一种新的时滞细胞神经网络全局渐近稳定性准则*

杨德刚[1,2]
(1. 重庆师范大学 数学与计算机科学学院,重庆 400047;2. 重庆大学 计算机学院,重庆 400044)

摘 要:研究了一类具有时滞的细胞神经网络全局稳定性问题。首先,提出所研究的时滞细胞神经网络模型、系统激活函数所需满足的条件及本文需要用到的引理。然后,将所研究的系统通过一个等式进行线性变换,在定义一个与系统相关的积分操作基础上讨论时滞细胞神经网络的全局渐近稳定性。与早期的文献结果相比,本文所得结果具有更少保守性,并且该条件是与时滞相关的。本文所得到的稳定性准则可以很容易地求出系统稳定的时滞上界,进而可以很容易得到时滞无关稳定性结果。最后,用一个数值例子证明本文所得的稳定性条件是有效的。

关键词:时滞;全局渐近稳定性;细胞神经网络;线性矩阵不等式;Lyapunov 泛函
中图分类号:TP183 文献标识码:A 文章编号:1672-6693(2007)03-0046-05

New Global Asymptotic Stability Condition of Cellular Neural Networks with Delays

YANG De-gang[1,2]
(1. College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047;
2. College of Computer Science and Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

Abstract: In this paper the global asymptotic stability of cellular neural networks with delays is investigated by utilizing Lyapunov functional method and the linear matrix inequality (LMI) technique. Distinct difference from other analytical approaches lies in "linearization" of the neural network model, by which the considered neural network model is transformed into a linear system. Then, so called parameterized first-order model transformation is used to transform the linear system. We establish novel sufficient conditions for the cellular neural networks to be globally asymptotic stable by utilizing Lyapunov-Krasovskii functional method and some well-know inequalities. Compared with the earlier results in the literature, these results are less restrictive and conservative. The advantage of the proposed approaches is that resulting stability criteria can be used efficiently via existing numerical convex optimization algorithms, such as the interior-point algorithms for solving LMIs. The results are dependent on the time delay. Numerical example is given to show the effectiveness of our proposed method.

Key words: delay; global asymptotic stability; cellular neural network; linear matrix inequality; Lyapunov functional

L. O. Chua 和 L. Yang 于1988年提出细胞神经网络模型(Cellular Neural Networks, CNN)[1]。它是当今数学、信息科学、计算机科学、电子工程等领域研究的热点之一。由于细胞神经网络在信息处理、优化问题、图像处理等方面的广泛应用,国际上十分重视"细胞神经网络"的理论和应用研究。而在实际应用中需要引入具有时滞的细胞神经网络(DCNN)。

在文献[2],作者研究了细胞神经网络的全局稳定性,提出了几个使细胞神经网络在平衡点稳定的、与时滞无关的新充分条件。文献[3]的作者用Lyapunov-Kroasovskii泛函和线性矩阵不等式方法来研究了细胞神经网络的指数稳定性及其收敛率。文中得到的指数稳定性条件是与时滞相关的。文献[4-6]针对时滞细胞神经网络,给出了平衡点全局渐近稳定的充分条件。然而,由于神经网络具有时间和空间特性,因此,对时滞细胞神经网络模型的研究具有复杂性。

* 收稿日期:2007-04-20
资助项目:国家自然科学基金项目(No. 60573047, No. 60574024);重庆市自然科学基金项目(No. 8503);重庆市教委科技计划项目(No. KJ060804, No. KJ060818)
作者简介:杨德刚(1976-),男,四川自贡人,副教授,博士研究生,硕士生导师,研究方向为非线性系统、稳定性理论等。

本文研究DCNN的稳定性问题,首先通过一个等式将所研究系统转换为线性的,然后定义一个操作,在这个操作上用Lyapunov类型定理和线性矩阵不等式方法得到具有一般性的网络平衡点全局稳定性充分条件,并用实验验证其比一些已知的文献所得结果保守性更优。

本文余下部分组织如下:第2段给出本文研究所需的引理;第3段用Lyapunov稳定性理论和线性矩阵不等式方法给出时滞细胞神经网络的全局稳定性条件;第4段举出一个例子,用以证明所得结果的有效性;最后给出结论。

1 神经网络模型及预备知识

本文研究如下的时滞细胞神经网络模型:

$$\dot{u}_i(t)=-d_iu(t)+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}g_j(u_j(t))+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}g_j(u_j(t-\tau))+I_i,\quad i=1,2,\cdots,n \tag{1}$$

其矩阵形式为

$$\dot{u}(t)=-Du(t)+AG(u(t))+BG(u(t-\tau))+I \tag{2}$$

其中,$u(t)=[u_1(t),u_2(t),\cdots,u_n(t)]^{\mathrm{T}}$是状态向量,$D=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n)$为正定对角矩阵,即$d_i>0$,$A=[a_{ij}]_{n\times n}$和$B=[b_{ij}]_{n\times n}$各自表示状态反馈矩阵和时滞反馈矩阵,$\tau(\tau\geq 0)$为传输时滞,$G(u(t))=[g_1(u_1(t)),g_2(u_2(t)),\cdots,g_n(u_n(t))]^{\mathrm{T}}$表示神经元的激活函数向量,$I=[I_1,I_2,\cdots,I_n]^{\mathrm{T}}$是外部输入向量(符号T表示矩阵的转置)。

一般,对于系统(1)通常取初值为

$$u_i(t)=\phi_i(t),\qquad t\in[-\tau,0] \tag{3}$$

其中$\phi_i(i=1,2,\cdots,n)$为有界连续函数。

假设系统激活函数满足如下条件:

(H1) 激活函数$g_i(i=1,2,\cdots,n)$在实数域内有界,并且对任何$x,y\in\mathbf{R}$,$i=1,2,\cdots,n$,有$0\leq\dfrac{g_i(x)-g_i(y)}{x-y}\leq 1$。

容易看到假设(H1)中的激活函数在实数域上是连续的,同时,系统(1)在假设(H1)下至少有一个平衡点。

进一步,假设系统(1)的一个平衡点为$u^*=[u_1^*,u_2^*,\cdots,u_n^*]^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$,并令$x(t)=u(t)-u^*$,则系统(1)变为

$$\dot{x}_i(t)=-d_ix_i(t)+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}f_j(u_j(t))+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}f_j(u_j(t-\tau)),\quad i=1,2,\cdots,n \tag{4}$$

$$x_i(\theta)=\phi_i(\theta)-u_i^*=\varphi_i(t),\quad \theta\in[-\tau,0],i=1,2,\cdots,n \tag{5}$$

其中,$x(t)=[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)]^{\mathrm{T}}$为新的状态向量,$F(x(t))=[f_1(x_1(t)),f_2(x_2(t)),\cdots,f_n(x_2(t))]^{\mathrm{T}}$,$f_i(x_i(t))=g_i(x_i(t)+u^*)-g_i(u_i^*)$,$i=1,2,\cdots,n$。

显然,原点是系统(4)的一个平衡点。同时,系统(1)平衡点的全局渐近稳定性等价于系统(4)原点的全局渐近稳定性。为了得到本文的主要结果,把系统(4)改写成如下等价的描述系统模型。

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=-Dx(t)+AF(x(t))+BF(x(t-\tau))\\ x(t)&=\varphi(t),\quad t\in[-\tau,0]\end{aligned} \tag{6}$$

从假设(H1),可知向量函数F具有以下性质:

(H2) $f_i(x)$在实数域内有界,对任何$x\in\mathbf{R}$,$0\leq\dfrac{f_i(x)}{x}\leq 1$且$f_i(0)=0$。

显而易见,系统(1)在假设(H1)下的平衡点是全局稳定的,当且仅当系统(6)在假设(H2)下的平衡点是全局稳定的。因此,后文只需研究系统(6)在原点的渐近稳定性问题。

回顾激活函数中的假设(H2),对$i=1,2,\cdots,n$定义如下函数:

$$S_i(t)=\begin{cases}\dfrac{f_i(x_i(t))}{x_i(t)}, & x_i(t)\neq 0\\ 0, & x_i(t)=0,\end{cases} \tag{7}$$

显然,有$f_i(x_i(t))=s_i(t)\cdot x_i(t)$成立,$s_i(t)$在实数域R上是分段连续的。从(7)和假设(H2),有$-1\leq s_i\leq 1$。

用(7)式,系统(6)可以重写为

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=-Dx(t)+AS(t)x(t)+BS(t-\tau)x(t-\tau)\\ x(t)&=\varphi(t),t\in[-\tau,0]\end{aligned} \tag{8}$$

这里$S_i(t)=\mathrm{diag}(s_i(t))$。

本文用符号$A>0$(或$A<0$)来表示矩阵A是一个对称正定(或负定)矩阵,符号A^{T}和A^{-1}表示矩阵A的转置和逆矩阵。

首先,定义下述引理。

引理1[7] 对于给定的任意合适维数的实矩阵$\Sigma_1,\Sigma_2,\Sigma_3$且$0<\Sigma_3=\Sigma_3^{\mathrm{T}}$及实数$\varepsilon>0$。那么,有下面的不等式成立

$$\Sigma_1^{\mathrm{T}}\Sigma_2+\Sigma_2^{\mathrm{T}}\Sigma_1\leq\varepsilon\Sigma_1^{\mathrm{T}}\Sigma_3\Sigma_1+\frac{1}{\varepsilon}\Sigma_2^{\mathrm{T}}\Sigma_3^{-1}\Sigma_2$$

引理2[8] 对任何常数矩阵$M\in\mathbf{R}^{m\times m}$,$M=M^{\mathrm{T}}>0$,常数$\gamma>0$,向量函数$\omega:[0,\gamma]\to\mathbf{R}^m$使得下述积分不等式成立

$$\gamma\int_0^{\gamma}\omega^{\mathrm{T}}(\beta)M\omega(\beta)\mathrm{d}\beta\geq\left(\int_0^{\gamma}\omega(\beta)\mathrm{d}\beta\right)^{\mathrm{T}}M\left(\int_0^{\gamma}\omega(\beta)\mathrm{d}\beta\right)。$$

引理3[9] 若有下面的线性矩阵不等式成立

$$\begin{pmatrix}Q(x) & S(x)\\ S^{\mathrm{T}}(x) & R(x)\end{pmatrix}>0,$$

其中$Q(x)=Q^{\mathrm{T}}(x)$,$R(x)=R^{\mathrm{T}}(x)$,则其等价于

$$R(x)>0,Q(x)-S(x)R^{-1}(x)S^{\mathrm{T}}(x)>0。$$

引理 4[10]　定义一个操作为 $\Phi(\cdot):\zeta_{n,\tau}\rightarrow \mathbf{R}^n$ 为 $\Phi(x_t)=x(t)+\hat{B}\int_{t-\tau}^{t}x(\xi)\mathrm{d}\xi$，其中 $x(t)\in\mathbf{R}^n$ 和 $\hat{B}\in\mathbf{R}^{n\times n}$。对一个给定的常数 $p(0<p<1)$，如果存在一个正定对称矩阵 N，且有不等式

$$\begin{bmatrix} -pN & \tau\hat{B}^{\mathrm{T}}N \\ \tau N\hat{B} & -P \end{bmatrix}<0$$

成立，则操作 $\Phi(x_t)$ 是稳定的。

2 时滞细胞神经网络的全局稳定性

本节，笔者利用 Lyapunov-Krasovskii 稳定性定理、S-过程以及线性矩阵不等式（LMI）技术研究系统（6）原点的渐近稳定性问题。

首先，定义操作 $\Phi(x_t):\zeta_{n,\tau}\rightarrow\Re^n$ 为

$$\Phi(x_t)=x(t)+\int_{t-\tau}^{t}Cx(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{9}$$

其中 $x_t=x(t+s)$，$s\in[-\tau,0]$，C 是一个自由参数。由定义的操作 $\Phi(x)$ 可得变换系统为

$$\Phi(x_t)=(-D+C)x(t)+AS_0x(t)+BS_\tau x(t-\tau)-Cx(t-\tau) \tag{10}$$

本文所得主要定理如下。

定理 1　假设条件（H1）成立，如果存在常数矩阵 $W\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 和对称正定矩阵 P，以及对角正定矩阵 R_1,R_2,R_3,R_4,R_5,R_6，使得下面的（11）式和（12）式成立。

$$\begin{bmatrix} -PD-DP+W+W^{\mathrm{T}}+R_1+R_2+R_3+R_4+R_5+R_6 & \sqrt{\tau}W \\ \sqrt{\tau}W^{\mathrm{T}} & -P \\ A^{\mathrm{T}}P & 0 \\ B^{\mathrm{T}}P & 0 \\ W^{\mathrm{T}} & 0 \\ -DP+W^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$<0 \tag{11}$$

$$\begin{bmatrix} -P & \tau W^{\mathrm{T}} \\ \tau W & -P \end{bmatrix}<0 \tag{12}$$

那么系统（8）的原点是全局渐近稳定的。从而，系统（1）的平衡点是全局渐近稳定的。

证明　构造如下的 Lyapunov-Krasvoskii 泛函

$$\dot{V}(x)=\dot{\Phi}^{\mathrm{T}}(x_t)P\dot{\Phi}(x_t)+\int_{t-\tau}^{t}x^{\mathrm{T}}(\xi)(R_5+R_6)x(\xi)\mathrm{d}\xi+\int_{t-\tau}^{t}\left(\int_{\xi}^{t}x^{\mathrm{T}}(\theta)C^{\mathrm{T}}PCx(\theta)\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}\xi+\int_{t-\tau}^{t}x^{\mathrm{T}}(\xi)(R_2+R_4)x(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{13}$$

沿着系统（8）解的轨迹，有

$$\begin{aligned}\dot{V}(x(t))&=2\dot{\Phi}^{\mathrm{T}}(x_t)P\dot{\Phi}(x_t)+x^{\mathrm{T}}(t)(R_5+R_6)x(t)-x^{\mathrm{T}}(t-\tau)(R_5+R_6)x(t-\tau)+\int_{t-\tau}^{t}[x^{\mathrm{T}}(t)C^{\mathrm{T}}PCx(t)-x^{\mathrm{T}}(\xi)C^{\mathrm{T}}PCx(\xi)]\mathrm{d}\xi+x^{\mathrm{T}}(t)(R_2+R_4)x(t)-x^{\mathrm{T}}(t-\tau)(R_2+R_4)x(t-\tau)\\&=2[x(t)+\int_{t-\tau}^{t}Cx(\xi)\mathrm{d}\xi]^{\mathrm{T}}P[(-D+C)x(t)+AS_0x(t)-Cx(t-\tau)]+x^{\mathrm{T}}(t)(R_5+R_6)x(t)-x^{\mathrm{T}}(t-\tau)(R_5+R_6)x(t-\tau)+\tau x^{\mathrm{T}}(t)C^{\mathrm{T}}PCx(t)-\int_{t-\tau}^{t}x^{\mathrm{T}}(\xi)C^{\mathrm{T}}PCx(\xi)\mathrm{d}\xi+x^{\mathrm{T}}(t)(R_2+R_4)x(t)-x^{\mathrm{T}}(t-\tau)(R_2+R_4)x(t-\tau))\\&=2x(t)P(-D+C)x(t)+2x(t)PAS_0x(t)+2x(t)PBS_\tau x(t-\tau)-2x(t)PCx(t-\tau)+2\left(\int_{t-\tau}^{t}Cx(\xi)\mathrm{d}\xi\right)^{\mathrm{T}}P(-D+C)x(t)+2\left(\int_{t-\tau}^{t}Cx(\xi)\mathrm{d}\xi\right)^{\mathrm{T}}PAS_0x(t)+2\left(\int_{t-\tau}^{t}Cx(\xi)\mathrm{d}\xi\right)^{\mathrm{T}}PBS_\tau x(t-\tau)-2\left(\int_{t-\tau}^{t}Cx(\xi)\mathrm{d}\xi\right)^{\mathrm{T}}\cdot PCx(t-\tau)+x^{\mathrm{T}}(t)(R_5+R_6)x(t)-x^{\mathrm{T}}(t-\tau)(R_5+R_6)x(t-\tau)+\tau x^{\mathrm{T}}(t)C^{\mathrm{T}}PCx(t)-\int_{t-\tau}^{t}x^{\mathrm{T}}(\xi)C^{\mathrm{T}}PCx(\xi)\mathrm{d}\xi+x^{\mathrm{T}}(t)(R_2+R_4)x(t)-x^{\mathrm{T}}(t-\tau)(R_2+R_4)x(t-\tau)\end{aligned} \tag{14}$$

由引理 1 和引理 2，有下面的不等式成立

$$2x(t)PAS_0x(t)\le x^{\mathrm{T}}(t)R_1x(t)+x^{\mathrm{T}}(t)PAS_0R_1^{-1}S_0^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Px(t)\le x^{\mathrm{T}}(t)R_1x(t)+x^{\mathrm{T}}(t)PAR_1^{-1}A^{\mathrm{T}}Px(t) \tag{15}$$

$$2x(t)PBS_\tau x(t-\tau)\le x^{\mathrm{T}}(t-\tau)R_2x(t-\tau)+x^{\mathrm{T}}(t)PBS_\tau R_2^{-1}S_\tau^{-1}B^{\mathrm{T}}Px(t)\le x^{\mathrm{T}}(t-\tau)R_2x(t-\tau)+x^{\mathrm{T}}(t)PBR_2^{-1}B^{\mathrm{T}}Px(t) \tag{16}$$

$$-2x(t)PCx(t-\tau)\le x^{\mathrm{T}}(t)PCR_5^{-1}C^{\mathrm{T}}Px(t)+x^{\mathrm{T}}(t-\tau)R_5x(t-\tau) \tag{17}$$

$$2\left(\int_{t-\tau}^{t}Cx(\xi)\mathrm{d}\xi\right)^{\mathrm{T}}PAS_0x(t)\le x^{\mathrm{T}}(t)R_3x(t)+$$

$$\left(\int_{t-\tau}^{t} Cx(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)^{\mathrm{T}} PAS_0R_3^{-1}S_0^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}P\left(\int_{t-\tau}^{t} Cx(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right) \le x^{\mathrm{T}}(t)R_3x(t) + \left(\int_{t-\tau}^{t} Cx(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)^{\mathrm{T}} PAR_3^{-1}A^{\mathrm{T}} \cdot P\left(\int_{t-\tau}^{t} Cx(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right) \tag{18}$$

$$2\left(\int_{t-\tau}^{t} Cx(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)^{\mathrm{T}} PBS_\tau x(t-\tau) \le x^{\mathrm{T}}(t-\tau) \cdot R_4x(t-\tau) + \left(\int_{t-\tau}^{t} Cx(\xi\,\mathrm{d}\xi\right)^{\mathrm{T}} PBS_\tau R_4^{-1}S_\tau^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} \cdot P\left(\int_{t-\tau}^{t} Cx(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right) \le x^{\mathrm{T}}(t-\tau)R_4x(t-\tau) + \left(\int_{t-\tau}^{t} Cx(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)^{\mathrm{T}} PBR_4^{-1}B^{\mathrm{T}} \cdot P\left(\int_{t-\tau}^{t} Cx(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right) \tag{19}$$

$$-2\left(\int_{t-\tau}^{t} Cx(\xi)\mathrm{d}\xi\right)^{\mathrm{T}} PCx(t-\tau) \le \left(\int_{t-\tau}^{t} Cx(\xi)\mathrm{d}\xi\right)^{\mathrm{T}} PCR_6^{-1}C^{\mathrm{T}} \cdot P\left(\int_{t-\tau}^{t} Cx(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right) + x^{\mathrm{T}}(t-\tau)R_6x(t-\tau) \tag{20}$$

$$-\int_{t-\tau}^{t} x^{\mathrm{T}}(\xi)C^{\mathrm{T}}PCx(\xi)\,\mathrm{d}\xi \le -\tau^{-1}\left(\int_{t-\tau}^{t} Cx(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)^{\mathrm{T}} P\left(\int_{t-\tau}^{t} Cx(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right) \tag{21}$$

将不等式(15)～(21)用到(14)中,有

$$\dot V(x(t)) \le x_{t\tau}^{\mathrm{T}}(t)\begin{bmatrix} \Delta_1 & P(-D+C) \\ (-D+C)^{\mathrm{T}}P & \Delta_2 \end{bmatrix} x_{t\tau}(t) = x_{t\tau}^{\mathrm{T}}(t)\Omega x_{t\tau}(t) \tag{22}$$

其中,$x_{t\tau}(t) = \left[x(t)\left(\int_{t-\tau}^{t} Cx(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)\right]^{\mathrm{T}}$,$\Delta_1 = -PD - DP + PC + C^{\mathrm{T}}P + Q + R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6 + PAR_1^{-1}A^{\mathrm{T}}P + PBR_2^{-1}B^{\mathrm{T}}P + \tau C^{\mathrm{T}}PC + PCR_5^{-1}C^{\mathrm{T}}P$,$\Delta_2 = -\tau^{-1}P + PAR_3^{-1}A^{\mathrm{T}}P + PBR_4^{-1}B^{\mathrm{T}}P + PCR_6^{-1}C^{\mathrm{T}}P$。

设 $W = PC$,则 Ω 可重写为

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & -PD + W \\ -DP + W^{\mathrm{T}} & \Delta_{12} \end{bmatrix} \tag{23}$$

$\Delta_{11} = -PD - DP + W + W^{\mathrm{T}} + R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6 + PAR_1^{-1}A^{\mathrm{T}}P + PBR_2^{-1}B^{\mathrm{T}}P + \tau W^{\mathrm{T}}P^{-1}W + WR_5^{-1}W^{\mathrm{T}}$

$\Delta_{12} = -\tau^{-1}P + PAR_3^{-1}A^{\mathrm{T}}P + PBR_4^{-1}B^{\mathrm{T}}P + WR_6^{-1}W^{\mathrm{T}}$。

因此,对所有的 $x(t) \ne 0$ 如果 $\Omega < 0$,则 $\dot V(x(t)) < 0$,当且仅当 $x(t) = 0$ 时 $\dot V(x(t)) = 0$。应用引理1,则不等式 $\Omega < 0$ 等价于线性矩阵不等式(11)。同时,不等式(12)等价于

$$\begin{bmatrix} -P & \tau C^{\mathrm{T}}P \\ \tau PC & -P \end{bmatrix} < 0 \tag{24}$$

则按照矩阵理论,存在一个正常数 p 满足 $p < 1$,使得

$$\begin{bmatrix} -pP & \tau C^{\mathrm{T}}P \\ \tau PC & -P \end{bmatrix} < 0 \tag{25}$$

成立。因此,由引理4,如果不等式(12)成立,那么操作 $\Phi(x)$ 是稳定的。按照文献[11]中的定理9.8.1,如果不等式(11)、(12)成立,则系统(8)的原点或系统(1)的平衡点 x^* 是全局渐近稳定的。　证毕

在定理1中,如果系统(9)选变换矩阵 C 为矩阵 A,即 $W = PA$,那么有如下推论。

推论1　假设(H1)成立,如果存在对称正定矩阵 P 和对角正定矩阵 $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6$,使得(26)式和(27)式成立,那么系统(1)的平衡点是全局渐近稳定的。

注　条件(11)、(12)是线性矩阵不等式形式,因而可直接利用 Matlab 中的 LMI 工具箱进行可行解计算。定理1是时滞相关的,这比时滞无关的稳定性准则保守性更好。解关于 τ 的 LMI 不等式,系统(1)的渐近稳定性能够求得其最大上界 τ[12]。

$$\begin{bmatrix} -PD-DP+PA+A^{\mathrm{T}}P+R_1+R_2+R_3+R_4+R_5+R_6 & \sqrt{\tau}PA \\ \sqrt{\tau}A^{\mathrm{T}}P & -P \\ A^{\mathrm{T}}P & 0 \\ B^{\mathrm{T}}P & 0 \\ A^{\mathrm{T}}P & 0 \\ -DP+A^{\mathrm{T}}P & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} < 0 \tag{26}$$

$$\begin{bmatrix} -P & \tau A^{\mathrm{T}}P \\ \tau PA & -P \end{bmatrix} < 0 \tag{27}$$

3 数值仿真

本节,笔者通过一个数值例子来证明本文定理的有效性,用 Matlab 中的 DDE23 程序求解时滞微分方程,用 LMI 工具箱求解定理1中的线性矩阵不等式[13]。

例　考虑如下的时滞细胞神经网络系统:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + 0.125 f(x_1(t)) + 0.25 f(x_2(t)) + \\
&\quad 0.25 f(x_2(t-\tau)) + 1 \\
\dot{x}_2(t) &= -x_2(t) + 0.25 f(x_1(t)) + 0.125 f(x_2(t)) + \\
&\quad 0.25 f(x_1(t-\tau)) - 0.5
\end{aligned} \qquad (28)
$$

其中的激活函数为 $f_i(x) = \frac{1}{2}(|x+1| - |x-1|)$，显然 $f_i(x)$ 满足假设(H)，同时有 $L = I$。由(36)式，系数矩阵为 $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$A = \begin{bmatrix} 0.125 & 0.25 \\ 0.25 & 0.125 \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} 0 & 0.25 \\ 0.25 & 0 \end{bmatrix}$。

对定理 1，取 $\tau = 0.28$，通过 Matlab 中的 LMI 工具箱求解可得下面的一个可行解。

$$
P = \begin{bmatrix} 144.6059 & 0 \\ 0 & 144.6059 \end{bmatrix}, R_1 = \begin{bmatrix} 54.3752 & 0 \\ 0 & 54.3752 \end{bmatrix},
$$

$$
R_2 = \begin{bmatrix} 36.3520 & 0 \\ 0 & 36.3520 \end{bmatrix}, R_3 = \begin{bmatrix} 24.8166 & 0 \\ 0 & 24.8166 \end{bmatrix},
$$

$$
R_4 = \begin{bmatrix} 16.5908 & 0 \\ 0 & 16.5908 \end{bmatrix}, R_5 = \begin{bmatrix} 0.8008 & 0 \\ 0 & 0.8008 \end{bmatrix},
$$

$$
R_6 = \begin{bmatrix} 0.7151 & 0 \\ 0 & 0.7151 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} -0.1295 & -0.0779 \\ -0.0779 & -0.1295 \end{bmatrix}
$$

因此，根据定理 1，该系统的平衡点(原点)是全局渐近稳定的，如图 1 所示。其平衡点为 $u^* = [1.1250, 0]^T$。

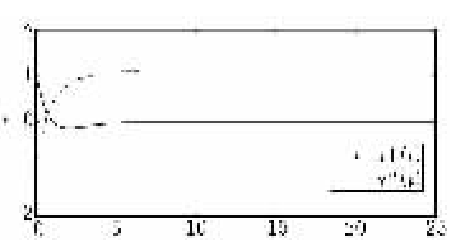

图 1　当 $\phi = [-1.2, 1.2]$ 时系 t 统(28)的时间状态响应曲线

4 结论

本文研究了时滞细胞神经网络[14]的全局稳定性性质，应用一个等式，先将系统变换为线性系统，然后用一个等式操作来研究神经网络的稳定性。通过 Lyapunov 稳定性定理和线性矩阵不等式技术，得到一个新的与时滞相关的稳定性条件，这个条件比最近的相关文献中的结果保守性更好。同时，通过一个数值例子来证明所得定理的有效性。

参考文献：

[1] CHUA L O, YANG L. Cellular Neural Networks: Theory and Applications [J]. IEEE Trans Circuits Syst I, 1988, 35: 1257-1290.

[2] ARIK S. An Analysis of Global Asymptotic Stability of Delayed Cellular Neural Networks [J]. IEEE Trans Neural Networks, 2002, 13: 1239-1242.

[3] LIAO X F, WONG K W, YANG S. Stability Analysis for Delayed Cellular Neural Networks Based on Linear Matrix Inequality Approach [J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2004, 14(9): 3377-3384.

[4] CAO J. Periodic Oscillation and Exponential Stability of Delayed CNNs [J]. Physics Letters A, 2002: 157-163.

[5] LI C D, LIAO X, WONG K. Delay-dependent and Delay-independent Stability Criteria for Cellular Neural Networks with Delays [J]. IJBC, 2006(16): 3323-3340.

[6] LIAO T L, WANG F C. Global Stability for Cellular Neural Networks with Time Delay [J]. IEEE Trans Neural Networks, 2000, 11: 1481-1484.

[7] SANCHEZ E N, PEREZ J P. Input-to-state Stability Analysis for Dynamic NN [J]. IEEE Transactions on Circuits Systems I, 1999 (46): 1395-1398.

[8] GU K Q, CHEN J, VLADIMIR L K. Stability of Time-delay System [M]. New York: Springer-Verlag, 2003.

[9] BOYD B, GHAOUI L E, FERON E, et al. Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory [M]. Philadephia: SIAM, 1994.

[10] YUE D, WON S. Delay-dependent Robust Stability of Stochastic Systems with Time Delay and Nonlinear Uncertainties [J]. Electron Lett, 2001, 37: 992-993.

[11] HALE J, SM V L. Introduction to Functional Differential Equations [J]. NewYork: Springer-Verlag, 1993.

[12] CHEN Y H, FANG S C. Neurocomputing with Time Delay Analysis for Solving Convex Quadratic Programming Problems [J]. IEEE Trans Neural Networks 1, 2000: 230-240.

[13] GAHINET P, NEMIROVSKI A, LAUB A, et al. LMI Control Toolbox User´s Guide [M]. Massachusetts: The Mathworks, 1995.

[14] 文武. 具有时滞的广义细胞神经网络的稳定性分析 [J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2004, 27(4): 364-367.

(责任编辑　游中胜)