

尖端导体表面附近的电场特性*

刘定兴, 胡先权, 周天润

(重庆师范大学 物理学与信息技术学院, 重庆 400047)

摘要: 以圆锥形导体为研究对象, 从求拉普拉斯方程在边界条件下的解出发, 得到尖端导体附近的电势分布和等势线方程。利用场强与电势的关系, 导出尖端导体表面附近电场强度的数学表达式及其表面电荷密度。用计算工具软件 Mathematica 作出相应的等势线簇图形。

关键词: 尖端导体; 电势; 电场强度; 等势线; 等势线簇

中图分类号: O441.1

文献标识码: A

文章编号: 1672-6693(2007)01-0056-03

Study on Electrostatic Field Near by the Sharp-point Conductor Surface

LIU Ding-xing, HU Xian-quan, ZHOU Tian-run

(College of physics and Information Technology, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: According to the theories of mathematics and physics, the research into the electrostatic field near by the sharp-point conductor surface has been proceeded. The electrical potential distribution and the equation of equipotential line are given. Making use of the relationship of electrical field intensity and the electrical potential, deduce the mathematic expression of electrical field intensity and superficial charge density has been deduced, making use of the software package facility of Mathematica5.0, equipotential line maps is plotted.

Key words: sharp-point conductor; electrical potential; electrical field intensity; equipotential line; equipotential line cluster

对于球形导体或者圆柱形导体静电场的求解比较常见, 而对于尖端导体表面附近静电场的研究比较少, 求出尖端导体表面附近的等势线方程和电场线方程则未见报道。本文以圆锥形导体作为尖端导体例子, 采用数学物理理论及工具软件 Mathematica 相结合, 求出用初等函数表示的电势、电场强度的精确解, 并作出等势线簇。

1 尖端导体表面附近的电势分布和电场强度

考虑一个半顶角为 α 的圆锥形导体尖端附近的电势分布和电场强度。建立坐标系, 如图 1 所示。这是一个与方位角 ϕ 无关的具有对称轴(Z 轴)的三维静电场问题。讨论的是 $0 \leq \theta \leq \pi - \alpha$ 原点附近的区域。为了便于计算, 不妨设导体上的电势为零, 其外部空间电场的电势满足拉普拉斯方程 $\nabla^2 \varphi = 0$,

而在轴对称势问题中拉普拉斯方程的一般解取为^[1]

$\varphi(r, \theta) = \sum_v [A_v r^v + B_v r^{-(v+1)}] P_v(\cos \theta)$ 。而 $P(x)$ (其中 $x = \cos \theta$) 应满足勒让德方程^[1]

$$(1-x^2) \frac{d^2 P}{dx^2} - 2x \frac{dP}{dx} + v(v+1)P = 0 \quad (1)$$

因为原点上的电势有限, 要求式中 $v > 0$, 且 $B_v = 0$, 则在 $0 \leq \theta \leq \pi - \alpha$ 区间内, 轴对称电势的完全解由线性叠加得到

$$\varphi(r, \theta) = A_1 r^{v_1} P_{v_1}(\cos \theta) + A_2 r^{v_2} P_{v_2}(\cos \theta) + \dots + A_K r^{v_K} P_{v_K}(\cos \theta) + \dots \quad (2)$$

由于尖端导体尖端表面附近(即 $r=0$ 附近)静电场的一般特性得知导体电荷的分布情况, 求和式的主要贡献来自 r 的最低次幂。

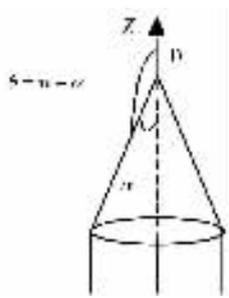


图 1 坐标系

* 收稿日期: 2006-03-28

资助项目: 重庆市科委自然科学基金项目(2005BB8267)

作者简介: 刘定兴(1977-), 女, 重庆人, 硕士研究生, 研究方向为电磁物理、数学物理。

因此可以用(2)式的第一项来近似地描写 $r=0$ 附近电势的特性,即

$$\varphi(r, \theta) = Ar^v P_v(\cos\theta) \quad (3)$$

现在(3)式中的待定常量是 A 和 v ,重要的是 v 的值。要确定常量 A ,必须用某一大曲面包围着的电场存在的区域,这里不考虑常量 A ,只通过 v 对尖角附近的电场作一定分析。圆锥导体是一个尖锥体,即 $\alpha \ll 1$,此时 $v \ll 1$,当 $\alpha \rightarrow 0$ 时圆锥尖端周围区域的电势 φ 几乎与角度 θ 无关(犹如点电荷的场),所以在 $\alpha \ll 1$ 的情况下可设想

$$P_v(\cos\theta) = K[1 + f(\theta)]$$

式中的 K 代表常数,因为 $\alpha \rightarrow 0$ 时,锥尖周围各处电势 φ 趋近于常数,所以 $f(\theta) \ll 1$ 。而 $P_v(x)$ 满足(1)式,令 $x = \cos\theta$, $P_v(\cos\theta) = K[1 + f(\theta)]$,于是(1)式可以写成

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{dK[1+f(\theta)]}{d\theta} \right) + v(v+1)K[1+f(\theta)] = 0$$

又 $f(\theta) \ll 1$, $v \ll 1$,化简得

$$f(\theta) = v \ln 2 + v \ln \left(\sin \frac{\theta}{2} \right) + v \ln \left(\cos \frac{\theta}{2} \right) +$$

$$C_1 \ln \left(\sin \frac{\theta}{2} \right) - C_1 \ln \left(\cos \frac{\theta}{2} \right) + C_2$$

因为在区域 $0 \leq \theta \leq \pi - \alpha$ 内 $f(\theta)$ 应无奇点,所以 $C_1 = -v$,令积分常数 $C_2 = -v \ln 2$,有可能导致新的物理意义,于是

$$f(\theta) = 2v \ln \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)$$

因此,锥形导体尖端附近的电势为

$$\varphi = Ar^v \left[1 + 2v \ln \left(\cos \frac{\theta}{2} \right) \right]$$

当 $\theta = \pi - \alpha$ 时 $\varphi = 0$,与前面假设一致,表面电势为零,故有

$$1 + 2v \left[\ln \left(\cos \frac{\pi - \alpha}{2} \right) \right] = 0$$

又因为 $\alpha \ll 1$,所以 $\cos \frac{\pi - \alpha}{2} = \sin \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}$,由此得到最小的 v 值

$$v = \frac{1}{2 \ln \frac{2}{\alpha}} \quad (4)$$

电势与电场强度满足 $E = -\nabla \varphi^{[2]}$ 的关系式,可以根据已求出的电势分布得到锥形导体表面附近的电场强度,即

$$\vec{E}_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \vec{e}_r, \quad \vec{E}_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \vec{e}_\theta$$

$$\vec{E}_r = -Avr^{v-1} \left[1 + 2v \ln \left(\cos \frac{\theta}{2} \right) \right] \vec{e}_r \quad (5)$$

$$\vec{E}_\theta = Avr^{v-1} \tan \frac{\theta}{2} \vec{e}_\theta \quad (6)$$

尖端导体表面的面电荷密度

$$\sigma = -\varepsilon_0 E_\theta \Big|_{\theta=\pi-\alpha} = -\varepsilon_0 Avr^{v-1} \cot \frac{\theta}{2} \quad (7)$$

由(5)、(6)、(7)式不难发现,尖劈导体尖端表面附近的电场强度和电荷面密度在 $r \rightarrow 0$ 附近都是随 r^{v-1} 变化,导体表面曲率越大,电荷密度越大。由(4)式可知 v 是随 α 而变的。根据(4)式可以计算出在 α 取不同的值时对应的 v 值,部分计算见表1。

表1 不同的 α 对应的 v

$\alpha/^\circ$	10	8	5	3	1	0.83	0.50
v	0.205	0.189	0.160	0.137	0.106	0.102	0.092

由表中可以看出,当 $\alpha = 10^\circ$ 时 $v = 0.2$,电荷面密度和 $r^{-0.8}$ 成正比;当 $\alpha = 1^\circ$ 时 $v = 0.1$,电荷面密度和 $r^{-0.9}$ 成正比;当 $\alpha = 0.25^\circ$ 时 $v = 0.08$,电荷面密度和 $r^{-0.92}$ 成正比。不难看出,只有当 $\alpha \rightarrow 0$ 时 $v \rightarrow 0$,也就是说只有在无穷尖细的情况下,电荷面密度才和 r^{-1} 成正比。所以,当 $v < 1$ 时,在离尖端愈近的地方,电荷面密度愈大,在离尖端愈远的地方,电荷面密度愈小。而导体表面的电场强度又与其面电荷密度成正比,所以在 $v < 1$ 时,在离尖端愈近的地方,电场强度愈大,在离尖端愈远的地方,电场强度愈弱。

2 尖端附近的等势线方程

由电磁学等相关知识,得等势线与电势分布的关系^[3], $\varphi = c_1$,有

$$Ar^v \left[1 + 2v \ln \left(\cos \frac{\theta}{2} \right) \right] = c_1 \quad (c \text{ 为常数})$$

化简得

$$e^{\frac{c_1}{2vAr^v}} - \cos \frac{\theta}{2} = e^{\frac{1}{2v}} \quad (8)$$

即(8)式就是锥形导体尖端表面附近的等势线方程。

3 等势线的描绘

令(8)式中的 $\varphi = c$ (常数),即可得到等势线函数。该函数为二维的极坐标形式。本文采用 Mathematica^[4]绘图函数中的 PolarPlot 命令绘制函数图形。取 $\alpha = 10^\circ$ 时的 v 为 0.205,常数 c 分别等于 10, 20, 30, 45, 50, 75, 90 V。 θ 取值为 0.1° 到 3.1° 和 -

0.1⁰到-3.1⁰可以画出对称的 8 条等势线,再用 ListPlot 命令画出直线构成尖端,结合等势线,则得到尖端附近二维的等势线簇,如图 2 所示。

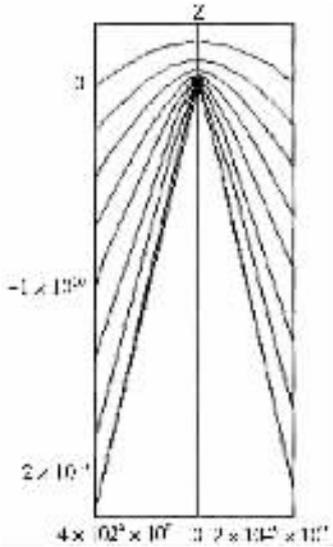


图 2 等势线簇图

由以上分析可以看出当金属带电时,其表面曲率越大的地方电荷越密度越大,表面附近的电场强度越强,因而越容易击穿空气而放电。

参考文献:

[1] 郭硕鸿. 电动力学[M]. 北京:高等教育出版社,1997.
 [2] 王竹溪,郭敦仁. 特殊函数概论[M]. 北京:北京大学出版社,2000.
 [3] 李旭,胡先权. 偏心圆柱面静电场电势分布和电场强度分布[J]. 重庆师范学院学报(自然科学版),2002,19(4):47-49.
 [4] 张勇,文家全,王挽澜. 含幂指数的一个不等式猜想的研究[J]. 四川师范大学学报(自然科学版),2005,28(2):248.

(责任编辑 欧红叶)

(上接 39 页)

算法比单一模拟退火更易收敛到性质更好的优解。

表 2 100 次实验中非线性度出现次数

非线性度	模拟退火	混沌模拟退火	非线性度	模拟退火	混沌模拟退火
94	2	0	108	11	12
96	5	1	110	8	14
98	9	2	112	7	15
100	12	4	114	3	13
102	14	6	116	2	8
104	13	6	118	2	5
106	12	11	120	0	2
			122	0	1

6 结论

本文利用 Chebyshev 映射的优良性质,提出一种混沌模拟退火算法,用于寻找高度非线性的平衡布尔函数。经实验表明,此算法比单一的模拟退火算法在密码学领域具有更大优越性。另外,此算法通用性强,稍加改动,可以运用于其它的组合优化问题。

参考文献:

[1] 冯登国. 频谱理论及其在密码学中的应用[M]. 北京:科

学出版社,2000.

[2] 冯登国,肖国镇. 高度非线性平衡布尔函数的构造[J]. 电子学报,1996,24(4):95-97.
 [3] PASALIC E, MAITRA S. New Constructions of Resilient and Correlation Immune Boolean Functions Achieving Upper Bound on Nonlinearity[J]. Journal of Computing, 1999,18:197-207.
 [4] JOHN A C, JEREMY L. Searching Cost Functions[C]. International Conference on Evolutionary Computation. Portland OR, USA 2004:1517-1524.
 [5] 杨小平,付静. 一种混沌密码体制的实现[J]. 成都:四川师范大学学报(自然科学版),2004,27(4):431-433.
 [6] KOHDA T, TSUNEDA A. Statistics of Chaotic Binary Sequences[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1997,43(1):104-112.
 [7] 王凌. 智能优化算法及其应用[M]. 北京:清华大学出版社,2001.
 [8] 吕佳. 基于人工免疫网络的多峰值函数优化[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2006,23(3):45-48.

(责任编辑 游中胜)