2007 年 7 月 重庆师范大学学报(自然科学版) Jul. 2007
第 24 卷 第 3 期 Journal of Chongqing Normal University(Natural Science Edition) Vol. 24 No. 3

线段上连续自映射混沌现象的充分条件*

王 君 祥
(重庆师范大学 数学与计算机科学学院,重庆 400047)

摘 要:2002 年赵勇提出了线段连续自映射混沌现象的几个充分条件,本文在此基础上,用分析的方法根据 ω-极限轨迹的特点将其分为各种情况,得到了线段连续自映射混沌现象的两个充分条件。即设 f 为线段 I 上的一个连续自映射,$x\in\omega(f)-P(f)$,若存在 $m_i\in\mathbf{N}$(当 $i\to+\infty$ 时 $m_i\to+\infty$),使得 $f^{m_i+3}(x)<f^{m_i}(x)<f^{m_i+2}(x)<f^{m_i+1}(x)$,则 f 在 I 是混沌的和设 f 为线段 I 上的一个连续自映射,$x\in\omega(f)-P(f)$,若存在 $m_i\in\mathbf{N}$(当 $i\to+\infty$ 时 $m_i\to+\infty$),使得 $f^{m_i+3}(x)>f^{m_i}(x)>f^{m_i+2}(x)>f^{m_i+1}(x)$ 则 f 在 I 是混沌的,进一步揭示混沌现象的本质。

关键词 混沌映射;周期点集;ω-极限点集
中图分类号:O189.11 **文献标识码**:A **文章编号**:1672-6693(2007)03-0020-03

Some Enough-Conditions of Chaotic Self-Maps on Interval

WANG Jun-xiang
(College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: Based on the predecessor's researches, this paper classifies the characteristics of the ω-limit point locus into various cases and gets two enough-conditions, i. e. theorem 1-theorem 2, is put forward, one set f as on the line segment I upon by oneself continuously, $x\in\omega(f)-P(f)$. If exist $m_i\in\mathbf{N}(i\to+\infty$ and $m_i\to+\infty)$, make $f^{m_i+3}(x)<f^{m_i}(x)<f^{m_i+2}(x)<f^{m_i+1}(x)$ is established, then f is Chaos in I. and One set f as on the line segment I upon by oneself continuously, $x\in\omega(f)-P(f)$. If exist $m_i\in\mathbf{N}$ $(i\to+\infty$ and $m_i\to\infty)$, make $f^{m_i+3}(x)>f^{m_i}(x)>f^{m_i+2}(x)>f^{m_i+1}(x)$ is established, then f is Chaos in I. Further more, it announces the essence of the Chaos phenomenon.

Key words: chaotic self-maps; periodic point sets; ω-limit point sets;

混沌现象的研究已经是动力系统领域中的一个不可忽视的分支。尽管如此,对线段上自映射迭代的研究,还有很多不完善的地方,有许多地方亟待发展和有所突破。线段上的连续自映射成为混沌映射的充要条件一直未能获得很好的解决。对此问题,人们已从多个角度得到了若干充分或必要条件[1-9]。文献[1]用分析的方法根据 ω-极限点轨迹的特点将其分为各种情况,并从其轨迹的特点的角度研究了线段 I 上的连续自映射成为混沌的充分条件,得到了其中的几个充分条件[1]。并为进一步揭示混沌现象的本质提供了一种可以从 ω-极限点轨迹特点的角度进行研究的全新途径。本文在此基础上给出了混沌的另两个充分条件。下文中混沌均是指 L-Y 混沌。

1 概念与引理

定义 1 周期点集[1]为

$P(f)=\{x\mid x\in I$ 且 $\exists n\in\mathbf{N}$,有 $f^n(x)=x\}$。

定义 2 ω-极限点集[1]为

$\omega(f)=\{X\mid \exists x\in I, X$ 为 $\{f^n(x)\}$ 的某一子列的极限$\}$。

定义 3 若闭线段 $K\subset I$ 对 f 不变,即 $f(K)\subset K$,则称限制映射 $f|_K: K\to K$ 为 f 的子系统。

引理 1[5] 设 f 为线段 I 上的一个连续自映射,则以下条件等价

1) f 的周期点集都是 2 的方幂;

2) 对任意的

* 收稿日期:2006-04-24 修回日期:2007-03-05
资助项目:重庆市教委科学研究项目(No. 05JWSK054)
作者简介:王君祥(1978-),男,哈尔滨人,硕士研究生,研究方向为拓扑动力系统。

$x\in\omega(f)-P(f)$,$\omega(x,f)\cap P(f)=\varnothing$。

引理2[6] 设f为线段I上的一个连续自映射,f具有非2方幂的周期点,则f在I上是混沌的。

引理3[1] 设f为线段I上的一个连续自映射,$x\in\omega(f)-P(f)$,若存在k_1,k_2,k_3使得

$$f^{k_1}(x)<T_1<f^{k_2}(x)<T_2<f^{k_3}(x)$$

$T_1,T_2\in I$且为f的不动点,则f必有非2的方幂的周期点。

引理4[4] 设$K\subset I$为闭线段。则$f(K)\subset K$或者$f(K)\supset K\Rightarrow f$在$K$上有不动点。

2 定理及证明

定理1 设f为线段I上的一个连续自映射,$x\in\omega(f)-P(f)$,若存在$m_i\in\mathbf{N}$(当$i\to\infty$时$m_i\to+\infty$),使得

$$f^{m_i+3}(x)<f^{m_i}(x)<f^{m_i+2}(x)<f^{m_i+1}(x)$$

则f在I上是混沌的。

证明 由于

$$f(f^{m_i}(x))=f^{m_i+1}(x)>f^{m_i}(x)$$
$$f(f^{m_i+1}(x))=f^{m_i+2}(x)<f^{m_i+1}(x)$$

所以$\exists T\in(f^{m_i}(x),f^{m_i+1}(x))$,使得$f(T)=T$。

下面分几种情况讨论。

1)若$T\in(f^{m_i+2}(x),f^{m_i+1}(x))$时,由于

$$f(f^{m_i}(x))=f^{m_i+1}(x)>f^{m_i}(x)$$
$$f(f^{m_i+2}(x))=f^{m_i+3}(x)<f^{m_i+2}(x)$$

所以$\exists T_1\in(f^{m_1}(x),f^{m_i+2}(x))$,使得$f(T_1)=T_1$。则根据引理2和引理3知,$f$在$I$是混沌的。

2)若$T\in(f^{m_i}(x),f^{m_i+2}(x))$时

i)若f在$(f^{m_i+2}(x),f^{m_i+1}(x))$有不动点,设为$T,T'$,则有

$$f^{m_i}(x)<T<f^{m_i+2}(x)<T'<f^{m_i+1}(x)$$

取$m_i=k_1,m_i+2=k_2,m_i+1=k_3$,符合引理3条件,则$f$有非2方幂的周期点,根据引理2得,$f$在$I$是混沌的。

ii)若f在$(f^{m_i+3}(x),f^{m_i}(x))$有不动点,同上,则根据引理2和引理3知,$f$在$I$是混沌的。

iii)现在设f在$(f^{m_i+3}(x),f^{m_i}(x))$和在$(f^{m_i+2}(x),f^{m_i+1}(x))$内没有不动点。因为总可以找到$\{f^{m_i}(x)\}$的子列满足情况iii),不妨就设$\{f^{m_i}(x)\}$满足。由于$x\in\omega(f)$,所以$\{f^{m_i}(x)\}$存在一列无穷单调子列。

首先,令$\{f^k(x)\}$为$\{f^{m_i}(x)\}$的一无穷单调递增子列($k\in\mathbf{N},k>m_i+3$)($i=1,2,3,\cdots\cdots$)。

第一,若$\{f^k(x)\}$中至少有落于$(f^{m_i}(x),f^{m_i+2}(x))$的项,不妨设为$f^{k'}(x)\in\{f^k(x)\}$为$\{f^k(x)\}$中第1个落于$(f^{m_i}(x),f^{m_i+2}(x))$的项。

① 若$f^{k'}>T$时,且

$$f(f^{m_i+2}(x))=f^{m_i+3}(x)<f^{m_i+2}(x),$$
$$f(f^{k'}(x))=f^{k'+1}(x)>f^{k'}(x)$$

则$\exists T_2\in(f^{k'}(x),f^{m_i+2}(x))$使得$f(T_2)=T_2$。根据引理2和引理3知,$f$在$I$是混沌的;

② 若$f^{k'}(x)<T$且$f^{k'}(x)>f^{m_i}(x)$时,由于

$$f^{k'-m_i-2}(f^{m_i+3}(x))=f^{k'+1}(x)>f^{m_i+3}(x)$$
$$f^{k'-m_i-2}(f^{m_i}(x))=f^{k'-2}(x)<f^{m_i}(x)$$

则$\exists\delta\in(f^{m_i+3}(x),f^{m_i}(x))$有$f^{k'-m_i-2}(\delta)=\delta$,又由于 $f^{k'-m_i-3}(f^{m_i}(x))=f^{k'-3}(x)<f^{m_i}(x)$,

$$f^{k'-m_i-3}(f^{k'}(x))=f^{k'+k'-m_i-3}(x)\geq f^{k'}(x)$$

则$\exists\beta\in(f^{m_i}(x),f^{k'}(x))$,有$f^{k'-m_i-3}(\beta)=\beta$。

由$k'-m_i-3,k'-m_i-2$中必有一项非1的奇数且f在$(f^{m_i+3}(x),f^{m_i}(x))$和在$(f^{m_i}(x),f^{k'}(x))$内没有不动点(若有不动点,则根据引理2和引理3知,f在I是混沌的),故β,δ之中必有一个为不动点的奇周期点,故f在I上必有非2方幂的周期点。则根据引理2和引理3知,f在I是混沌的。

第二,若$\{f^k(x)\}$中没有项落在$(f^{m_i}(x),f^{m_i+2}(x))$。

① 设$f^{k'}(x)$为第一个落在$f^{m_i+2}(x)$右边的项。由于

$$f^{k'-m_i-2}(f^{m_i+2}(x))=f^{k'}(x)>f^{m_i+2}(x)$$
$$f^{k'-m_i-2}(f^{m_i+1}(x))=f^{k'-1}(x)<f^{m_i+1}(x)$$

则$\exists\delta\in(f^{m_i+2}(x),f^{m_i+1}(x))$有$f^{k'-m_i-2}(\delta)=\delta$。

又由于

$$f^{k'-m_i-3}(f^{m_i+3}(x))=f^{k'}(x)>f^{m_i+3}(x)$$
$$f^{k'-m_i-3}(f^{m_i}(x))=f^{k'-3}(x)<f^{m_i}(x)$$

则$\exists\beta\in(f^{m_i+3}(x),f^{m_i}(x))$,有$f^{k'-m_i-3}(\beta)=\beta$,由$k'-m_i-3,k'-m_i-2$中必有一项非1的奇数且在$(f^{m_i+3}(x),f^{m_i}(x))$和在$(f^{m_i+2}(x),f^{m_i+1}(x))$内没有不动点,故$\beta,\delta$之中必有一个为不动点的奇周期点。

故f在I上必有非2方幂的周期点。则根据引理2和引理3知,f在I是混沌的;

② 若$\{f^k(x)\}$没有落在$f^{m_i+2}(x)$右边的项,则有

a)$f^{m_i+2+k}(x)<f^{m_i+2}(x)$,($k\in\mathbf{N}$);

b)$T\in(f^{m_i}(x),f^{m_i+2}(x))$且$(f^{m_i+2}(x),f^{m_i+1}(x))$和$(f^{m_i+3}(x),f^{m_i}(x))$内无不动点;

c) $f^{m_i+3}(x) < f^{m_i} < (x) < f^{m_i+2}(x) < f^{m_i+1}(x)$。

则得到 $\{f^{m_i+1}(x)\}$ 为一递减点列，从而

$$\{f^{m_i}(x)\},\ \{f^{m_i+1}(x)\},\ \{f^{m_i+2}(x)\},\ \{f^{m_i+3}(x)\}$$

均有且仅有一个极限点。设 $a, f(a), f^2(a), f^3(a)$，满足 $f^3(a) < a < T < f^2(a) < f(a)$，其中必有 $f(a) = f^2(a)$，所以 $\omega(x,f) \cap P(f) \neq \varnothing$，根据引理 1 和引理 2 知，$f$ 在 I 上是混沌的；

③ 若 $\{f^k(x)\}$ 没有落在 $f^{m_i}(x)$ 左边的项，则有

a) $f^{m_i+3+k}(x) > f^{m_i+3}(x)$，$(k \in \mathbf{N})$；

b) $T \in (f^{m_i}(x), f^{m_i+2}(x))$ 且 $(f^{m_i+2}(x), f^{m_i+1}(x))$ 和 $(f^{m_i+3}(x), f^{m_i}(x))$ 内无不动点；

c) $f^{m_i+3}(x) < f^{m_i}(x) < f^{m_i+2}(x) < f^{m_i+1}(x)$。

则得到 $\{f^{m_i+3}(x)\}$ 为一递增点列，从而

$$\{f^{m_i}(x)\},\ \{f^{m_i+1}(x)\},\ \{f^{m_i+2}(x)\},\ \{f^{m_i+3}(x)\}$$

均有且仅有一个极限点。设 $a, f(a), f^2(a), f^3(a)$，满足 $f^3(a) < a < T < f^2(a) < f(a)$，其中必有 $a = f^3(a)$，所以 $\omega(x,f) \cap P(f) \neq \varnothing$，且是三周期点，所以 f 在 I 上是混沌的。

其次，令 $\{f^k(x)\}$ 为 $\{f^{m_i}(x)\}$ 的一无穷单调递减子列。$(k \in \mathbf{N}, k > m_1 + 3)$ $(i = 1,2,3,\cdots)$。

第一，若 $\{f^k(x)\}$ 中至少有落于 $f^{m_i}(x)$ 左边的项，不妨设为 $f^{k'+1}(x) \in \{f^k(x)\}$ 为 $\{f^k(x)\}$ 中第一个落于 $f^{m_i}(x)$ 左边的项。

① 若 $f^{k'} > T$ 时，且

$$f(f^{m_i}(x)) = f^{m_i+1}(x) > f^{m_i}(x),$$
$$f(f^{k'+1}(x)) = f^{k'+2}(x) < f^{k'+1}(x)$$

则 $\exists T_3 \in (f^{k'+1}(x), f^{m_i}(x))$，使得 $f(T_3) = T_3$。

则根据引理 2 和引理 3 知，f 在 I 是混沌的；

② 若 $f^{k'}(x) < T$ 时，由于

$$f(f^{m_i}(x)) = f^{m_i+1}(x) > f^{m_i}(x)$$
$$f(f^{k'}(x)) = f^{k'+1}(x) < f^{k'}(x)$$

则 $\exists T_4 \in (f^{m_i}(x), f^{k'}(x))$，使得 $f(T_4) = T_4$。根据引理 2 和引理 3 知，f 在 I 是混沌的。

第二，若 $\{f^k(x)\}$ 中没有项落在 $f^{m_i}(x)$ 左边的项

① $f^{m_i+3+k}(x) > f^{m_i+3}(x)$，$(k \in \mathbf{N})$；

② $T \in (f^{m_i}(x), f^{m_i+2}(x))$ 且 $(f^{m_i+2}(x), f^{m_i+1}(x))$ 和 $(f^{m_i+3}(x), f^{m_i}(x))$ 内无不动点；

③ $f^{m_i+3}(x) < f^{m_i}(x) < f^{m_i+2}(x) < f^{m_i+1}(x)$。

则得到 $\{f^{m_i+3}(x)\}$ 为一递增点列，从而

$$\{f^{m_i}(x)\},\ \{f^{m_i+1}(x)\},\ \{f^{m_i+2}(x)\},\ \{f^{m_i+3}(x)\}$$

均有且仅有一个极限点。设 $a, f(a), f^2(a), f^3(a)$，满足 $f^3(a) < a < T < f^2(a) < f(a)$，其中必有 $a = f^3(a)$。所以 $\omega(x,f) \cap P(f) \neq \varnothing$，且是三周期点，所以 f 在 I 上是混沌的。

综上，f 在 I 是混沌的。　　证毕

定理 2　设 f 为线段 I 上的一个连续自映射，$x \in \omega(f) - P(f)$，若存在 $m_i \in \mathbf{N}$（当 $i \to +\infty$ 时 $m_i \to +\infty$），使得

$$f^{m_i+3}(x) > f^{m_i}(x) > f^{m_i+2}(x) > f^{m_i+1}(x)$$

则 f 在 I 上是混沌的。

由于是定理 1 的对称情况，故同理得证。

参考文献：

[1] 赵勇. 线段上连续自映射混沌现象的几个充分条件[J]. 四川师范学院学报（自然科学版），2002，23（4）：342-344.

[2] LI T Y，YORKE J. Period Three Imply Chaos Amer[J]. Math Monthly，1975，82：985-992.

[3] 耿祥义. Li-Yorke 混沌的充要条件[J]. 数学学报，2001，44（5）：929-932.

[4] 周作领. 一维动力系统[J]. 数学季刊，1988，3（1）：42-64.

[5] 张景中，熊金城. 函数迭代与一维动力系统[M]. 成都：四川教育出版社，1992.

[6] 赵勇. 混沌映射下周期点的性质[J]. 四川师范学院学报（自然科学版），2000，20（1）：25-30.

[7] 熊金城. 线段映射的动力体系：非游荡点，拓扑熵及混乱[J]. 数学进展，1988，17（1）：1-11.

[8] 陈燕芬. 连续映射的紧致系统的拓扑熵[J]. 重庆师范大学学报（自然科学版），2004，21（4）：7-9.

[9] 赵勇，邹英. 线段上连续自映射混沌现象的几个充分条件（二）[J]. 西华师范大学学报（自然科学版），2002，24（3）：335-337.

（责任编辑　黄　颖）