

# 二次康普顿散射和产生双光子的康普顿散射\*

罗光<sup>1,2</sup>, 周上祺<sup>2</sup>, 肖广渝<sup>1</sup>, 代丽<sup>1</sup>

(1. 重庆师范大学 物理学与信息技术学院, 重庆 400047 2. 重庆大学 材料科学与工程学院, 重庆 400044)

**摘要:**从康普顿散射的基本原理出发,基于能量、动量守恒定律和相对论效应,首先讨论了康普顿散射中的二次散射,得出波长的改变量不仅与散射角有关,还与入射光子的波长(频率)有关,其次讨论了产生双光子的康普顿散射,由于这种散射的复杂性,只选取了两种特殊情形来讨论,得出散射光子的频率不仅与两个散射光子的散射角有关,还与入射光子频率有关,单一频率的入射光子发生双光子散射后,散射光子波长的改变还可能是连续变化的,康普顿散射实验说明二次散射和双光子散射的发生是可能的。

**关键词:**康普顿散射;二次散射;双光子散射

中图分类号:O431

文献标识码:A

文章编号:1672-6693(2007)01-0052-04

## The Double Compton Scattering and Compton Scattering Produced Two Photons

LUO Guang<sup>1,2</sup>, ZHOU Shang-qi<sup>2</sup>, XIAO Guang-yu<sup>1</sup>, DAI Li<sup>1</sup>

(1. College of Physics and Information Technology, Chongqing Normal University, Chongqing 400047;

2. College of Material Science and Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

**Abstract:** Based on the Compton scattering theory and first of all, after discussing the double Compton scattered, the authors have gotten the changed wavelength related to the scattered angle and the wavelength of the incident photon. Then the authors discuss the Compton scattering that produces two photons, and obtain the similar conclusion. After compared with the experiments, they have concluded that the double Compton scattering and the Compton scattering producing two photons can occur possibly in Compton scattering.

**Key words:** Compton scattering; double Compton scattering; Compton scattering with two photons

康普顿散射在基础物理学<sup>[1]</sup>中占有十分重要的地位。随着康普顿散射研究的深入,它的应用越来越广泛<sup>[2-5]</sup>。通过康普顿散射可以对物质内部进行检测、分析。一般资料<sup>[6-9]</sup>对其只介绍了最理想的情况——入射光子与静止、自由电子的相互作用,利用能量守恒和动量守恒定律,推导出康普顿散射公式

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0c}(1 - \cos\theta)$$

其中 $\theta$ 为散射角, $m_0$ 为散射前静止电子质量, $\lambda$ 、 $\lambda'$ 分别为散射前后光子的波长。事实上,由于电子不可能脱离它所处的环境,总要受到一些限制,比如核对电子的束缚、电子本身的动能以及电子间的相互作用等,而这些对康普顿散射都要产生影响,因而研

究非理想状态的康普顿散射无疑显得十分重要。本文则是从二次散射、双光子散射角度来讨论康普顿散射。

### 1 二次康普顿散射

如果在康普顿散射中,入射光子被电子散射后,没有直接以光子的形式辐射出来,而是再次或多次被散射体中的其它电子散射后才被辐射出来,即发生了二次或多次散射,那么这将会对康普顿散射结果产生影响。这里假定原子核对电子的束缚不强,可以忽略,即电子自由、静止,在此情形下研究高能 $\gamma$ 光子和物质中的电子发生两次康普顿散射。二次康普顿散射如图1所示。 $\theta_1$ 为入射光子与物质中

\* 收稿日期 2006-03-31 修回日期 2006-08-07

资助项目:重庆师范大学科研基金(No. 05XSY002)

作者简介:罗光(1973-)男,江西南康人,讲师,博士研究生,研究方向为理论物理。

的电子发生一次散射后的散射光子之间的夹角  $\theta_2$  为发生二次散射后的光子与一次散射后的光子之间的夹角  $\theta$  为所探测到的出射光子与入射光子之间的夹角。一次康普顿散射波长移动公式为

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_1 = \frac{h}{m_0c}(1 - \cos\theta) \quad \theta \in [0, \pi]$$

根据一次康普顿散射公式, 可以求出二次康普顿散射后的波长改变量  $\Delta\lambda$  为

$$\Delta\lambda = (\lambda - \lambda_1) + (\lambda_1 - \lambda_2) = \frac{h}{m_0c}[2 - \cos\theta_1 - \cos(\theta - \theta_1)] \quad (1)$$

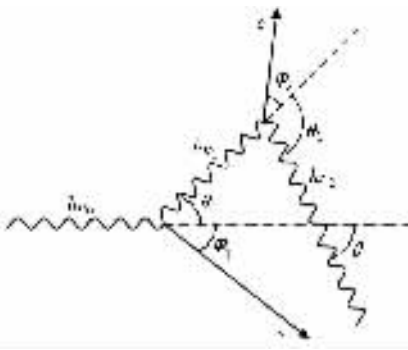


图 1 二次康普顿散射

由  $\theta_1 \in [-\pi, \pi]$ ,  $\theta - \theta_1 \in [-\pi, \pi]$ , 则  $\theta \in [-2\pi, 2\pi]$ 。由(1)式可得  $\Delta\lambda$  的取值范围为

$$\Delta\lambda \in \left[ \frac{2h}{m_0c}(1 - \cos \frac{\theta}{2}), \frac{2h}{m_0c}(1 + \cos \frac{\theta}{2}) \right] \quad (2)$$

用图象表示  $\Delta\lambda$  的取值范围如图 2 所示的阴影部分由此可知:

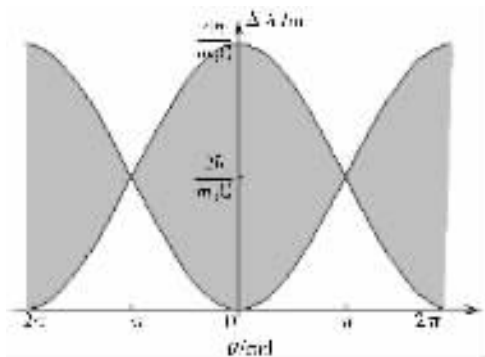


图 2 波长改变量  $\theta$  与散射角  $\Delta\lambda$  的关系

1) 波长改变量  $\Delta\lambda$  随入射光子和出射光子夹角  $\theta$  绝对值的增大而缩小, 出射光子的能量范围缩小。

2) 当  $\theta=0$  时, 在普通康普顿效应中, 不应该出现散射波波长改变的现象。但考虑二次康普顿散射现象以后,  $\Delta\lambda$  可能出现的最大值为  $4h/m_0c$ , 这说明光子与电子发生第一次作用后散射光子沿入射光子反方向被散射, 而后由于电子产生第二次作用, 在此

发生反方向的散射, 这种情形下波长改变最长;  $\Delta\lambda$  可能出现的最小值为 0, 这说明光子在物质内第一、二次与电子碰撞后散射光子的方向均与入射方向相同, 并不引起波长的改变;  $\Delta\lambda$  取其他值, 由(1)式可知  $\Delta\lambda$  的取值决定于第一次散射角  $\theta_1$ 。

3) 在  $\theta = \pi$  处,  $\Delta\lambda = 2h/m_0c$ , 即不管一次散射角  $\theta_1$  为多少,  $\Delta\lambda$  为恒量。所以不管一次散射还是二次散射, 当入射光子和出射光子的夹角为  $\pi$  时, 波长的位移差  $\Delta\lambda$  恒定。

4) 经二次散射后散射光子能量范围为  $E \in [h\nu/\{1 + 2\gamma(1 + \cos\theta/2)\}, h\nu/\{1 + 2\gamma(1 - \cos\theta/2)\}]$ , 其中  $\gamma = h\nu/m_0c^2$ 。发生二次散射后, 散射光子的能量也在一定范围内。

由上述分析可知, 当发生二次散射后, 散射光子的波长改变规律与仅考虑一次康普顿散射时的规律有很大差别, 二次散射的波长改变量不仅与出射角  $\theta$  的取值有关, 还与第一次康普顿散射的散射角  $\theta_1$ 、入射光子的波长(频率)有关。二次康普顿散射除了与入射线具有相同波长外, 还有部分波长增加更长, 即部分光子的能量变得更低。由此推之, 光子在经过一定次数的康普顿散射后, 能量将变得很低, 甚至可能发生光电效应。

## 2 双光子康普顿散射

当电子与一个光子相互作用后, 电子受到反冲, 同时散射出两个光子的情况, 称为双光子散射<sup>[10]</sup>。对于这种相互作用, 可以认为是一个电子先吸收  $\gamma$  光子, 变成高能电子, 这一高能电子再辐射两个光子的过程, 如图 3 所示。

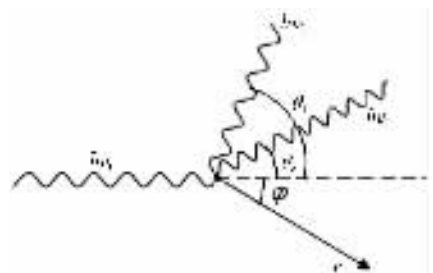


图 3 双光子康普顿散射

能量为  $h\nu_0$  的光子与散射体中质量为  $m_0$ 、自由而静止的电子相互作用后, 电子以能量为  $mc^2$  在与入射波方向成  $\varphi$  角的方向上射出, 同时散射出两个能量分别  $h\nu_1$ 、 $h\nu_2$ , 并与入射波的夹角分别为  $\theta_1$ 、 $\theta_2$  的光子, 这个过程满足动量和能量守恒。

以入射波  $x$  方向, 垂直于入射波  $y$  方向为轴, 建

立坐标系。由体系的动量和能量守恒可以得到下面表达式

$$\begin{cases} \frac{hv_0}{c} = \frac{hv_1}{c}\cos\theta_1 + \frac{hv_2}{c}\cos\theta_2 + mu\cos\varphi \\ 0 = \frac{hv_1}{c}\sin\theta_1 + \frac{hv_2}{c}\sin\theta_2 + mu\sin\varphi \\ hv_0 + m_0c^2 = hv_1 + hv_2 + mc^2 \end{cases} \quad (3)$$

其中  $m = m_0/\sqrt{1-u^2/c^2}$  是相对论电子质量。以上方程组有  $v_1, v_2, u, \varphi$  4 个未知数,有无穷多解,对于  $v_1, v_2$  的值的确定似乎可以是任意的,无法看出散射光子的频率与散射角、入射光子频率之间的关系。为此,分别就以下两种情况来讨论。

### 2.1 $v_1 = v_2 = v$ 的情况

当  $v_1 = v_2 = v$  时,方程(3)的解为

$$v = \frac{1}{2h[1 - \cos(\theta_1 - \theta_2)]} \{ 2hv_0 + 2m_0c^2 - hv_0(\cos\theta_1 + \cos\theta_2) \pm [(2hv_0 + 2m_0c^2 -$$

$$hv_0(\cos\theta_1 + \cos\theta_2))^2 - 4hv_0(1 - \cos(\theta_1 - \theta_2))m_0c^2]^{\frac{1}{2}} \} \quad (4)$$

由能量守恒,上式根式前取负号。显然这样的解非常复杂,但是仍可以看出散射光子的频率不仅与散射角有关,还与入射光子频率有关。现针对散射光子波长的改变,对以下几种特殊情况进行讨论。

1) 当两散射光子之间的角度为零时,即  $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ ,由(4)式可得

$$v = \frac{m_0v_0c^2}{2hv_0(1 - \cos\theta) + 2m_0c^2} \quad (5)$$

则

$$\Delta\lambda = \frac{c}{v} - \frac{c}{v_0} = \frac{2h}{m_0c}(1 - \cos\theta) + \frac{c}{v_0} \quad (6)$$

由(6)式可见,  $\Delta\lambda$  与散射角  $\theta$  有关,且与入射光子的频率  $v_0$ (波长)有关。这与产生单个光子的康普顿散射结果有明显差别,出现双光子散射后,波长的改变不但要受入射光子波长的影响,还要受散射角  $\theta$  的限制。 $\theta = 0^\circ$  时,产生单个光子的康普顿散射的波长改变  $\Delta\lambda = 0$ ,但考虑两散射光子频率相同的双光子散射时,波长改变  $\Delta\lambda \geq c/v_0$ 。当  $\theta = \pi$  时,在康普顿散射中  $\Delta\lambda = 2h/m_0c$ ,但考虑双光子散射后两散射光子频率相同时  $\Delta\lambda = 4h/m_0c + c/v_0$ ,说明一旦发生双光子散射,波长的改变要大得多。

2) 当两散射光子方向相反时,即  $\theta_1 - \theta_2 = \pi$ ,代入(4)式可得

$$v = \frac{hv_0 + m_0c^2 - \sqrt{(hv_0)^2 + (m_0c^2)^2}}{2h}$$

则

$$\Delta\lambda = \frac{2hc}{hv_0 + m_0c^2 - \sqrt{(hv_0)^2 + (m_0c^2)^2}} - \frac{c}{v_0}$$

可见波长改变  $\Delta\lambda$  与散射角  $\theta$  有关,且与入射光子的波长  $c/v_0$  有关。出现双光子散射后,波长的改变要受入射光子波长的影响,这与普通康普顿散射结果明显不同。

3) 当两散射光子互相垂直时,即  $\theta_1 - \theta_2 = \pi/2$ ,代入(4)式可得

$$v = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4hv_0m_0c^2}}{2h}$$

其中  $B = 2m_0c^2 + 2hv_0 - \sqrt{2}hv_0\cos(\theta_1 - \frac{\pi}{4})$ ,  $\Delta\lambda$  与  $\theta$  和  $v_0$  都有关,出现双光子散射后,波长的改变要受入射光子波长的影响,也与普通康普顿散射结果明显不同。

从以上3种情况讨论可以得出,不管散射角的取值如何,在发生了频率相同的双光子散射后,散射光子的波长改变  $\Delta\lambda$  总是要受入射光子波长的影响。

### 2.2 $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ 的情况

当  $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ ,方程(3)的解为

$$v_1 + v_2 = \frac{v_0m_0c^2}{hv_0(1 - \cos\theta) + m_0c^2}$$

可以看出散射双光子频率之和与散射角有关,也与入射光子频率有关。特别是当  $v_1 = v_2$  结果与(5)式一致。

进一步研究可以得知当频率不同时,情况就更复杂,不管怎样,总能得出散射光子的波长不但与散射角  $\theta_1$  和  $\theta_2$  有关,同样也要受入射光子波长(频率)的影响。由于方程(3)解的非单一性,可以得出,单一频率的入射光子与散射样品发生双光子散射后,散射光子波长的改变还可能是连续的。

## 3 实验验证

通过上述理论分析,只要发生了二次康普顿散射或者双光子散射,散射光子的波长与入射光子的波长差  $\Delta\lambda$  总是要受散射角  $\theta$  的制约,还要受入射光子波长  $c/v_0$  的影响,这些结论在康普顿散射实验中可以验证。利用 BH-1307 型康普顿散射仪,选择  $^{137}\text{Cs}$  射线源,600 V 的探头高压,散射样品是铝棒。源至散射体的距离为 500 mm,散射体至探头的距离为 500 mm,散射角为  $120^\circ$ ,测定时间为 600 s,

得到的康普顿散射图如图 4 所示。最高峰峰值为光子只发生一次散射时出射光子能量,并且在最高峰依次向左的过程中出现两个峰。有文献解释了这两个峰<sup>[11]</sup>,第一个峰为康普顿峭壁,是探头内部发生康普顿散射而形成的峰;第二个峰为光子发生反射后从反方向进入探头发生康普顿散射而形成的峰。但是根据(2)式可计算出当 $\beta = 120^\circ$ 时, $E \in (135.4 \text{ keV}, 288.3 \text{ keV})$ 。双光子的情况更复杂,当 $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ ,可得 $\Delta\lambda \geq v_0/c$ , $\Delta h\nu \geq hv_0/2$ ;当 $\theta = 120^\circ$ 时, $E = 112.5 \text{ keV}$ ,虽有上述解释,仍不能排除产生了二次散射和双光子散射的可能。因为二次散射和双光子散射能量范围也在这两个峰所在范围内。只不过它们的能量值可能是连续的,不形成峰,但不能排除二次散射和双光子散射对谱图的贡献,即二次散射和双光子散射是可能发生的。

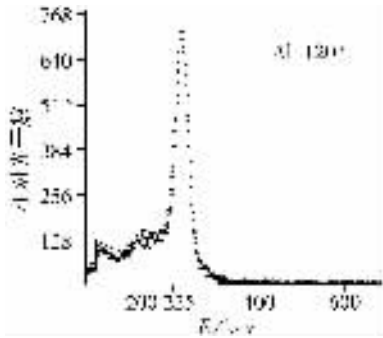


图 4 散射角为  $120^\circ$  时的康普顿散射谱图

## 4 结论

讨论了光子与电子间康普顿散射的非理想情况二次散射和双光子散射。根据能量动量守恒和相对论效应<sup>[12]</sup>,得出二次散射和双光子散射对波长的改变有很大影响,比普通康普顿散射对波长的改变大得多。波长的变化不仅与散射角 $\theta$ 有关,而且还与入射光子的波长(频率)有关。这里仅讨论了二次散射和双光子散射,事实上以此为基础,还可以进一

步讨论二次以上的多重康普顿散射问题,双光子散射中的频率不相同、甚至多光子散射的问题。

## 参考文献:

- [1] 姜继咏,董咪达. 大学基础物理教育的统计调查及其分析[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),1995,12(2): 83-89.
- [2] ZHU P, PEI X G, BABOT D, et al. In-line Density Measurement System Using X-ray Compton Scattering[J]. NDT & E International, 1995, 28(1): 3-7.
- [3] EVANS S H, MARTIN J B, BURGGRAF L W, et al. Non-destructive Inspection Using Compton Scatter Tomography[J]. IEEE Trans Nucl Sci NS, 1998, 45: 950-956.
- [4] DUKE P R, HANSON J A. Compton Scatter Densitometry with Polychromatic Sources[J]. Medical Physics, 1984, 11(5): 624-632.
- [5] HARDING G. X-ray Scatter Tomography for Explosives Detection[J]. Radiat Phys and Chem, 2004, 71: 869-881.
- [6] 杨福家. 原子物理学[M]. 3版. 北京: 高等教育出版社, 2000.
- [7] CULLITY B D. Element of X-Ray Diffraction[M]. Boston: Addison-wesley, 1978.
- [8] 裴光文. 单晶、多晶和非晶物质的 X 射线衍射[M]. 济南: 山东大学出版社, 1989.
- [9] PRATT R H. Tutorial on Fundamentals of Radiation Physics: Interactions of Photons with Matter[J]. Radiation Physics and Chemistry, 2004, 70: 595-603.
- [10] JAUCHAND J M, ROHLUCH F. The Theory of Photons and Electrons[M]. New York: Springer-Verulig, 1976.
- [11] 江藤秀雄. 辐射防护[M]. 北京: 北京原子能出版社, 1986.
- [12] 陶才德, 杨莉. 氢原子能级精细结构的微扰计算[J]. 西华师范大学学报(自然科学版), 2004, 25(4): 455-458.

(责任编辑 欧红叶)