运筹学与控制论

凸度量空间内广义渐近拟非扩张映射不动点的迭代*

吴 婷
(重庆师范大学 数学与计算机科学学院,重庆 400047)

摘 要:在凸度量空间中,引入一类比渐近拟非扩张映射更加广泛的广义渐近拟非扩张型映射,并给出带误差修改的 Ishikawa 迭代序列收敛于广义渐近拟非扩张型映射不动点的充要条件:设 X 是一个完备凸度量空间,$T: X\to X$ 是一个广义渐近拟非扩张型映射,其渐近系数 k_n 满足 $\sum_{n=1}^{\infty}k_n<+\infty$,并且 $F(T)$ 非空。假定 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是带误差修改的 Ishikawa 迭代序列,在对参数的一定限制下,$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 T 的不动点,当且仅当 $\lim\limits_{n\to\infty}\inf d(x_n,F(T))=0$。

关键词:完备凸度量空间;广义渐近拟非扩张型映射;带误差修改的 Ishikawa 迭代序列;不动点
中图分类号:O177.91 **文献标识码**:A **文章编号**:1672-6693(2007)04-0004-04

2001 年和 2002 年 Liu Qihou[1-3] 推广了 Petryshgh 和 Williamson[4],Ghosh 和 Debnath[5] 分别在 1973 年和 1977 年的结果,在 Banach 空间和一致凸 Banach 空间证明了修改的 Ishikawa 迭代序列和带误差修改的 Ishikawa 迭代序列收敛于渐近拟非扩张映射不动点的若干充要条件。2003 年文献[6]在凸度量空间内证明了修改的 Ishikawa 迭代序列收敛于渐近拟非扩张映射不动点的若干充要条件,将文献[1-3]的结果推广到凸度量空间。2004 年文献[7]在凸度量空间内证明了带误差修改的 Ishikawa 迭代序列收敛的若干充要条件。

定理 1[7] 设 X 是一个完备凸度量空间,$T: X\to X$ 是一个渐近拟非扩张映射(T 不必连续),并且 $F(T)$ 非空,假定 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是由(5)式定义的带误差修改的 Ishikawa 型迭代序列,则当且仅当 $\lim\limits_{n\to\infty}\inf d(x_n,F(T))=0$ 时,$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 T 的不动点。其中 $d(y,c)$ 表示 y 与 c 间的距离,即 $d(y,c)=\inf_{\forall x\in c}d(y,c)$。

2005 年文献[8]中提出 Banach 空间中的广义渐近拟非扩张型映射的定义。本文的目的是在凸度量空间内引入广义渐近拟非扩张型映射采用文献[7]的技巧,对带误差修改的 Ishikawa 迭代序列给出收敛于广义渐近拟非扩张型映射不动点的充要条件。

1 预备知识

定义 1[7] 设 (X,d) 是一度量空间,$I=[0,1]$,$\alpha_n,\beta_n,\gamma_n$ 是 $[0,1]$ 中的实序列,并且 $\alpha_n+\beta_n+\gamma_n=1$。映射 $W: X^3\times I^3\to X$ 称为 X 的一个凸结构,如果满足对任何 $(x,y,z,\alpha_n,\beta_n,\gamma_n)\in X^3\times I^3$ 及 $u\in X$

$$d(u,w(x,y,z,\alpha_n,\beta_n,\gamma_n))\leqslant\alpha_n d(u,x)+\beta_n d(u,y)+\gamma_n d(u,z)$$

如果 (X,d) 是具有凸结构 w 的度量空间,则 (X,d) 称为凸度量空间。应该指出,每一线性赋范空间都是凸度量空间的例子。但存在某些凸度量空间,它们不能嵌入到任一赋范空间[9]。

定义 2[7] 设 (X,d) 是一度量空间,T 称为渐近拟非扩张,如果存在 $\{k_n\}\subset[0,+\infty)$,$\lim\limits_{n\to\infty}k_n=0$,使得

$$d(T^n x,p)\leqslant(1+k_n)d(x,p),\ \forall x\in X,\ \forall p\in F(T)$$

其中 $F(T)$ 表示不动点集。

定义 3 设 (X,d) 是一度量空间,T 称为渐近拟非扩张型映射,如果

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup_{x\in X,p\in F(T)}[d(T^n x,p)-d(x,p)]\leqslant 0$$

其中 $F(T)$ 表示不动点集。

* 收稿日期:2007-04-11
作者简介:吴婷(1982-),女,重庆人,硕士研究生,研究方向为非线性分析及微分方程。

定义4 设(X,d)是一度量空间,T称为广义渐近拟非扩张型映射,如果存在$\{k_n\}\subset[0,+\infty)$,$\lim\limits_{n\to\infty}k_n=0$,使得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup_{x\in X,p\in F(T)}[d(T^nx,p)-(1+k_n)d(x,p)]\leqslant 0$$

其中$F(T)$表示不动点集。

由上述定义可知,如果$F(T)$非空,那么一个渐近拟非扩张型映射一定是广义渐近拟非扩张型映射,但是一个广义渐近拟非扩张型映射不一定是渐近拟非扩张型映射。

注1 当C是X中的有界子集时,广义渐近拟非扩张型映射等价于渐近拟非扩张型映射;而当C是X中的无界子集时,广义渐近拟非扩张型映射就不一定是渐近拟非扩张型映射;在一般情况下,渐近拟非扩张映射,渐近拟非扩张型映射都是广义渐近拟非扩张型映射的特例。

定义5 设(X,d)是具凸结构$W: X^3\times I^3\to X$的凸度量空间,$T: X\to X$是一个广义渐近拟非扩张型映射。$\{\alpha_n\}$,$\{\beta_n\}$,$\{\gamma_n\}$,$\{\alpha'_n\}$,$\{\beta'_n\}$,$\{\gamma'_n\}$是$[0,1]$中的6个序列且$\alpha_n+\beta_n+\gamma_n=1$,$\alpha'_n+\beta'_n+\gamma'_n=1$,$n=0,1,2,\cdots$,而且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\gamma_n<+\infty$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\beta_n<+\infty$。对任给的$x_0\in X$,定义序列$\{x_n\}$如下

$$\begin{cases}x_{n+1}=w(x_n,T^ny_n,u_n,\alpha_n,\beta_n,\gamma_n)\\ y_n=w(x_n,T^nx_n,v_n,\alpha'_n,\beta'_n,\gamma'_n)\end{cases}\tag{1}$$

则$\{x_n\}$称为广义渐近拟非扩张型映射T的带误差修改的Ishikawa型迭代序列。

由文献[10]知,修改的Ishikawa型迭代序列是(1)式中当$\gamma_n=\gamma'_n=0$和$u_n=v_n=0$的特殊情形。

引理1 设X是一个完备凸度量空间,T是一个广义渐近拟非扩张型映射,其渐近系数k_n,满足$\sum\limits_{n=1}^{\infty}k_n<\infty$,$F(T)$非空。如果$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$是定义5所定义的带误差修改的Ishikawa型迭代序列,有

1) $\forall\varepsilon>0,\exists N(\varepsilon)$,当$n>N(\varepsilon)$时,有$d(x_{n+1},p)\leqslant(1+k_n)^2d(x_n,p)+S_n,\forall p\in F(T)$。其中,$S_n=\beta_n(1+k_n)\gamma'_nd(v_n,p)+\gamma_nd(u_n,p)+\beta_n\beta'_n(1+k_n)\varepsilon+\beta_n\varepsilon$。

2) $\forall\varepsilon>0,\exists N(\varepsilon)$,当$n>N(\varepsilon)$时,存在一个常数$M>0$,使得

$$d(x_{n+m},p)\leqslant Md(x_n,p)+M\sum_{k=n}^{n+m-1}S_k,\forall m\in N,\forall p\in F(T)。$$

证明 1) 任意给定$\varepsilon>0$,由于T是一个广义渐近拟非扩张型映射,存在自然数$N=N(\varepsilon)$,当$n\geqslant N$时,有$d(T^nx,p)-(1+k_n)d(x,p)\leqslant\varepsilon,\forall x\in X,\forall p\in F(T)$,所以

$$d(x_{n+1},p)=d(w(x_n,T^ny_n,u_n,\alpha_n,\beta_n,\gamma_n),p)\leqslant\alpha_nd(x_n,p)+\beta_nd(T^ny_n,p)+\gamma_nd(u_n,p)\leqslant \alpha_nd(x_n,p)+\beta_n[(1+k_n)d(y_n,p)+\varepsilon]+\gamma_nd(u_n,p)\tag{2}$$

$$d(y_n,p)=d(w(x_n,T^nx_n,v_n,\alpha'_n,\beta'_n,\gamma'_n),p)\leqslant\alpha'_nd(x_n,p)+\beta'_nd(T^nx_n,p)+\gamma'_nd(v_n,p)\leqslant \alpha'_nd(x_n,p)+\beta'_n[(1+k_n)d(x_n,p)+\varepsilon]+\gamma'_nd(v_n,p)\tag{3}$$

(2)式代入(3)式

$$\begin{aligned}d(x_{n+1},p)&\leqslant\alpha_nd(x_n,p)+\beta_n(1+k_n)[\alpha'_nd(x_n,p)+\beta'_n(1+k_n)d(x_n,p)+\beta'_n\varepsilon\gamma'_nd(v_n,p)]+\\&\beta_n\varepsilon+\gamma_nd(u_n,p)\leqslant\alpha_nd(x_n,p)+\beta_n(1+k_n)\alpha'_nd(x_n,p)+\beta_n\beta'_n(1+k_n)^2d(x_n,p)+\beta_n\beta'_n(1+k_n)\varepsilon+\\&\beta_n(1+k_n)\gamma'_nd(v_n,p)+\beta_n\varepsilon+\gamma_nd(u_n,p)\leqslant\alpha_nd(x_n,p)+(1-\alpha_n-\gamma_n)(1+k_n)\alpha'_nd(x_n,p)+\\&\beta_n\beta'_n(1+k_n)\varepsilon+\beta_n\varepsilon(1-\alpha_n-\gamma_n)\beta'_n(1+k_n)^2d(x_n,p)+\beta_n(1+k_n)\gamma'_nd(v_n,p)+\gamma_nd(u_n,p)\leqslant\\&\alpha_nd(x_n,p)+(1-\alpha_n)(1+k_n)^2\alpha'_nd(x_n,p)+\beta_n\beta'_n(1+k_n)\varepsilon+\beta_n\varepsilon(1-\alpha_n)\beta'_n(1+k_n)^2d(x_n,p)+\\&\beta_n(1+k_n)\gamma'_nd(v_n,p)+\gamma_nd(u_n,p)\leqslant\alpha_n(1+k_n)^2d(x_n,p)+(1-\alpha_n)(1+k_n)^2(\alpha'_n+\beta'_n)d(x_n,p)+\\&\beta_n\beta'_n(1+k_n)\varepsilon+\beta_n(1+k_n)\gamma'_nd(v_n,p)+\beta_n\varepsilon+\gamma_nd(u_n,p)\leqslant(1+k_n)^2d(x_n,p)+S_n。\end{aligned}$$

其中,$S_n=\beta_n(1+k_n)\gamma'_nd(v_n,p)+\gamma_nd(u_n,p)+\beta_n\beta'_n(1+k_n)\varepsilon+\beta_n\varepsilon$。

证明 2) 由1),$\forall\varepsilon>0,\exists N(\varepsilon)$,当$n>N(\varepsilon)$时,有

$$\begin{aligned}d(x_{n+m},p)&\leqslant(1+k_{n+m-1})^2d(x_{n+m-1},p)+S_{n+m-1}\leqslant e^{2k_{n+m-1}}d(x_{n+m-1},p)+S_{n+m-1}\leqslant\\&e^{2(k_{n+m-1}+k_{n+m-2})}d(x_{n+m-2},p)+e^{2k_{n+m-1}}(S_{n+m-2}+S_{n+m-1})\leqslant\cdots\cdots\leqslant\end{aligned}$$

$$e^{2\sum_{i=n}^{n+m-1}k_i}d(x_n,p)+e^{2\sum_{i=n}^{n+m-1}k_i}\sum_{k=n}^{n+m-1}S_k\leqslant Md(x_n,p)+M\sum_{k=n}^{n+m-1}S_k。$$

其中，$M=e^{2\sum_{i=0}^{\infty}k_i}$，由于$\sum_{n=1}^{\infty}k_n<\infty$，所以常数$M>0$。　证毕

引理 2[11]　设数序列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$，满足$a_n\geqslant 0$，$b_n\geqslant 0$，$c_n\geqslant 0$，对任意的$n\in N$，有$a_{n+1}\leqslant(1+c_n)a_n+b_n$，且$\sum_{n=1}^{\infty}b_n<+\infty$，$\sum_{n=1}^{\infty}c_n<+\infty$，则

1）$\lim_{n\to\infty}a_n$存在；

2）如果$\lim_{n\to\infty}\inf a_n=0$，则$\lim_{n\to\infty}a_n=0$。

2 主要结论

定理 2　设X是一个具凸结构完备凸度量空间，$T:X\to X$是一个广义渐近拟非扩张型映射（T不必连续），其渐近系数k_n，满足$\sum_{n=1}^{\infty}k_n<\infty$，$\{u_n\}$，$\{v_n\}$有界，并且$F(T)$有界非空闭集，假定$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$是由定义 5 所定义的带误差修改的 Ishikawa 型迭代序列，则当且仅当$\lim_{n\to\infty}\inf d(x_n,F(T))=0$时，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛于$T$的不动点。其中$d(y,C)$表示$y$与$C$间的距离，即$d(y,C)=\inf_{\forall x\in C}d(y,C)$。

证明　由引理 1，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N(\varepsilon)$，当$n>N(\varepsilon)$时，有

$$d(x_{n+1},p)\leqslant(1+k_n)^2d(x_n,p)+S_n,\forall p\in F(T)。\tag{4}$$

其中，$S_n=\beta_n(1+k_n)\gamma'_nd(v_n,p)+\gamma_nd(u_n,p)+\beta_n\beta'_n(1+k_n)\varepsilon+\beta_n\varepsilon$。由于$\{u_n\}$，$\{v_n\}$有界，且$F(T)$有界，有$d(u_n,p)$，$d(v_n,p)$是有界的。不妨假设

$$d(u_n,p)\leqslant M_1,d(v_n,p)\leqslant N_1,\forall n\in N,\forall p\in F(T)\tag{5}$$

由(4)、(5)式，得

$$S_n\leqslant M_1\beta_n(1+k_n)+N_1\gamma_n+\beta_n(1+k_n)\varepsilon+\beta_n\varepsilon\tag{6}$$

又因为$\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n<+\infty$，$\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n<+\infty$，所以$\sum_{n=1}^{\infty}S_n<+\infty$。由(4)、(6)式得

$$d(x_{n+1},F(T))\leqslant(1+k_n)^2d(x_n,F(T))+S_n$$

因为，$\lim_{n\to\infty}\inf d(x_n,F(T))=0$，并且由引理 2，得

$$\lim_{n\to\infty}d(x_n,F(T))=0\tag{7}$$

下面证明$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$是一个柯西序列。

$\forall\varepsilon>0$，$\exists N(\varepsilon)$，当$n>N(\varepsilon)$时，由引理 1 和(6)式可知，必存在常数$M>0$，使得

$$d(x_{n+m},p)\leqslant Md(x_n,p)+M\sum_{k=n}^{n+m-1}S_k,\forall m\in N,\forall p\in F(T)\tag{8}$$

因为$\lim_{n\to\infty}d(x_n,F(T))=0$，且$\sum_{n=1}^{\infty}S_n<+\infty$，必存在常数$N_2$，使得当$n\geqslant N_2$时，有$d(x_n,F(T))\leqslant\frac{\varepsilon}{3M}$且$\sum_{n=1}^{\infty}S_n\leqslant\frac{\varepsilon}{6M}$。因此$d(x_{N_2},F(T))\leqslant\frac{\varepsilon}{3M}$，必存在$p_1\in F(T)$，使得$d(x_{N_2},p_1)\leqslant\frac{\varepsilon}{3M}$。由(8)式，得到当$n\geqslant N_2$时，有

$$d(x_{n+m},x_n)\leqslant d(x_{n+m},p_1)+d(x_n,p_1)\leqslant Md(x_{N_2},p_1)+Md(x_{N_2},p_1)+M\left(\frac{\varepsilon}{6M}+\frac{\varepsilon}{6M}\right)\leqslant$$

$$M\frac{\varepsilon}{3M}+M\frac{\varepsilon}{3M}+M\frac{\varepsilon}{3M}=\varepsilon$$

这表明$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$是一个柯西序列。又因为X是一个完备凸度量空间，于是$\lim_{n\to\infty}x_n$存在。设$\lim_{n\to\infty}x_n=p$，下面证明p是不动点，即$p\in F(T)$。由于$|d(x_n,F(T))-d(p,F(T))|\leqslant d(x_n,p)$，由此及(7)式得

$d(p,F(T)) = \lim_{n\to\infty} d(x_n,F(T)) = 0$,因为 $F(T)$ 是闭集,从而 $p \in F(T)$,p 是不动点。 证毕

注 2 凸度量空间内,修改的 Ishikawa 型迭代序列是(1)式中当 $\gamma_n = \gamma'_n = 0$ 和 $u_n = v_n = 0$ 的特殊情形,所以不需要 $\{u_n\}$,$\{v_n\}$ 及 $F(T)$ 有界这一条件,这就比定理 2 更加简单。

注 3 本文主要是在如下几个方面进行了推广:

1)将文献[7]中的凸度量空间内渐近拟非扩张映射推广到了广义渐近拟非扩张型映射,定理 1 仅是本文定理 2 的推论;

2)将文献[8]中 Banach 空间上广义渐近拟非扩张型映射的不动点逼近推广到凸度量空间内广义渐近拟非扩张型映射不动点的充要条件。

参考文献:

[1] LIU Q H. Iterative Sequence for Asymptotic Quasi-nonexpansive Mappings [J]. J Math Anal Appl, 2001, 259: 1-7.

[2] LIU Q H. Iterative Sequence for Asymptotic Quasi-nonexpansive Mappings with Errors Member [J]. J Math Anal Appl, 2001, 259: 18-24.

[3] LIU Q H. Iterative Sequence for Asymptotic Quasi-nonexpansive Mappings with an Errors Member of Uniform Convex Banach Space [J]. J Math Anal Appl, 2002, 226: 468-471.

[4] PETRYSHYN W V, WILLIAMSON T E. Strong and Weak Convergence of the Successive Approximations for Quasi-nonexpansive Mappings [J]. J Math Anal Appl, 1973, 43: 459-497.

[5] GHOSH M K, DEBNATH L. Convergence of Ishikawa Iterates of Quasi-nonexpansive Mappings [J]. J Math Anal Appl, 1997, 207: 96-103.

[6] 田有先. 凸度量空间内渐近拟非扩张映象 Ishikawa 迭代序列的收敛性[J]. 四川大学学报(自然科学版),2003(6): 1027-1031.

[7] 田有先. 凸度量空间内渐近拟非扩张映射不动点的迭代[J]. 重庆大学学报(自然科学版),2004,27(12): 120-122.

[8] 向长合. Banach 空间上广义渐近拟非扩张型映象不动点的逼近[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2005,22(4): 5-9.

[9] TAKAHASHI. A Convexity in Metric Space and Nonexpansive Mappings [J]. J I Kodai Math Sem Kep, 1970, 22: 142-149.

[10] ZHANG S S. Convergence Problem of Ishikawa Type Iterative Sequence with Errors for ϕ-quasi-contractive Mappings [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2000, 21(11): 1-10.

[11] 田有先,张石生. 渐近非扩张映象迭代序列的收敛性[J]. 西北大学学报(自然科学版),2003(6): 641-644.

Convergence of Ishikawa Type Iterative Sequence with Errors of Generalized Asymptotically Quasi-nonexpansive Mappings in Convex Metric Spaces

WU Ting

(College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: In convex spaces this paper introduces a generalized asymptotically quasi-nonexpansive type mapping—a class of mapping, which is more general than asymptotic quasi-nonexpansive type mapping and gives some necessary and sufficient conditions for the Ishikawa iterative sequence with error to converge to a fixed point of generalized asymptotically quasi-nonexpansive type mapping in convex metric spaces: Let X is a complete convex metric space, $T: X\to X$ a generalized aasymptotically quasi-nonexpansive mappings, with $\sum_{n=1}^{\infty} k_n < +\infty$ and $F(T)$ nonempty. Suppose that $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ is the Ishikawa iterative process with erros, in the confine to scalars $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge to a fixed point of T, if and only if $\lim_{n\to\infty}\inf d(x_n,F(T)) = 0$.

Key words: complete convex metric spaces; generalized asymptotically quasi-nonexpansive mappings; Ishikawa iterative process with erros; fixed point

(责任编辑 欧红叶)