6 所示。图中虚线是无噪声时的输出幅度增益曲线。从图 1~6 可见,在有噪声的系统(2)中,有噪声时的输出幅度增益可以大于没有噪声时的幅度增益,利用该特性可以在噪声环境检测和估计弱信号。

图 1、2 为  $\omega_0$ 、 $r$  取不同值时,输出幅度增益  $G$  和激励信号频率  $\Omega$  的关系曲线。从图中可以看出  $G$  随着  $\Omega$  的增大出现了一个最大值(称为共振峰),即“真正”意义上的随机共振,也就是说,噪声在系统中的存在,不但没有降低系统的输出幅度,反而提高了输出幅度。由图 1 可见,随着  $\omega_0$  的增大, $G$  的最大值增加,其共振峰向激励信号频率增大的方向移动,并且  $G$  和  $\omega_0$  成非单调关系:在激励信号频率较低时,即当  $\Omega < 0.9$  时, $G$  随  $\omega_0$  增加单调减小,在激励信号频率较高时,即当  $\Omega > 1.6$  时, $G$  随  $\omega_0$  增加单调增大。图 2 表明,随着  $r$  的增大, $G$  最大值减小,共振峰的峰值随  $r$  的增大向  $\Omega$  减小的方向移动。另外  $G$  和  $r$  亦成非单调关系,当  $\Omega < 0.5$  时, $G$  随  $r$  的增加单调增加,当  $\Omega > 0.5$  时, $G$  随  $r$  的增加而单调减小。

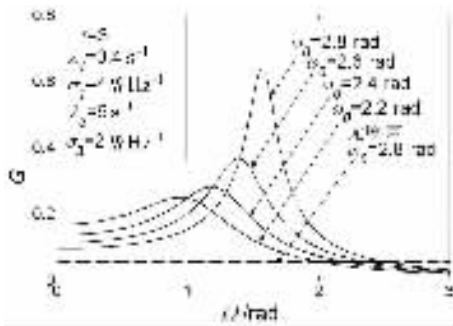


图 1  $\omega_0$  取不同值时输出幅度增益  $G$  与信号频率  $\Omega$  的关系曲线

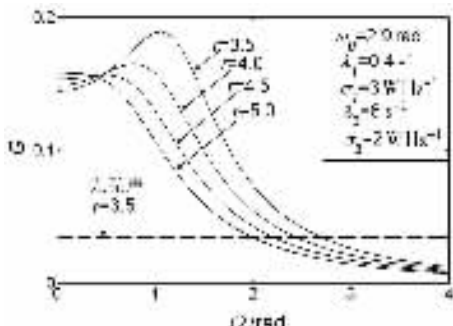


图 2  $r$  取不同值时输出幅度增益  $G$  与信号频率  $\Omega$  的关系曲线

图 3、4 为输出幅度增益  $G$  与噪声相关率的关系曲线。从图 3、4 可以看出,在已知系统参数和  $\Omega$  时,若系统中不存在噪声,则  $G$  为常数;有噪声存在时, $G$  与噪声的相关率成非单调关系,即出现广义的随机共振,且在噪声时的  $G$  可以大于没有噪声时的输

出幅度增益。 $G$  的变化趋势为随着噪声相关率的增大,开始单调增加,在某个噪声相关率处达到最大值,然后单调下降。由图 3 可见,当  $\lambda_1 < 0.6$  时, $G$  随  $\omega_0$  的增大而单调减小,当  $\lambda_1 > 1.4$  时, $G$  随  $\omega_0$  的增大而单调增加;共振峰随  $\omega_0$  的增大向  $\lambda_1$  增加的方向移动,共振峰的峰值减小。在已知噪声环境的工程应用中,该特性可用于通过改变  $\omega_0$  来检测微弱信号或抑制被噪声污染的确定信号对系统的干扰。从图 4 可知, $G$  随  $r$  的增加而单调增加,同样道理,通过调节  $r$  来改变噪声环境下的系统对被噪声污染确定信号的响应。

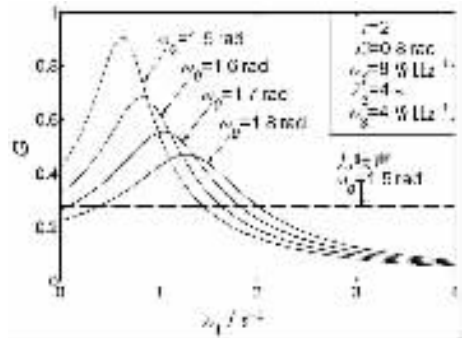


图 3  $\omega_0$  取不同值时输出幅度增益  $G$  与噪声相关率  $\lambda_1$  的关系曲线

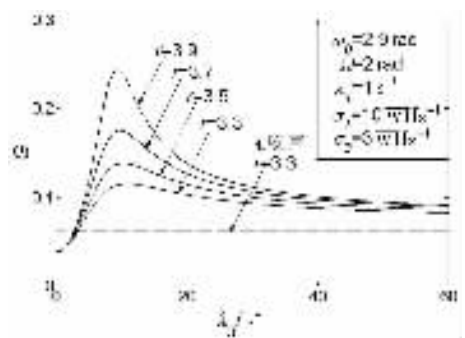


图 4  $r$  取不同值时输出幅度增益  $G$  与噪声相关率  $\lambda_2$  的关系曲线

图 5、6 为输出幅度增益  $G$  与噪声强度  $\sigma_1$  的关系曲线。由图 5、6 可知, $G$  随着  $\sigma_1$  增大出现了一个最大值,即传统的随机共振现象,其实质是由于噪声和信号的相互作用,使得噪声的一部分能量转化成信号的结果。由图 5 可见,不同的噪声强度下, $G$  与  $\omega_0$  成非单调关系,当  $\omega_0$  与  $\Omega$  接近时,出现共振峰时的  $G$  较小,这与无噪声时系统对确定信号输入时的响应情形相反,该特性进一步证实了噪声引入系统后,有时可能对系统的响应起决定性作用。当  $\sigma_1 < 26$  时, $G$  随  $\omega_0$  的增大而单调增加;当  $\sigma_1 > 26$  时, $G$  随  $\omega_0$  的增大而单调减小。由图 6 可知,随着  $r$  的增大, $G$  最大值减小,共振峰的峰值随  $r$  的增大向  $\sigma_1$  增大的方向

移动。

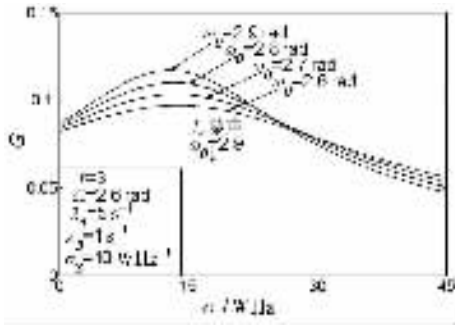


图 5  $\omega_0$  取不同值时输出幅度增益  $G$  与噪声强度  $\sigma_1$  的关系曲线

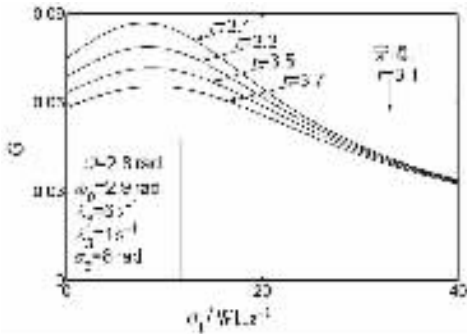


图 6  $r$  取不同值时输出幅度增益  $G$  与噪声强度  $\sigma_1$  的关系曲线

### 4 结论

本文研究了当系统的固有频率受二值噪声扰动条件下,调制二值噪声驱动的二阶过阻尼线性系统中的随机共振现象。研究表明,有噪声时系统的输出幅度增益在一定条件下可以大于无噪声时的输出幅度增益,而且适当的噪声参数和系统参数可以提高输出幅度增益。本文的结论适用强噪声、弱信号情形,这对于二值噪声环境中线性系统的理论研究以及微弱信号检测理论都有重要的理论和实际应用价值。

### 参考文献:

- [ 1 ] FAUVE S , HESLOT F. Stochastic Resonance in a Bistable System[ J ]. Phys Lett ,1983 ,97( A ) :5-7.
- [ 2 ] WU X J , CAI W S , SHAO X G et al. A Method Based on Stochastic Resonance for the Detection of Weak Analytical Signal[ J ]. Talanta ,2003 ,61 :863-869.
- [ 3 ] 祝恒江,李蓉,温孝东. 利用随机共振在强噪声下提取信息信号[ J ]. 物理学报 2003 ,52 ( 10 ) :2404-2408.
- [ 4 ] 张季谦,辛厚文. 噪声在非线性化学体系中作用的研究现状[ J ]. 化学进展 2001 ,13( 4 ) 241-250.
- [ 5 ] WANG Jun , CAO Li , WU Da-jin. Stochastic Resonance of Bias Signal-modulated Noise in Single-mode Laser[ J ]. Chinese Physics 2004 ,13( 11 ) :1811-1814.
- [ 6 ] GUO Feng , ZHOU Yu-rong , JIANG Shi-qi et al. Stochastic Resonance in a Bias Linear System with Multiplicative and Additive Noise[ J ]. Chinese Physics ,2006 ,15( 5 ) : 947-952.
- [ 7 ] FULINSKI A. Non-markovian Dichotomic Noises[ J ]. Acta Physica Polonica B ,1995 ,26 :1131-1157.
- [ 8 ] KRAUS V , REINEKER P. Exact Treatment of The Transport of a Quantum Particle in a Dimmer Under the Influence of Dichotomic Colored Noise[ J ]. Phys Rev E ,1991 ,43 : 4182-4191.
- [ 9 ] 李金田. 交流电桥示零器电路的改进[ J ]. 重庆师范大学学报( 自然科学版 ) 2004 ,21( 3 ) :44-45.
- [ 10 ] 谭劲. 谐波对并联电容器的影响及抑制[ J ]. 西华师范大学学报( 自然科学版 ) ,2005 ,26( 2 ) :187-190.
- [ 11 ] BOURRET R C. Brownian Motion of Harmonic Oscillator with Stochastic Frequency[ J ]. Physica A ,1973 ,65 : 303-307.
- [ 12 ] BOURRET R C. Propagation of Randomly Perturbed Fields [ J ]. Canad J Phys ,1962 ,40 :782-790.

( 责任编辑 欧红叶 )