运筹学与控制论

广义松弛余强制变分不等式体系及二步投影方法*

彭再云[1]，唐 平[2]

(1. 重庆交通大学 理学院，重庆 400067；2. 重庆文理学院 数学与计算机科学系，重庆 402160)

摘 要：设 H 为希尔伯特空间，$\langle \cdot , \cdot \rangle$，$\| \cdot \|$ 分别表示希尔伯特空间 H 中的内积和范数。K 为 H 中的闭凸子集，$T: K\times K\rightarrow H$ 为 $K\times K$ 上的任一映象。本文将重点讨论下面一类非线性变分体系(SNVI)问题：求 $x^*, y^* \in K$ 使得 $\langle \rho T(y^*, x^*) + x^* - y^*, y - x^* \rangle \geqslant 0, \forall y \in K, \rho > 0, \langle \eta T(x^*, y^*) + y^* - x^*, z - y^* \rangle \geqslant 0, \forall z \in K, \eta > 0$。文章中首先给出了希尔伯特空间 H 中一类带误差的二步投影方法，然后借助于投影方法的收敛性证明了由该算法生成的迭代序列强收敛于此类广义松弛余强制变分不等式体系(SNVI)问题的精确解。文中结果主要推广了 Verma 和 S. S. Chang 等的主要结论。

关键词：松弛余强制非线性变分不等式；带误差的二步投影方法；松弛映象；余强制映象；投影方法的收敛性

中图分类号：O224 **文献标识码**：A **文章编号**：1672-6693(2007)04-0008-04

1 预备知识

众所周知投影方法在相补问题、凸二次规划问题及变分不等式问题中都有着十分广泛的应用。最近，许多学者借助于投影方法的收敛性，研究了希尔伯特空间中的广义松弛上强制变分不等式体系的近似解的一些问题[1-9]。借助于投影方法的收敛性，本文在文献[1,4,6]等的基础上进一步讨论了希尔伯特空间 H 中带误差的二步投影方法及一类广义松弛上强制变分不等式体系的近似解的一些结论，文中结果主要推广了 S. S. Chang[5]，Verma[1,4,6] 等的主要结论。

为了方便后面的叙述和证明，首先给出下面的定义、标识及引理。

设 H 为希尔伯特空间，$\langle \cdot , \cdot \rangle$，$\| \cdot \|$ 分别表示希尔伯特空间 H 中的内积和范数，K 为 H 中的闭凸子集，$T: K\times K\rightarrow H$ 为 $K\times K$ 上的任一映象，本文将重点讨论下面一类非线性变分体系(SNVI)问题：求 $x^*, y^* \in K$ 使得

$$\langle \rho T(y^*, x^*) + x^* - y^*, y - x^* \rangle \geqslant 0, \forall y \in K, \rho > 0 \quad (1)$$

$$\langle \eta T(x^*, y^*) + y^* - x^*, z - y^* \rangle \geqslant 0, \forall z \in K, \eta > 0 \quad (2)$$

由文献[8]，显然(SNVI)问题(1)、(2)式等价于下面的投影式

$$x^* = P_K[y^* - \rho T(y^*, x^*)], \rho > 0$$

$$y^* = P_K[x^* - \eta T(x^*, y^*)], \eta > 0$$

其中 P_K 是 H 到 K 上的投影。下面讨论(SNVI)问题(1)、(2)式的一些特殊形式。

1) 如果 $\eta = 0$，(SNVI)问题(1)、(2)式退化成下面的非线性变分不等式(NVI)问题：求 $x^* \in K$，使得

$$\langle T(x^*, x^*), x - x^* \rangle \geqslant 0, \forall x \in K \quad (3)$$

2) 如果 K 是 H 中的闭凸锥，则(SNVI)问题(1)、(2)式等价于下面的非线性相补(SNC)问题：求 $x^*, y^* \in K$，使得 $T(y^*, x^*), T(x^*, y^*) \in K^*$，且

$$\langle \rho T(y^*, x^*) + x^* - y^*, x^* \rangle = 0, \rho > 0$$

$$\langle \eta T(x^*, y^*) + y^* - x^*, y^* \rangle = 0, \eta > 0$$

其中极锥 K^* 被定义为

$$K^* = \{f \in h: \langle f, x \rangle \geqslant 0, \forall x \in K\}。$$

3) 如果 $T: K\rightarrow H$ 为单变量映象，则(SNVI)问题(1)、(2)式退化成下面的非线性变分体系(SNVI)问题：求 $x^*, y^* \in K$，使得

$$\langle \rho T(y^*) + x^* - y^*, y - x^* \rangle \geqslant 0, \forall y \in K, \rho > 0 \quad (4)$$

$$\langle \eta T(x^*) + y^* - x^*, x - y^* \rangle \geqslant 0, \forall x \in K, \eta > 0 \quad (5)$$

显然，(SNVI)问题(4)、(5)式等价于下面的投影式

$$x^* = P_K[y^* - \rho T(y^*)], \rho > 0$$

$$y^* = P_K[x^* - \eta T(x^*)], \eta > 0$$

其中 P_K 为 H 到 K 上的投影。

* 收稿日期：2007-01-29 修回日期：2007-07-05

资助项目：国家自然科学基金(No. 10471159)

作者简介：彭再云(1980-)，男，重庆人，硕士，研究方向为广义凸性、最优理论与算法。

定义1[1]　称 $T: H \to H$ 是 r-强单调的，如果对任意的 $x, y \in H$ 有

$$\langle T(x) - T(y), x - y \rangle \geqslant r \| x - y \|^2$$

其中 $r > 0$ 为常数。

定义2[4]　1）称 T 为 μ-余强制的，如果对任意的 $x, y \in H$ 有

$$\langle T(x) - T(y), x - y \rangle \geqslant \mu \| Tx - Ty \|^2$$

其中 $\mu > 0$ 为常数，显然 μ-余强制的 T 一定是 $(1/\mu)$-李普希兹连续的。

2）称 T 为松弛 γ-余强制的，如果存在常数 $\gamma > 0$ 使得

$$\langle T(x) - T(y), x - y \rangle \geqslant (-\gamma) \| Tx - Ty \|^2, \forall x, y \in H$$

3）称 T 为松弛 (γ, r)-余强制的，如果存在常数 $\gamma, r > 0$ 使得

$$\langle T(x) - T(y), x - y \rangle \geqslant (-\gamma) \| Tx - Ty \|^2 + r \| x - y \|^2, \forall x, y \in H$$

当 $\gamma = 0$ 时，T 是 r-强单调的，故此类映象比强单调类映象更为广泛，显然有 r-强单调 $\Rightarrow$ 使得 (γ, r)-上强制。

定义3[5]　称双变量映象 $T: K \times K \to H$ 为松弛 (γ, r)-余强制的，如果存在常数 $\gamma, r > 0$ 使得 $\forall x, y \in K$ 有

$$\langle T(x, u) - T(y, v), x - y \rangle \geqslant (-\gamma) \| T(x, u) - T(y, v) \|^2 + r \| x - y \|^2, \forall u, v \in K$$

2）称 $T: K \times K \to H$ 是关于第一变量 μ-李普希兹连续的，如果存在常数 $\mu > 0$，使得 $\forall x, y \in K$ 有 $\| T(x, u) - T(y, v) \| \leqslant \mu \| x - y \|, \forall u, v \in K$。

引理1[8]　设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 为3个非负实数列，满足 $a_{n+1} \leqslant (1 - \lambda_n) a_n + b_n + c_n, \forall n \geqslant n_0$，其中 n_0 为非负整数，$\lambda_n \in (0,1)$，$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n = \infty$，$b_n = \circ(\lambda_n)$，且 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n < \infty$，则 $a_n \to \infty (n \to \infty)$。

2 算法

在这一部分，将引入一类带误差的二步投影方法及其特殊情形下的几类算法，以便更好地讨论(SNVI)问题(1)、(2)、(3)式及问题(4)、(5)式。

算法1　对任意 $x_0, y_0 \in K$ 作序列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 使得

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n - d_n) x_n + \alpha_n P_K [y_n - \rho T(y_n, x_n)] + d_n u_n$$
$$y_n = (1 - \beta_n - e_n) x_n + \beta_n P_K [x_n - \eta T(x_n, y_n)] + e_n v_n$$

其中 P_K 为 H 到 K 上的投影，$\rho, \eta > 0$ 为常数。$\{\alpha_n\}$，$\{\beta_n\}$，$\{d_n\}$，$\{e_n\}$ 是 $[0,1]$ 中的序列，$0 \leqslant \alpha_n + d_n \leqslant 1$，$0 \leqslant \beta_n + e_n \leqslant 1 (\forall n \geqslant 0)$，且 $\{u_n\}$，$\{v_n\}$ 为 K 中的有界序列。

算法1中当 $d_n = e_n = 0$ 时，可以得到算法2。

算法2　对任意 $x_0, y_0 \in K$ 作序列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 使得

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n) x_n + \alpha_n P_K [y_n - \rho T(y_n, x_n)]$$
$$y_n = (1 - \beta_n) x_n + \beta_n P_K [x_n - \eta T(x_n, y_n)]$$

其中 P_K 为 H 到 K 上的投影，$\rho, \eta > 0$ 为常数，且 $\{\alpha_n\}$，$\{\beta_n\} \subset [0,1]$。

算法1中当 $\beta_n = 1$，$d_n = e_n = 0$ 时，可以得到算法3。

算法3[4]　对任意 $x_0, y_0 \in K$ 作序列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 使得

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n) x_n + \alpha_n P_K [y_n - \rho T(y_n, x_n)]$$
$$y_n = P_K [x_n - \eta T(x_n, y_n)]$$

其中 P_K 为 H 到 K 上的投影，$\rho, \eta > 0$ 为常数，且 $\{\alpha_n\} \subset [0,1] (\forall n \geqslant 0)$。

算法1中当 $T: K \to H$ 为一单变量映象时，可得到算法4。

算法4　对任意 $x_0, y_0 \in K$ 作序列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 使得

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n - d_n) x_n + \alpha_n P_K [y_n - \rho T(y_n)] + d_n u_n$$
$$y_n = (1 - \beta_n - e_n) x_n + \beta_n P_K [x_n - \eta T(x_n)] + e_n v_n$$

其中 P_K 为 H 到 K 上的投影，$\rho, \eta > 0$ 为常数，且 $\{\alpha_n\}$，$\{\beta_n\}$，$\{d_n\}$，$\{e_n\} \subset [0,1]$，$0 \leqslant \alpha_n + d_n \leqslant 1$，$0 \leqslant \beta_n + e_n \leqslant 1 (\forall n \geqslant 0)$，且 $\{u_n\}$，$\{v_n\}$ 为 K 中的有界序列。

算法1中当 $\eta = 0$，$\beta_n = 1$ 及 $d_n = e_n = 0$ 时，得算法5。

算法5　对任意 $x_0 \in K$ 作序列 $\{x_n\}$ 使得

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n) x_n + \alpha_n P_K [x_n - \rho T(x_n, x_n)]$$

其中 P_K 为 H 到 K 上的投影，$\rho > 0$ 为常数，且 $\{\alpha_n\} \subset [0,1] (\forall n \geqslant 0)$。

3 主要结果

利用算法1的收敛性，下面将在 $T: K \times K \to H$ 为松弛 (γ, r)-余强制的且关于第一变量为 μ-李普希兹连续的假设下讨论(SNVI)问题(1)、(2)式的解。

定理1　设 H 为希尔伯特空间，K 为 H 中的闭凸子集，映象 $T: K \times K \to H$ 为松弛 (γ, r)-余强制的且关于第一变量为 μ-李普希兹连续。假定 $(x^*, y^*) \in$

$K \times K$ 是(SNVI)问题(1)、(2)式的解,$\{x_n\}$,$\{y_n\}$ 是按照算法 1 所定义的序列,其中 $\{u_n\}$,$\{v_n\}$ 为 K 中的有界序列,$\{\alpha_n\}$,$\{\beta_n\}$,$\{d_n\}$,$\{e_n\} \subset [0,1]$ 满足条件 1)$\beta_n \to 1, e_n \to 0 (n \to \infty)$;2)$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n = \infty$,$\sum_{n=0}^{\infty} d_n < \infty$;3)$0 < \rho, \eta < \frac{2(r-\gamma\mu^2)}{\mu^2}$,则序列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 分别强收敛于 x^* 和 y^*。

证明　因为 x^* 和 y^* 是(SNVI)问题(1)、(2)式的解,则有

$$x^* = P_K[y^* - \rho T(y^*, x^*)], \rho > 0$$
$$y^* = P_K[x^* - \eta T(x^*, y^*)], \eta > 0$$

根据算法 1 可得到

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - x^*\| &= \|(1-\alpha_n - d_n)x_n + \alpha_n P_K[y_n - \rho T(y_n, x_n)] - (1-\alpha_n-d_n)x^* - \\
&\alpha_n P_K[y^* - \rho T(y^*, x^*)] - d_n x^* + d_n u_n\| \leqslant \\
&(1-\alpha_n-d_n)\|x_n - x^*\| + \alpha_n\|y_n - y^* - \\
&\rho[T(y_n,x_n) - T(y^*,x^*)]\| + d_n\|u_n - x^*\| \qquad (6)
\end{aligned}$$

由 T 为松弛 (γ, r) - 余强制的且关于第一变量为 μ- 李普希兹连续,有

$$\begin{aligned}
&\|y_n - y^* - \rho[T(y_n,x_n) - T(y^*,x^*)]\|^2 = \\
&\|y_n - y^*\|^2 - 2\rho\langle T(y_n,x_n) - T(y^*,x^*), y_n - y^*\rangle + \\
&\rho^2\|T(y_n,x_n) - T(y^*,x^*)\|^2 \leqslant \|y_n - y^*\|^2 + \\
&2\rho\gamma\|T(y_n,x_n) - T(y^*,x^*)\|^2 + \\
&\rho^2\mu^2\|y_n - y^*\|^2 - 2\rho r\|y_n - y^*\|^2 \leqslant \\
&(1 - 2\rho r + \rho^2\mu^2 + 2\rho\gamma\mu^2)\|y_n - y^*\|^2 \qquad (7)
\end{aligned}$$

由于 $\{u_n\}$,$\{v_n\}$ 是 K 中的有界序列,令

$$M = \max\{\sup_{n\geqslant 0}\|u_n - x^*\|, \sup_{n\geqslant 0}\|v_n - y^*\|, \|x^* - y^*\|\} \qquad (8)$$

将(7)、(8)式代入(6)式并化简则

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leqslant (1-\alpha_n-d_n)\|x_n - x^*\| + \alpha_n\theta\|y_n - y^*\| + Md_n \qquad (9)$$

其中 $\theta = \sqrt{1 - 2\rho r + \rho^2\mu^2 + 2\rho\gamma\mu^2} < 1$(由假设 3)可得)。

根据算法 1,下面估计 $\|y_n - y^*\|$。

$$\begin{aligned}
\|y_n - y^*\| &= \|(1-\beta_n-e_n)x_n + \beta_n P_K[x_n - \eta T(x_n,y_n)] - (1-\beta_n-e_n)y^* - \\
&\beta_n P_K[x^* - \eta T(x^*,y^*)] - e_n y^* + e_n v_n\| \leqslant \\
&(1-\beta_n)\|x_n - y^*\| + \beta_n\|x_n - x^* - \\
&\eta[T(x_n,y_n) - T(x^*,y^*)]\| + e_n\|v_n - y^*\| \leqslant \\
&(1-\beta_n)\|x_n - x^*\| + (1-\beta_n)\|x^* - y^*\| + \\
&\beta_n\|x_n - x^* - \eta[T(x_n,y_n) - T(x^*,y^*)]\| + \\
&e_n\|v_n - y^*\| \qquad (10)
\end{aligned}$$

由 T 为松弛 (γ, r) - 余强制的且关于第一变量为 μ- 李普希兹连续,于是可得

$$\begin{aligned}
&\|x_n - x^* - \eta[T(x_n,y_n) - T(x^*,y^*)]\|^2 = \\
&\|x_n - x^*\|^2 - 2\eta\langle T(x_n,y_n) - T(x^*,y^*), x_n - x^*\rangle + \\
&\eta^2\|T(x_n,y_n) - T(x^*,y^*)\|^2 \leqslant \|y_n - y^*\|^2 + \\
&2\eta\gamma\|T(x_n,y_n) - T(x^*,y^*)\|^2 + \\
&\eta^2\mu^2\|x_n - x^*\|^2 - 2\eta r\|x_n - x^*\|^2 \leqslant \\
&(1 - 2\eta r + \eta^2\mu^2 + 2\eta\gamma\mu^2)\|x_n - x^*\|^2 = \\
&\sigma^2\|x_n - x^*\|^2 \qquad (11)
\end{aligned}$$

其中 $\sigma = \sqrt{1 - 2\eta r + \eta^2\mu^2 + 2\eta\gamma\mu^2} < 1$(由假设 3)可得)。

将(11)式代入(10)式,有

$$\begin{aligned}
\|y_n - y^*\| &\leqslant (1-\beta_n)\|x_n - x^*\| + M(1-\beta_n) + \beta_n\|x_n - x^* - \\
&\eta[T(x_n,y_n) - T(x^*,y^*)]\| + Me_n \leqslant \\
&(1-\beta_n)\|x_n - x^*\| + M(1-\beta_n) + \\
&\beta_n\sigma\|x_n - x^*\| + Me_n \leqslant \|x_n - x^*\| + \\
&M[e_n + (1-\beta_n)] \qquad (12)
\end{aligned}$$

将(12)式代入(9)式,得到

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - x^*\| &= (1-\alpha_n-d_n)\|x_n - x^*\| + \\
&\alpha_n\theta\|y_n - y^*\| + Md_n \leqslant (1-\alpha_n-d_n)\|x_n - x^*\| + \\
&\alpha_n\theta\{\|x_n - x^*\| + M[e_n + (1-\beta_n)]\} + \\
&Md_n \leqslant [(1-\alpha_n) + \alpha_n\theta]\|x_n - x^*\| + \\
&\alpha_n M[(1-\beta_n) + e_n] + Md_n
\end{aligned}$$

取 $a_n = \|x_n - x^*\|$,$\lambda_n = \alpha_n(1-\theta)$,$b_n = \alpha_n M[(1-\beta_n) + e_n]$ 及 $c_n = Md_n$,由假设 1)、2),可得 $\lambda_n \in (0,1)$,$\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n = \infty$,$b_n = \circ(\lambda_n)$ 及 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n < \infty (n \to \infty)$,于是由引理 1 有

$$\|x_n - x^*\| \to 0 (n \to \infty), \text{i.e}, x_n \to x^* (n \to \infty)$$

由(12)式,便有 $y_n \to y^* (n \to \infty)$。　证毕

注 1　算法 1 比文献[4-5]中算法更好,其精确度更高,显然定理 1 推广或改进了文献[5]和文献[1,4]中的主要结果。

由定理 1,下面的推论 1、推论 2、推论 3 可以立刻得到。

推论 1　设 H 为希尔伯特空间,K 为 H 中的闭凸子集,映象 $T: K \times K \to H$ 为松弛 (γ, r) - 余强制的且关于第一变量为 μ- 李普希兹连续。假定 $(x^*, y^*) \in K \times K$ 是(SNVI)问题(1)、(2)式的解,$\{x_n\}$,$\{y_n\}$ 是按照算法 2 所定义的序列,其中 $\{\alpha_n\}$,$\{\beta_n\} \subset [0,1]$ 满足条件 1)$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n = \infty$;2)$\sum_{n=0}^{\infty}(1-\beta_n) <$

∞；3) $0<\rho,\eta<\frac{2(r-\gamma\mu^2)}{\mu^2}$，则序列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 分别强收敛于 x^* 和 y^*。

推论2[4] 设 H 为希尔伯特空间，K 为 H 中的闭凸子集，映象 $T: K\times K\to H$ 为松弛 (γ,r)-余强制的且关于第一变量为 μ-李普希兹连续。假定 $(x^*,y^*)\in K\times K$ 是(SNVI)问题(1)、(2)式的解，$\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 是按照算法3所定义的序列，其中 $\{\alpha_n\}\subset[0,1]$ 满足条件1) $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$；2) $0<\rho,\eta<\frac{2(r-\gamma\mu^2)}{\mu^2}$，则序列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 分别强收敛于 x^* 和 y^*。

推论3[4] 设 H 为希尔伯特空间，K 为 H 中的闭凸子集，映象 $T: K\times K\to H$ 为松弛 (γ,r)-余强制的且关于第一变量为 μ-李普希兹连续。假定 $x^*\in K$ 是(SNVI)问题(3)式的解，$\{x_n\}$ 是按照算法5所定义的序列，其中 $\{\alpha_n\}\subset[0,1]$ 满足条件1) $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$；2) $0<\rho,\eta<\frac{2(r-\gamma\mu^2)}{\mu^2}$，则序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 x^*。

当 $T: K\times K\to H$ 退化成单变量映象时，可以得到下面的定理。

定理2 设 H 为希尔伯特空间，K 为 H 中的闭凸子集，映象 $T: K\to H$ 为松弛 (γ,r)-余强制的且是 μ-李普希兹连续的。假定 $(x^*,y^*)\in K\times K$ 是(SNVI)问题(4)、(5)式的解，$\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 是按照算法4所定义的序列，其中 $\{u_n\}$，$\{v_n\}$ 为 K 中的有界序列，$\{\alpha_n\}$，$\{\beta_n\}$，$\{d_n\}$，$\{e_n\}\subset[0,1]$ 满足条件1) $\beta_n\to 1, e_n\to 0\ (n\to\infty)$；2) $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$，$\sum_{n=0}^{\infty}d_n<\infty$；3) $0<\rho,\eta<\frac{2(r-\gamma\mu^2)}{\mu^2}$，则序列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 分别强收敛于 x^* 和 y^*。

注2 定理2中所用算法4比文献[6]中定理3.1所用算法2.1更一般，且其精确程度更高，显然定理2推广或改进了文献[6]的主要结果。

致谢 感谢张石生教授的指导与帮助！

参考文献：

[1] VERMA R U. Projection Methods, Algorithm, and a New System of Nonlinear Variational Inequalities[J]. Computers and Mathematics with Application, 2001, 41: 1025-1031.

[2] NIE H, LIU Z, KIM K H, et al. A System of Nonlinear Variational Inequalities Involving Strongly Monotone and Pseudocontractive Mappings[J]. Adv Nonlinear Var Inequal, 2003, 6(2): 91-99.

[3] XIN N H, ZHANG J Z. Local Convergence Analysis of Projection Type Algorithms: Unified Approach[J]. J Optim Theory Appl, 2002, 115: 211-230.

[4] VERMA R U. Generalized System for Relaxed Cocoercive Variational Inequalities and Projection Methods[J]. J Optim Theory Appl, 2004, 121: 203-210.

[5] CHANG S S, JOSEPH LEE H W, CHAN C K. Generalized System for Relaxed Cocoercive Variational Inequalities in Hilbert Spaces[J]. Applied Math Letters, 2007, 20(3): 329-334.

[6] VERMA R U. General Convergence Analysis for Two-step projection Methods Application to Variational Problems[J]. Appl Math Lett, 2005, 18(11): 1286-1292.

[7] 杨新民, TEO K L. 关于一类不可微规划问题的对偶性[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2005, 22(3): 1-7.

[8] CHANG S S. Theory of Variational Inequalities and Complementarities Problems with Applications[M]. Shanghai: Shanghai Scientific and Technical Literature Press. 1991.

[9] 丁协平. 扑微量空间内一般强非线性变分不等式和隐补问题[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 1994, 17(1): 11-17.

Generalized System of Relaxed Cocoercive Variational Inequalities and Projection Methods in Hilbert Space

PENG Zai-yun[1], *TANG Ping*[2]

(1. College of Science, Chongqing JiaoTong University, Chongqing 400067;

2. Dept. of Mathematics and Computer Science, Chongqing College of Liberal Arts and Science, Chongqing 402160)

Abstract: Let H be a real Hilbert space with the inner product $\langle\cdot,\cdot\rangle$ and norm $\|\cdot\|$. Let $T: K\times K\to H$ be any mapping on $K\times K$, and let K be a closed convex subset of H. We consider a system of nonlinear variational inequality (SNVI) problem as follows: to find $x^*, y^*\in K$ such that $\langle\rho T(y^*,x^*)+x^*-y^*, y-x^*\rangle\geqslant 0, \forall y\in K, \rho>0$, $\langle\eta T(x^*,y^*)+y^*-x^*, z-y^*\rangle\geqslant 0, \forall z\in K, \eta>

0. Based on the convergence of projection methods, the approximate solvability of generalized system of relaxed cocoercive nonlinear variational inequality problems and two-step projection methods with errors in the setting of Hilbert space are considered. Let $T: K\times K \to H$ a relaxed (γ, r)-cocoercive and μ-Lipschitz continuous in the first variable. Suppose that $(x^*, y^*)\in K\times K$ is a solution to (SNVI) problem (1), (2) and that $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ are sequences generated by Algorithm 1. If $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ are bounded sequences in K, $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{d_n\}$, $\{e_n\}$ are four sequences in $[0,1]$ satisfying the following conditions: 1) $\beta_n \to 1, e_n \to 0 (n\to\infty)$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n = \infty$, $\sum_{n=0}^{\infty} d_n < \infty$; 3) $0<\rho, \eta < \frac{2(r-\gamma\mu^2)}{\mu^2}$. Then the sequences $\{x_n\}$ and $\{y_n\}$ converge strong to x^* and y^* are solved respectively. The results presented in the paper improve the main results in Verma, Chang and the references therein.

Key words: relaxed cocoercive nonlinear variational inequalities; two-step projection methods with errors; relaxed mappings; cocoercive mappings; convergence of projection methods

（责任编辑　黄　颖）