复杂摩擦金融市场中的弱无套利分析*

谭英双
(重庆师范大学 美术学院,重庆 400047)

摘 要:在金融工程的研究中,无套利分析被证明是非常重要的工具。套利通常定义为在无风险下的获利机会,在常态下,经济学家认为套利是不存在的(至少不是对任何一段时间来说),相应地,在经济和金融数学的研究中,无套利假说就成为一个基本的原则。在各种文献中,无套利越来越受到更多的关注,例如 Ardalan(1999),Jouini 和 Kallar(1995),Prisman(1986)、Li 和 Wang(2001),Deng、Li 和 Wang(2000)等。在金融中一个重要的基础性的结果是无套利条件的等价性和在无交易费用市场价格系统的存在性(Ross,1978),Garmanand、Ohlson(1981)把该结果推广到成比例的交易费用市场情况,Dermody 和 Prisman(1993)进一步推广该结果到包括投资者市场影响和卖空费用的交易费情况。本文分析了金融市场中包括两种不同的固定交易费、不成比例的交易费和买卖价差及税收等条件下的弱无套利的情形,运用优化理论和凸分析方法,得到弱无套利的一些重要性质。

关键词:交易费;弱无套利;优化和凸分析理论
中图分类号:F830.91;O221 文献标识码:A 文章编号:1672-6693(2007)04-0082-03

1 基本概念和引理

Modigliani 和 Miller 于 1958 年在深入探讨企业资本结构和企业价值之间关系时,提出了著名的 MM 理论。这一理论蕴涵着一个极为深刻的思想——无套利均衡思想。金融理论研究中后来取得的一系列突破性成果都是无套利分析方法的杰出应用,相关的文献见 Allingham[1]、Duffie[2]、Ross[3]等,但它们大多数假设市场是无摩擦的。然而,在实际的金融市场中,总是存在着多种形式的摩擦,例如买进卖出差价、交易费、税收、只能买卖整数量(股)的股票、买卖有数量限制等。一般来说,任何形式的摩擦均使问题复杂化。也正因为如此,摩擦市场的无套利分析更加引人重视,这方面的研究也取得了一些进展,例如 Garman 和 Ohlson[4] 利用状态价格刻画了有交易费时的无套利条件,Prisman[5] 利用最优化方法刻画了有税收时的无套利条件等。本节在更复杂的摩擦市场(包括买卖价差、税收、不成比例的交易费)上刻画了无套利的一些性质,拓展了文献[2,4-7]等的结果。

考虑这样的资本市场,它有 n 个资产 $1,2,\cdots,n$ 和 m 个可能的自然状态 $s_1,s_2,\cdots,s_m$,资产在期初交易,收益在期末实现,在期中不发生任何交易。对投资者来说,资产 i 的当前购买价格是 p_i^a,出售价格是 p_i^b,出售价格略低于购买价格,即 $0\leqslant p_i^b\leqslant p_i^a$,$i=1,\cdots,n$。

假设至少存在某个资产的出售价格 $p_i^b\geqslant 0$,买卖价格之差(即所谓的价差)是一种摩擦,这种摩擦在大多数经济市场上是存在的。另一种形式的摩擦是交易费,设购买单位资产 i 的交易费是 λ_i^a,出售单位资产 i 的交易费是 λ_i^b,这里 $0\leqslant\lambda_i^a,\lambda_i^b<1$,$i=1,\cdots,n$,设资产 i 在状态 S_j 的收益是 r_{ij}($i=1,\cdots,n$;$j=1,\cdots,m$),记 $p^a=(p_1^a,\cdots,p_n^a)^{\mathrm T}$ 为买价向量,$p^b=(p_1^b,\cdots,p_n^b)^{\mathrm T}$ 为卖价向量,$\lambda^a=(\lambda_1^a,\cdots,\lambda_n^a)^{\mathrm T}$ 为购买各资产时的交易费用率向量,$\lambda^b=(\lambda_1^b,\cdots,\lambda_n^b)^{\mathrm T}$ 为出售各资产时的交易费用率向量,$R=(r_{ij})_{n\times m}$ 为收益矩阵(亦称支付矩阵),其中 T 表示向量或矩阵的转置。现在,市场完全可用八元数组($p^a,p^b,\Delta_i,\Delta_j,\lambda^a,\lambda^b,U^a,U^b$)来描述。

为不失一般性,忽略多余的资产(即可用其他资产线性表出的资产),删去概率为零的状态,并设矩阵 R 的秩为 $n\leqslant m$,如果 $n=m$,则称市场是完全的。投资组合调整是一个向量 $x=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm T}\in\mathbf R^n$,其中 x_i 是投资者对资产 i 的调整量(股数),若 x_i

* 收稿日期:2006-06-16 修回日期:2007-05-06
资助项目:国家自然科学基金(No. 10471159)
作者简介:谭英双(1975-),男,四川蓬溪人,助理研究员,博士研究生,研究方向为运筹学与控制论。

$\geqslant 0$,则投资者买进资产 i 的数量为 x_i,若 $x_i \leqslant 0$,则投资者卖出资产 i 的数量为 $-x_i$。在 $\mathbf{R}$ 上定义函数

$$\tau(x_i) = \begin{cases}(1+\lambda_i^a)p_i^a x_i + w_i, 若\ x > 0 \\ (1-\lambda_i^b)p_i^b x_i + w_j, 若\ x \leqslant 0\end{cases}$$

$$g(x_i) = \begin{cases}(a_{ij} - u_{ij}^a)p_i^a x_i, 若\ x > 0 \\ (a_{ij} - u_{ij}^b)p_i^b x_i, 若\ x \leqslant 0\end{cases}$$

其中,$i = 1,2,\cdots,n$;$j = 1,2,\cdots,m$。

在 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 上定义函数:

$$\tau(x) = \sum_{i=1}^n \tau(x_i), \forall x \in \mathbf{R}^n$$

$$g(x) = \sum_{i=1}^n g(x_i)$$

则 $f(x) = \tau(x) + g(x)$。

投资组合调整 $x(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 的包括交易费在内的总成本则是 $\tau(x)$,状态支付向量是 $R^{\mathrm{T}}x$。若 $f(x) = 0$ 则意味着调整没有任何成本,若 $f(x) < 0$,则调整在期初产生了正的现金流。

引理 1[7] 函数 Ψ: $\mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ 是次线性的,如果对任意 $x, y \in \mathbf{R}^k$,$\alpha \in \mathbf{R}$ 有

$$\Psi(x+y) \leqslant \Psi(x) + \Psi(y)$$

$$\Psi(ax) = a\Psi(x)$$

引理 2 费用函数 f, f_i $(i = 1,\cdots,n)$ 均是次线性的,因而也是凸的。

证明 只证明 $\tau, \tau_1, i = 1,\cdots,n$ 是次线性的。令 $z, z^j \in \mathbf{R}$,$a \geqslant 0$,显然 $\tau_i(az) = a\tau_i(z)$,因此,只需证明 $\tau_i(z+z') \leqslant \tau_i(z) + \tau_i(z+z')$。为此,考虑如下 4 种情况:

1) 当 $z, z' \geqslant 0$ 时,此时 $z + z' \geqslant 0$,因而有

$$\tau_i(z+z') = (1+\lambda_i^a)p_i^a(z+z') + \Delta_i = \tau_i(z) + \tau_i(z')$$

2) 当 $z, z' \leqslant 0$ 时,此时 $z + z' \leqslant 0$,因而有 $\tau_i(z+z') = (1-\lambda_i^b)p_i^b(z+z') + \Delta_j = \tau_i(z) + \tau_i(z')$。

3) 当 $z \geqslant 0, z' \leqslant 0$ 时,有 $(1+\lambda_i^a)p_i^a + \Delta_i \geqslant (1-\lambda_i^b)p_i^a \geqslant (1-\lambda_i^b)p_i^b + \Delta_j$。又分两种情况讨论。

① 当 $z + z' \geqslant 0$ 时,有

$$\begin{aligned}\tau_i(z+z') &= (1+\lambda_i^a)p_i^a(z+z') + \Delta_i = \\ &(1+\lambda_i^a)p_i^a z + \Delta_i + (1+\lambda_i^a)p_i^a z' + \Delta_i \leqslant \\ &(1+\lambda_i^a)p_i^a z + \Delta_i + (1-\lambda_i^b)p_i^b z' + \Delta_j = \\ &\tau_i(z) + \tau_i(z')\end{aligned}$$

② 当 $z + z' \leqslant 0$ 时,有

$$\begin{aligned}\tau_i(z+z') &= (1-\lambda_i^b)p_i^b(z+z') + \Delta_j = \\ &(1-\lambda_i^b)p_i^b z + \Delta_j + (1-\lambda_i^b)p_i^b z' + \Delta_j \leqslant \\ &(1+\lambda_i^a)p_i^a z + \Delta_i + (1-\lambda_i^b)p_i^b z' + \Delta_j = \\ &\tau_i(z) + \tau_i(z')\end{aligned}$$

4) 当 $z \leqslant 0, z' \geqslant 0$ 时,此时与 3) 类似,由引理 2 的证明,类似可证 g, g_i 也是次线性的。故 f, f_i 次线性的。由泛函知 f 是次线性的,不难证明 K 是凸锥。

证毕

定义 1[7] 称金融市场 $(p^a, p^b, \Delta_i, \Delta_j, \lambda^a, \lambda^b, U^a, U^b)$ 是弱无套利的,如果不存在投资组合调整 $x = (x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 使得

$$f(x) < 0 \text{ 和 } x^{\mathrm{T}}R \geqslant 0 \tag{1}$$

这里 $R = (r_{ij})_{n\times m}$ 为收益矩阵。为方便起见,这里 $\mathbf{R}_+ = \{y \in \mathbf{R}: y \geqslant 0\}$。

2 基本结果

本节给出弱无套利的一个充要条件,它刻画了弱无套利的基本特征。

定理 1 若存在向量 $q = (q_1,\cdots,q_m)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}_+^m \setminus \{0\}$ 使得

$$(1-x_i^b)p_i^b + w_i + (1-u_{ij}^a)a_j \leqslant \sum_{i=1}^n r_{ij}q_j \leqslant$$
$$(1+\lambda_i^a)p_i^q + w_j + (1-u_{ij}^b)a_i, i = 1,\cdots,n \tag{2}$$

则市场 $(p^a, p^b, \Delta_i, \Delta_j, \lambda^a, \lambda^b, U^a, U^b)$ 是弱套利的。

证明 设存在向量 $q = (q_1,\cdots,q_m)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}_+^m \setminus \{0\}$,使得 (2) 式成立,反设市场 $(p^a, p^b, \Delta_i, \Delta_j, \lambda^a, \lambda^b, U^a, U^b)$ 是弱套利的,用 $x_i \leqslant 0$ 同乘以 (2) 式的前一不等式的两端,用 $x_i > 0$ 同乘以 (2) 式的后一不等式的两端,得到

$$x_i \sum_{j=1}^m r_{ij}q_j \leqslant$$
$$\begin{cases}(1+\lambda^a)p^a x_i + w_i + (a_{ij} - u_{ij}^a)p^a x_i, x_i > 0 \\ (1-\lambda^b)p^b x_i + w_i + (a_{ij} - u_{ij}^b)p^b x_i, x_i \leqslant 0\end{cases} = f(x_i)$$

因此 $f(x) = \sum_{i=1}^n \tau(x_i) + g(x_i) \geqslant \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^m r_{ij}q_j = \sum_{j=1}^m q_j \sum_{i=1}^n r_{ij}x_i = (x^{\mathrm{T}}R)q$

如果 $x^{\mathrm{T}}R \geqslant 0$,则由上式和 $q \geqslant 0$ 得 $f(x) \geqslant 0$,所以不存在 x 使得 (1) 式成立,也就是说,市场 $(p^a, p^b, \Delta_i, \Delta_j, \lambda^a, \lambda^b, U^a, U^b)$ 是弱无套利的。 证毕

3 状态价格

把满足 (2) 式的 q_j 称为是状态 j 下的状态价格 $(j = 1,\cdots,m)$,此时称向量 $q = (q_1,\cdots,q_m)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^m$ 为状态价格向量,如果把状态价格 q_j 看成是状态 j 下一单位货币的现值,则 (2) 式的最右端可解释成买

入成本,而最左端可解释成卖出成本,这样,利用状态价格这个术语还可将定理1重新表述为定理2。

定理2　若存在半正状态价格向量 $q \in \mathbf{R}^m_+ \setminus \{0\}$,则市场$(p^a, p^b, \Delta_i, \Delta_j, \lambda^a, \lambda^b, U^a, U^b)$是弱无套利的。

证明　从定理1的证明立即可得出。定义$\mathbf{R}^m$的一个子集

$$Z = \{z \in \mathbf{R}^m ; \exists x \in \mathbf{R}^n, z \leqslant \mathbf{R}^{\mathrm{T}} x\}$$

并定义从$\mathbf{R}^m$到$[-\infty, +\infty]$的函数

$$U(z) = \begin{cases} \inf\{f(x) : \mathbf{R}^{\mathrm{T}} x \geqslant z\}, z \in Z \\ +\infty, \text{否则} \end{cases}$$

证毕

引理3　函数U是凸的。

证明　U的上图像为

$$epiU = \{(z,a) : z \in \mathbf{R}^m, a \geqslant U(z)\} = \{(z,a) : z \in Z, a \geqslant U(z)\} = epiu$$

这里u是定义在Z上的函数

$$u(z) = \inf\{f(x) : \mathbf{R}^{\mathrm{T}} x \geqslant z\} = \inf\{a : a \geqslant f(x), R^{\mathrm{T}} x \geqslant z\} = \inf\{a : (x,a) \in C\}$$

其中　$C = \{(x,a) : a \geqslant \tau(x), R^{\mathrm{T}} x \geqslant z\}$

显然C是一个凸集,因为f是凸函数,根据Avriel[8]的定理4.14,u是凸函数。于是,$epiU$是凸集,所以,U是凸函数,下面用函数U来刻画市场的弱无套利性。　证毕

定理3　若$U(0) = 0$,则市场$(p^a, p^b, \Delta_i, \Delta_j, \lambda^a, \lambda^b, U^a, U^b)$是弱无套利的。

证明　设$U(0) = 0$,则对任意满足的x,必有$0 = u(0) = \inf\{f(x) : R^{\mathrm{T}} x \geqslant 0\} \leqslant f(x)$。因此,不存在$x$使得$f(x) < 0$和$R^{\mathrm{T}} x \geqslant 0$,则市场$(p^a, p^b, \Delta_i, \Delta_j, \lambda^a, \lambda^b, U^a, U^b)$是弱无套利的。　证毕

定理4　若

$$U(z) \geqslant z^{\mathrm{T}} q, \forall z \in \mathbf{R}^m \tag{3}$$

则市场$(p^a, p^b, \Delta_i, \Delta_j, \lambda^a, \lambda^b, U^a, U^b)$是弱无套利的。

证明　设$q \in \mathbf{R}^m$满足(3)式,任给$x \in \mathbf{R}^n$。令$z_x = R^{\mathrm{T}} x$,则$z_x \in Z$。任给y满足$R^{\mathrm{T}} y \geqslant z_x$,则有

$$u(z_x) = \inf\{f(y) : R^{\mathrm{T}} y \geqslant z_x\} \leqslant f(y)$$

由(3)式有$f(y) \geqslant U(z_x) \geqslant z_x^{\mathrm{T}} q$。特别地,有$f(x) \geqslant z_x^{\mathrm{T}} q = x^{\mathrm{T}} R_q$。由于上式对任意$x \in \mathbf{R}^n$成立,故市场$(p^a, p^b, \Delta_i, \Delta_j, \lambda^a, \lambda^b, U^a, U^b)$是弱无套利的。　证毕

总之,本文运用优化理论和凸分析方法,分析了包括两种不同的固定交易费、不成比例的交易费和买卖价差及税收等条件下金融市场中的弱无套利的情形,得出了市场$(p^a, p^b, \Delta_i, \Delta_j, \lambda^a, \lambda^b, U^a, U^b)$是弱无套利的一系列必要条件,同时,本文还引入了状态价格向量,相应得到一些结果,拓展了文献[2,4-7]等的相应结果。

参考文献:

[1] ALLINGHAM M. Arbitrage[M]. New York: St. Marin's Press, 1991.

[2] DUFFIE D. Dynamic Asset Pricing Theory [M]. 2nd ed. New Jersey: Princeton University Press, 1996.

[3] ROSS S A. The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing [J]. Journal of Economic Theory, 1976, 13: 341-360.

[4] GARMAN M B, OHLSON J. A Valuation of Risky Assets in Arbitrage-free Economies with Transactions Costs[J]. Journal of Financial Economics, 1981, 9: 271-280.

[5] PRISMAN E Z. Valution of Risky Assets in Arbitrage-free Economies with Fictions[J]. The Journal of Finance, 1986, 41: 545-560.

[6] GREEN R C, SRIVASTAVA S. Risk Aversion and Arbitrage [J]. The Journal of Finance, 1985, 40: 257-268.

[7] 李仲飞,汪寿阳,杨海亮. 有摩擦市场的弱无套利的刻画[J]. 中国管理科学, 2002, 10(3): 1-5.

[8] AVRIEL M. Nonlinear Programming: Analysis and Methods [M]. New Jersey: Prentice-hall, Inc, Englewood Cliffs, 1976.

An Analysis of Weak No-arbitrage in a Friction Compicates Market

TAN Ying-shuang

(Academy of Fine Arts, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: No-arbitrage has been proven to be a very important tool in the study of financial engineering. Arbitrage is commonly defined as a profit-making opportunity at no risk. Economic states with arbitrage are believed not to exist(at least not for any signifciant duration of time) in a normal situation. accordingly, no-arbitrage assumption has been a fundamental principal in the studies of mathematical economics and finance. No-arbitrage has received much attention in the literature, for exemple, Carassus, Pham, and Touzi(2001) and Ardalan(1999), Jouini and Kallar(1995), Prisman(1986), Li and Wang(2001) and Deng, Li and Wang(2000). One of the fundamental results in finance is the equivalence between no-arbitrage condition and existence of a pricing operator in markets with no transaction (see Ross ,1978). Garmanand and Ohlson (1981) extended this result to markets with proportional transaction costs . Dermody and Prisman (1993) extended the result to a transaction costs that include the investor′market-impact and short-borrowing costs. Furthermore, No-arbitrage in a Frictional Market. For a finite-security and finite-state financial market with three forms of friction: ask-bid spread, transaction costs and tax, by using the theory of convex analysis and some optimization techniques, a series of necessary and sufficient conditions are established to characterize weak . In particular, the existence of a semi-positive solution or a strictly positive solution to a linear inequality system is used to characterize weak. It makes one to find if there exists an arbitrage opportunity in the frictional market by a linear programming algorithm in polynomial time. This might be a fundamental result in computational finance. (See Li ,2002). In this paper we study the characterization in a friction compicates where the transaction costs include two difference fixed costs, a proportional costs and bid-ask spreads, and tax. These assumptions make us more realistic than these previously studies. On the other hand, these assumptions make cost function become more complicated. In word, by using convex analysis and optimization theory, a series of results are derived , It′s results make us more realistic and extend many results known in some existing literature.

Key words: transaction costs ; weak no-arbitrage ; convex analysis and optimization theory

（责任编辑　游中胜）