运筹学与控制论

一类 B-C-半预不变凸函数*

朱 见 广
(重庆师范大学 数学与计算机科学学院,重庆 400047)

摘 要:引入了向量值映射的 B-C-半预不变凸性概念,讨论了 B-C-半预不变凸函数向量优化问题(VP) $\min\limits_{x\in K}F(x)$ 的局部弱极小点与全局弱极小点的关系,并在弧方向可微的条件下建立了向量优化问题(VP) $\min\limits_{x\in K}F(x)$ 与向量似变分不等式问题(VVLI)求 $x_0\in K$ 使得 $F'(x_0;\tau(x,x_0))\notin -\mathrm{int}C,\forall x\in K$ 的等价性。

关键词:半连通集;半预不变凸映射;弧方向可微;KKM 映象;向量似变分不等式
中图分类号:O244 文献标识码:A 文章编号:1672-6693(2007)04-0001-03

近年来许多学者对函数的凸性进行了研究和推广[1-15]。如 Bector C R,Singh C 把凸函数推广到 B 凸函数[1];Suneja S K,Singh C,Bector C R 又把 B-凸推广到 B 预不变凸函数[2];Yang X Q,Chen G Y 定义了一类新的凸函数半预不变凸函数并将其应用于数学规划中[3]。本文在文献[1-3]的基础上提出了向量值映射的 B-C-半预不变凸性概念,讨论了 B-C-半预不变凸函数向量优化问题的局部弱极小点与全局弱极小点的关系,并建立了向量优化问题与向量似变分不等式的等价性。

1 预备知识

设 X,Y 是实赋范空间。$K\subset X$ 非空,$C\subset Y$ 是顶点在原点的点闭凸锥,且 $\mathrm{int}C\neq\varnothing$。

定义 1[4] 称 $K\subset X$ 是关于 $\tau(y,x,\alpha):K\times K\times[0,1]\to K$ 的半连通集,如果对 $\forall x,y\in K,\alpha\in[0,1]$,存在向量 $\tau(y,x,\alpha)\in X$,使得 $X+\tau(y,x,\alpha)\in K$。

定义 2[4] 称 $F:K\to Y$ 关于 $\tau(y,x,\alpha):K\times K\times[0,1]\to K$ 是 C-半预不变凸的,若 $\forall x,y\in K,\alpha\in[0,1]$,存在向量 $\tau(y,x,\alpha)\in X$,使得

$$\alpha F(x)+(1-\alpha)F(y)-F(y+\alpha\tau(y,x,\alpha))\in C$$
$$\lim_{\alpha\to0}\alpha\tau(y,x,\alpha)=\theta$$

定义 3[10] 设 $K\subset\mathbf{R}^n$ 是关于 $\tau(y,x,\alpha):K\times K\times[0,1]\to K$ 的半连通集。称 $f:K\to\mathbf{R}$ 在 K 上关于 τ,b_1,b_2 是半-B-半预不变凸的,若对 $\forall x,y\in K,\alpha\in[0,1]$,都有

$$f(y+\alpha\tau(y,x,\alpha))\leqslant b_1(y,x,\alpha)f(x)+b_2(y,x,\alpha)f(y)$$

其中 $\lim\limits_{\alpha\to0}\alpha\tau(y,x,\alpha)=0$,$b_i:K\times K\times[0,1]\to[0,1]$,$i=1,2$,$b_1(y,x,\alpha)+b_2(y,x,\alpha)=1$,$b_1(y,x,0)=1=b_1(y,x,1)$。

定义 4 设 $K\subset X$ 是关于 $\tau(y,x,\alpha):K\times K\times[0,1]\to K$ 的半连通集。称 $F:K\to Y$ 在 K 上关于 τ,b_1,b_2 是 B-C-半预不变凸的,若对 $\forall x,y\in K,\alpha\in[0,1]$,都有

$$b_1(y,x,\alpha)F(x)+b_2(y,x,\alpha)F(y)-F(y+\alpha\tau(y,x,\alpha))\in C$$

其中 $\lim\limits_{\alpha\to0}\alpha\tau(y,x,\alpha)=\theta$,$b_i:K\times K\times[0,1]\to[0,1]$,$i=1,2$,$b_1(y,x,\alpha)+b_2(y,x,\alpha)=1$,$b_1(y,x,0)=1=b_1(y,x,1)$。

注 1 若 $b_1(y,x,\alpha)=\alpha$,$b_1(y,x,\alpha)=1-\alpha$,则 B-C-半预不变凸函数是 C-半预不变凸函数,故定义 4 是定义 2 的推广;若取 $\mathbf{R},\mathbf{R}_+$ 分别代替 Y,C,则 B-C-半预不变凸函数是半-B-预不变凸函数,故定义 4 也是定义 3 的推广。

定义 5[5] 称 $F:K\to Y$ 在 $x_0\in K$ 关于一连续弧 $\beta:[0,1]\to K$ 是弧方向可微的,若 $x_0+\beta(t)\in K(\forall t\in[0,1])$,$\beta(0)=\theta$,$\beta'(0^+)=h$,极限

$$F'(x,h)=\lim_{\alpha\to0}\frac{F(x+\beta(\alpha))-F(x)}{\alpha}$$

存在。

* 收稿日期:2007-04-20 修回日期:2007-07-02
资助项目:国家自然科学基金(No. 10471159)
作者简介:朱见广(1980-),男,山东日照人,硕士研究生,研究方向为最优化理论与应用。

特别地,$\forall x,y\in K,\alpha\in[0,1]$,$F'(x;\hat{\tau}(y,x))=\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{F(x+\alpha\tau(y,x,\alpha))-F(x)}{\alpha}$,其中

$$\lim_{\alpha\to 0}\alpha\tau(y,x,\alpha)=\theta,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}[\alpha\tau(y,x,\alpha)]\Big|_{\alpha=0^+}=\hat{\tau}(y,x)$$

定义6[8] 设E是拓扑向量空间,X为E的非空子集,$G:X\to 2^E$为一集值映射,称F为KKM映象,如果对任意的有限集$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\subset X$,有$\mathrm{co}\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}G(x_i)$。

2 主要结果

定理1 设$K\subset X$是半连通集,$F:K\to Y$是关于τ,b_1,b_2的B-C-半预不变凸的映射。则F在K上的任何局部弱极小点都是全局弱极小点。

证明 设x_0是F在K上局部弱极小点,则存在x_0的邻域$N(x_0)$使得

$$F(x)-F(x_0)\notin-\mathrm{int}C,\forall x\in N(x_0)\cap C\setminus\{x_0\}$$

要证x_0是全局弱极小点,即证不存在$x\in K$使得$F(x)-F(x_0)\in-\mathrm{int}C$。假设有$y\in K$使得$F(y)-F(x_0)\in-\mathrm{int}C$。因为$K$是半连通集,故对任意的$0<\alpha<1$,有$x_0+\alpha\tau(y,x_0,\alpha)\in K$。又$F$在$K$上是关于$\tau,b_1,b_2$的B-C-半预不变凸,则有

$$b_1(y,x_0,\alpha)F(x_0)+b_2(y,x_0,\alpha)F(y)-F(x_0+\alpha\tau(y,x_0,\alpha))\in C$$

$$F(x_0+\alpha\tau(y,x_0,\alpha))-b_1(y,x_0,\alpha)F(x_0)\in-C+b_2(y,x_0,\alpha)F(y)$$

$$F(x_0+\alpha\tau(y,x_0,\alpha))-(1-b_2(y,x_0,\alpha))F(x_0)\in-C+b_2(y,x_0,\alpha)F(y)$$

$$F(x_0+\alpha\tau(y,x_0,\alpha))-F(x_0)\in-C+b_2(y,x_0,\alpha)(F(y)-F(x_0))\in-C-\mathrm{int}C\subseteq-\mathrm{int}C$$

又当$\alpha\to 0$时,$x_0+\alpha\tau(y,x_0,\alpha)\in N(x_0)$,这与$x_0$是$F$在$K$上局部弱极小点矛盾。故不存在$x\in K$使得$F(x)-F(x_0)\in-\mathrm{int}C$,所以$x_0$也是$F$在$K$上全局弱极小点。 证毕

定理2 若$F:K\to Y$关于τ,b在x点是弧方向可微B-C-半预不变凸的,则有

$$\bar{b}(y,x)(F(y)-F(x))-F'(x;\hat{\tau}(y,x))\in C$$

$$\forall x,y\in K,\alpha\in[0,1],$$

且$\lim\limits_{\alpha\to 0}\alpha\tau(y,x,\alpha)=\theta$,$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}[\alpha\tau(y,x,\alpha)]\Big|_{\alpha=0^+}=\hat{\tau}(y,x)$,其中$\lim\limits_{\alpha\to 0}\alpha^{-1}b(y,x,\alpha)=\bar{b}(y,x)$。

证明 $F:K\to Y$关于τ,b在x点是弧方向可微B-C-半预不变凸函数,所以对$\forall y\in K,\alpha\in[0,1]$,有

$$F(x+\alpha\tau(y,x,\alpha))-b(y,x,\alpha)F(y)-(1-b(y,x,\alpha))F(x)\in-C$$

$$F(x+\alpha\tau(y,x,\alpha))-F(x)-b(y,x,\alpha)(F(y)-F(x))\in-C$$

$$\alpha^{-1}[F(x+\alpha\tau(y,x,\alpha))-F(x)]-\alpha^{-1}b(y,x,\alpha)(F(y)-F(x))\in-C$$

令$\alpha\to 0^+$,则有

$$F'(x;\hat{\tau}(y,x))-\bar{b}(y,x)(F(y)-F(x))\in-C$$

即$\bar{b}(y,x)(F(y)-F(x))-F'(x;\hat{\tau}(y,x))\in C$。

证毕

下面考虑向量优化问题(VP) $\min\limits_{x\in K}F(x)$与向量似变分不等式问题(VVLI)存在$x_0\in K$使得

$$F'(x_0;\hat{\tau}(x,x_0))\notin-\mathrm{int}C,\forall x\in K$$

之间的等价关系成立。

定理3 设K是半连通集,$F:K\to Y$是关于τ,b在x点是弧方向可微B-C-半预不变凸的映射,则向量优化问题(VP)与向量似变分不等式问题(VVLI)有相同的解。

证明 设x_0是(VP)的弱极小点。则对$\forall x\in K,\alpha\in[0,1]$,由$K$的半连通性则有

$$x_0+\alpha\tau(x,x_0,\alpha)\in K。$$

所以

$$\alpha^{-1}[F(x_0+\alpha\tau(x,x_0,\alpha))-F(x_0)]\notin-\mathrm{int}C,\quad\forall\alpha\in[0,1]$$

显然$-\mathrm{int}C$的补集是闭的,又F弧方向可微,故$F'(x_0;\hat{\tau}(x,x_0))\notin-\mathrm{int}C$。所以$x_0$是向量似变分不等式问题(VVLI)的解。

反之,设x_0向量似变分不等式问题(VVLI)的解,又F关于τ,b在x点是弧方向可微B-C-半预不变凸的,由定理2得

$$\bar{b}(x,x_0)(F(x)-F(x_0))-F'(x_0;\hat{\tau}(x,x_0))\in C$$

再由文献[9]的引理2.1可得

$$\bar{b}(x,x_0)(F(x)-F(x_0))\notin-\mathrm{int}C$$

这里$\lim\limits_{\alpha\to 0}\alpha^{-1}b(x,x_0,\alpha)=\bar{b}(x,x_0)>0$,故$x_0$是(VP)的弱极小点。 证毕

引理1[8] 设X是拓扑向量空间,E是X的非空子集,设$G:E\to 2^X$为KKM映像,再设对$\forall x\in E$,$G(x)$是闭的且至少存在一个$x\in E$使得$G(x)$是E中的紧集,则$\bigcap_{x\in E}G(x)\neq\varnothing$。

引理2 设$K\subset X$弱紧,$F:K\to Y$关于τ,b在

x 点是弧方向可微 B-C-半预不变凸的映射，$F'(\cdot;\cdot)$ 关于第一变量是连续的，η 是连续的，且 $\eta(x,x)=0$，则

$$\Phi(y):=\{x\in K: F'(x;\eta(y,x))\notin -\mathrm{int}C\}$$

是弱闭的，$y\in K$。

证明　记 $\Phi(y)$ 弱闭包为 $\overline{\Phi(y)}$，则存在序列 $\{x_k\}_{k\in N}\subset\Phi(y)$ 且弱收敛到 $x\in K$。所以

$$F'(x_k;\eta(y,x_k))\notin -\mathrm{int}C,$$

又由 $F'(\cdot;\cdot)$ 关于第一变量是连续的，并且 η 也是连续的，所以有 $F'(x;\eta(y,x))\notin -\mathrm{int}C$，则 $x\in\Phi(y)$。所以

$$\Phi(y):=\{x\in K: F'(x;\eta(y,x))\notin -\mathrm{int}C\}$$

是弱闭的，$y\in K$。　　证毕

定理 4　设 X 是实赋范空间，$K\subset X$ 弱紧，且满足半连通性。$F: K\to Y$ 关于 τ, b 在 x 点是弧方向可微 B-C-半预不变凸的映射，且 $F'(\cdot;\cdot)$ 关于第一变量是连续的，记

$$\Phi(x):=\{y\in K: F'(x;\eta(y,x))\in -\mathrm{int}C\}$$

且是凸的，η 是连续的，且 $\eta(x,x)=0$，$\forall x\in K$，则 (VP) 有全局弱极小点 x_0。

证明　由定理 3 知，只需证向量似变分不等式问题(VVLI) 有一个解 x_0。对任意的 $y\in K$，定义 $\varphi(y):=\{x\in K: F'(x;\eta(y,x))\notin -\mathrm{int}C\}$。下证 $\varphi: K\to 2^K$ 是一 KKM 映像。若不然，则存在某一有限集 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\subset X$，使得

$$\mathrm{co}\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\not\subset\bigcup_{i=1}^{n}\Phi(x_i)。$$

故存在某一

$$x\in\mathrm{co}\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}, x=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i,$$

其中 $\lambda_i\geqslant 0, i=1,\cdots,n, \sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$ 而 $x\notin\bigcup_{i=1}^{n}\Phi(x_i)$。则 $F'(x;\eta(x_i,x))\in -\mathrm{int}C$，$\forall i$。由 K 的半连通性和 $\Phi(x)$ 的凸性，有

$$0=F'\Big(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i;\eta\Big(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i,\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\Big)\Big)\in -\mathrm{int}C$$

显然不成立。故 $\varphi: K\to 2^K$ 是一 KKM 映像。

又由引理 2 知

$$\varphi(y):=\{x\in K: F'(x;\eta(y,x))\notin -\mathrm{int}C\}$$

是弱闭的，$\forall y\in K$。又因为 $\varphi(y)\subset K$，而 K 是弱紧集，再由 $\varphi(y)$ 的弱闭性，知 $\varphi(y)$ 是弱紧的。在 X 上赋予弱拓扑，再由引理 1 知至少存在一点 $x_0\in\bigcap_{y\in K}\varphi(y)$，也即是存在 $x_0\in K$ 使得

$$F'(x_0;\eta(y,x_0))\notin -\mathrm{int}C, \forall y\in K。$$

所以向量似变分不等式问题(VVLI) 有一个解 x_0。　　证毕

参考文献：

[1] BECTOR C R, SINGH C. B-vex Functions[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1991, 71: 237-253.

[2] SUNEJA S K, SINGH C, BECTOR C R. Generalization of Preinvex and B-vex Functions[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1993, 76: 577-587.

[3] YANG X Q, CHEN G Y. A Class of Nonconvex Functions and Pre-variational Inequalities[J]. Journal of Mathematical Analysis Applications, 1992, 169(2): 359-373.

[4] LAI H C. Optimality Conditions for Semi-preinvex Programming [J]. Taiwanese Journal of Mat-hematics, 1997, 1 (4): 389-404.

[5] 贾继红，张全举．一类非凸数学规划问题的最优性和对偶[J]．西安建筑科技大学学报，2001，33(2)：199-201.

[6] KAZMI K R. Some Remarks on Vector Optimization Problems[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1998, 96(1): 133-138.

[7] CHEN G Y, CRAVEN B D. Existence and Continuity for Vector Optimization [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1994, 181: 459-468.

[8] FAN K. A Generalization of Tychonoff's Fixed-point Theorem[J]. Mathematics Annals, 1961, 142: 305-310.

[9] CHEN G Y. Existence of Solutions for a Variational Inequality: An Existence of the Hartmann-Stampacchia Theorem[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1992, 74: 445-456.

[10] LONG X J, PENG J W. Technical Note Semi-B-preinvex Functionsp[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2006, 131(2): 301-305.

[11] 颜丽佳．非光滑(F,α,ρ,d)-凸函数的多目标分式规划最优性条件[J]．西华师范大学学报(自然科学版)，2006，27(4)：361-364.

[12] 王良成．线性空间上凸函数的若干特性[J]．四川师范学院学报(自然科学版)，1995，16(2)：123-128.

[13] 王兴国．(p,r)-不变凸性下广义分式规划的最优性[J]．四川师范大学学报(自然科学版)，2005，28(1)：66-69.

[14] 彭再云，罗洪林．关于强预不变凸函数的注记[J]．重庆师范大学学报(自然科学版)，2006，23(3)：36-39.

[15] 赵克全，陈哲．半严格预拟不变凸函数的一个充分条件[J]．重庆师范大学学报(自然科学版)，2006，23(3)：13-15.

(College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047)

Abstract: In this paper, a class of vector-valued functions, called B-C-semi-preinvex function, which are generalization of C-semi-preinvex functions and semi-B-preinvex functions, is introduced. We study the relations between local weak minimum and global weak minimum for vector optimization problems (VP) $\min_{x\in K} F(x)$ with B-C-semi-preinvex. Under the arcwise directionally differentiable condition, we obtain a property: if F is said to be B-C-semi-preinvex on K with respect τ, b, then the following inequality holds $\bar{b}(y,x)(F(y)-F(x))-F'(x;\hat{\tau}(y,x))\in C$, $\forall x,y\in K, \alpha\in[0,1]$, where $\lim_{\alpha\to 0}\alpha\tau(y,x,\alpha)=\theta\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}[\alpha\tau(y,x,\alpha)]\Big|_{\alpha=0+}=\hat{\tau}(y,x), \lim_{\alpha\to 0}\alpha^{-1}b(y,x,\alpha)=\bar{b}(y,x)$; We also discuss the vector variational-like inequality, establish an equivalence relation between the vector optimization problem (VP) $\min_{x\in K}F(x)$ and the vector variational-like inequality (VVLI) find $x_0\in$ K such as $F'(x_0;\hat{\tau}(y,x))\notin -\mathrm{int}C$.

Key words: semi-connected set; B-C-semi-preinvex map; arcwise directionally differentiable; KKM mapping; vector variational-like inequality

(责任编辑 黄 颖)