对偶单纯形算法的改进*

田 川
(重庆师范大学 数学与计算机科学学院,重庆 400047)

中图分类号:O221.1 文献标识码:B 文章编号:1672-6693(2007)02-0091-02

考虑问题(LP) $\quad M\inf(x) = CX$

$$\text{s. t.}\begin{cases}AX = b\\ X \geqslant 0\\ b \geqslant 0\end{cases}$$

$C = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$;$A$ 是 $m\times n$ 实矩阵,$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm T} \in \mathbf{R}^n$;$b = (b_1, b_2, \cdots, b_m)^{\mathrm T}$。

定义 1 设 $\{x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{im}\}$ (1)

是(LP)的一组基,对应的基阵是 B,对应的基解为 $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$,如果(LP)的检验数全部非正,即 $C_BB^- A - C \leqslant 0$ 则称(1)式是问题(LP)的正则基,称 X^0 是(LP)的正则解。

定义 2 如果线性规划问题(LP)的任意一个正则基所对应的非基变量的检验数都严格小于零,则称它的对偶问题是非退化。

1 问题的提出

假设问题(LP)是非退化的,若给出了正则基,就可以写出对应的典式,可得到第一个正则解,如果所有基变量的值都非负,那么这个正则解就是问题的最优解。对此,有很多学者作了大量研究,获得了许多成果[1-4]。但是,通常得到的第一个正则解的基变量的值都有几个分量是负数,这也就决定了下一步迭代,出基变量有不同的选择,当然入基变量也就不同了,这样迭代到最优解(或判断无界解)的过程和所需步骤是不一样多的。现在的问题是,在这些负数中,应该选哪个负数对应的基变量为出基变量,从而使得问题解决需要的计算量最小。

2 推导和结果

设 $\{x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{im}\}$ 是(LP)的一组基,$S \subset \{1, 2, \cdots, n\}$ 表示基变量下标组成的集合,用 $R \subset \{1, 2, \cdots, n\} \backslash S$ 表示非基变量下标组成的集合,记 $B = [p_{i1}, p_{i2}, \cdots, p_{im}]$,$N = [p_{j1}, p_{j2}, \cdots, p_{jn-m}]$,$X_B = [x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{im}]$,$X_N = [x_{j1}, x_{j2}, \cdots, x_{jn-m}]$,$B^- b = [\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{im}]^{\mathrm T}$;$\beta_{ij} = (B^- P_j)_i$,$i \in S$,$j \in R$,$\lambda_j = C_BB^- A - C$,$j \in R$,则可写出对应的典式

$$\min \quad f(x) = f_0 - \sum_{j\in R}\lambda_j x_j \tag{2}$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}x_i + \sum\limits_{j\in R}\beta_{ij}x_j = \alpha_i, i \in S\\ X \geqslant 0\end{cases} \tag{3}$$

其中 $f_0 = C_BB^- b$。如果上式中的 α_i 全部 $\geqslant 0$,则已得最优解,如果存在 $\alpha_i < 0$,则可以通过对偶单纯形算法,得到最优解或有无界解;当有多个 $\alpha_i < 0, i \in S$,则按下面推导的准则来确定旋转迭代的主元。记 T 为取负值的基变量组成的集合,现任取 T 中的一个元素,记为 x_L,则为出基变量。由对偶单纯形的进基规则,从非基变量中选 x_K 为进基变量,照这样找到所有的序对(L,K),写出其对应的典式如下。

$$x_K = \frac{\alpha_L}{\beta_{LK}} - \sum_{\substack{j\in R\\ j\neq K}}\frac{\beta_{Lj}}{\beta_{LK}}x_j - \frac{1}{\beta_{LK}}x_L, x_i = \left(\alpha_i - \beta_{iK}\frac{\alpha_L}{\beta_{LK}}\right) - \sum_{\substack{j\in R\\ j\neq K}}\left(\beta_{ij} - \beta_{iK}\frac{\beta_{Lj}}{\beta_{LK}}\right)x_j + \frac{\beta_{iK}}{\beta_{LK}}x_L, i \in S\backslash\{i\}$$

$$\min f = \left(f_0 - \lambda_K\frac{\alpha_L}{\beta_{LK}}\right) - \sum_{\substack{j\in R\\ j\neq K}}\left(\lambda_j - \lambda_K\frac{\beta_{Lj}}{\beta_{LK}}\right)x_j + \frac{\lambda_K}{\beta_{LK}}x_L$$

由于要求正则性,可得到进基规则如下。

$$K = \min\left\{j \in R \mid \frac{\lambda_j}{\beta_{Lj}}, \beta_{Lj} < 0\right\} \tag{4}$$

这时,对应的正则解中基变量的取值是

$$\begin{cases}x_K = \dfrac{\alpha_L}{\beta_{LK}}\\ x_i = \left(\alpha_i - \beta_{iK}\dfrac{\alpha_L}{\beta_{LK}}\right)\end{cases}$$

显然 $x_K \geqslant 0$,本文的目的是使 T 的基数最小,即

* 收稿日期:2006-08-17
作者简介:田川(1982-),男,土家族,贵州铜仁人,硕士研究生,研究方向为运筹学与控制论。

要求选适当的(L,K),使得$x_i = (\alpha_i - \beta_{iK}\frac{\alpha_L}{\beta_{LK}}) \geqslant 0$尽可能多的成立,即$\alpha_i \geqslant \beta_{iK}\frac{\alpha_L}{\beta_{LK}}$成立,其实质就是要求$T$中的元素的取值尽可能多变成非负数。选择这样的$(L,K)$使得$T$的基数最小。

$$(L,K) = \min\left\{\beta_{iK}\frac{\alpha_{i_0}}{\beta_{i_0 j_0}}, i \in S, x_{i_0} < 0, j_0 \text{ 满足(4)式}\right\} \tag{5}$$

由(5)式即可得到$\alpha_i \geqslant \beta_{iK}\frac{\alpha_L}{\beta_{LK}}, i \in S$成立的个数最多,也即$x_i = (\alpha_i - \beta_{iK}\frac{\alpha_L}{\beta_{LK}}) \geqslant 0$成立的个数也就最多,由于基变量一定,于是$T$的基数最小。

由于每次迭代都使在基变量中的负数出现最少,从而每次迭代最大限度保持了基解的可行性,且保留了原来对偶单纯形算法的优点,减少了计算量。

对偶单纯行的迭代步骤如下。

1)从一个正则基$\{x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{im}\}$及对应的正则解$X^0$开始,作出对应的典式;2)如果所有的$\alpha_i \geqslant 0, i \in S$,则$X^0$是最优解,计算结束,否则转3);3)任取$T$中的基变量$x_{i_0}$,转4);4)若对所有的$j \in R$,有$\beta_{i_0 j} \geqslant 0$,则原问题不存在可行解,计算结束,否则转5);5)计算$j_0 = \min\left\{j \in R \mid \frac{\lambda_j}{\beta_{i_0 j}} \quad \beta_{i_0 j} < 0\right\}$,并记这样的$(i_0, j_0) \in M$。若$T$中还有未取的元素,则将之取出,记为新的$x_{i_0}$,转4)。否则,转6);6)计算$(L,K) = \min\left\{\beta_{iK}\frac{\alpha_{i_0}}{\beta_{i_0 j_0}}, i \in S, (i_0, j_0) \in M\right\}$,转7);7)取$x_L$为出基变量,$x_K$为进基变量,进行单纯形迭代,得到新的正则基及对应的正则解,记新的正则解为X^0,作出对应的典式,转2)。

3 举例说明

求解问题 $\min \quad f(x) = 2x_1 + x_2$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geqslant 3 \\ 4x_1 + 3x_2 \geqslant 6 \\ x_1 + 2x_2 \geqslant 2 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

解 引入松弛变量x_3, x_4, x_5,再变形,得

$$\min \quad f(x) = 2x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} -3x_1 - x_2 + x_3 = -3 \\ -4x_1 - 3x_2 + x_4 = -6 \\ -x_1 - 2x_2 + x_5 = -2 \\ x_j \geqslant 0, j = 1,2,3,4,5 \end{cases}$$

取松弛变量x_3, x_4, x_5为基变量,容易验证此基是正则基,单纯形表如表1。

表1 取松弛变量x_3, x_4, x_5为基变量的单纯形表

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	-3	-1	1	0	0	-3
x_4	-4	-3	0	1	0	-6
x_5	-1	-2	0	0	1	-2
	-2	-1	0	0	0	0

在表1中,$\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$都小于零,由(4)式计算得$\beta_{31}, \beta_{42}, \beta_{52}$,再由(5)式计算出

$$\min\left\{\beta_{i1}\frac{\alpha_3}{\beta_{31}}, \beta_{i2}\frac{\alpha_4}{\beta_{42}}, \beta_{i2}\frac{\alpha_5}{\beta_{52}} \mid i = 3,4,5\right\} =$$

$$(L,K) = (4,2)$$

选x_4为出基变量,x_2为进基变量,迭代后得表2。

表2 取x_2, x_3, x_5为基变量的单纯形表

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	-5/3	0	1	-1/3	0	-1
x_2	4/3	-1	0	-1/3	0	2
x_5	5/3	0	0	-2/3	1	2
	-2/3	0	0	-1/3	0	2

用同样的方法得表3。

表3 取x_1, x_2, x_5为基变量的单纯形表

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	0	-5/3	1/5	0	3/5
x_2	0	1	4/5	-3/5	0	6/5
x_5	0	0	1	-1	1	1
	0	0	-2/5	-1/5	0	12/5

如果按以前单纯形方法来选其它的两个β_{31}, β_{52}来计算,会发现基变量取负值不能减少到最少,迭代到最优解的步数也要多些,用上述办法迭代到最优解要的步数最少。

参考文献:

[1] 盛昭瀚,曹忻. 最优化方法基本教程[M]. 南京:东南大学出版社,1992.

[2] 管梅谷,郑汉鼎. 线性规划[M]. 济南:山东科学技术出版社,1983.

[3] BAZARAA M S, JARVIS J J. Linear Programming and Network Flows[M]. Canada:John Wiley & Sons,1977.

[4] 曾昭才,董景荣. 关于单纯形集的一个定理[J]. 重庆师范学院学报(自然科学版),1997,14(4)41-44.

(责任编辑 黄 颖)