运筹学与控制论

Volterra 型脉冲积分微分方程解的存在性和稳定性*

杨 志 春
(重庆师范大学 数学与计算机科学学院,重庆 400047)

摘 要:研究一类 Volterra 型脉冲积分微分方程的存在性、唯一性和稳定性问题。给出方程参数条件、相关定义和脉冲型 Gronwall 不等式的引理,利用函数序列的 Weierstrass 收敛定理,获得具有脉冲初始条件的 Volterra 型微分方程(不含脉冲项情形)解的存在性;在此基础上,利用迭代法和脉冲型 Gronwall 不等式,得到 Volterra 型脉冲积分微分方程解的存在性和唯一性;通过再次利用 Gronwall 不等式和分析技巧,获得该脉冲微分方程的指数稳定性的充分条件;举例说明即使连续的 Volterra 型微分方程不稳定,在一定脉冲扰动的情况下,系统可能变成指数稳定,这表明脉冲对微分方程稳定性的影响可能起决定作用。

关键词:脉冲积分微分方程;存在性;唯一性;稳定性;Gronwall 不等式
中图分类号:O175.13 **文献标识码**:A **文章编号**:1672-6693(2008)01-0001-04

1 预备知识

在生态学、物理、化学、电子通讯、神经网络等领域,Volterra 型积分微分方程是描述时间演化系统的重要数学模型之一,其研究受到重视也得到不少研究成果[1-5]。而脉冲方程通常用来刻画系统状态可能遭受突然的干扰而发生瞬动的现象。近年来,具有脉冲的 Volterra 型积分微分方程受到关注。对含有脉冲的积分微分方程,文献[6-8]得到了它稳定性的一些充分条件。本文利用脉冲型 Gronwall 不等式和函数序列的 Weierstrass 收敛定理,主要讨论一类 Volterra 型脉冲积分微分方程解存在的唯一性和指数稳定性,获得了一些新的结果。

考虑一类 Volterra 型脉冲积分微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=A(t)x+\displaystyle\int_0^t C(t,s)x(s)\mathrm{d}s,t\neq\tau_k\\ \Delta x=x(\tau_k{}^+)-x(\tau_k{}^-)=I_k(x(\tau_k{}^-)),t=\tau_k\end{cases}\tag{1}$$

其中 $t\geqslant 0$,$k\in\mathbf{N}$,且满足下列条件

1) $0<\tau_1<\cdots<\tau_k<\cdots,\lim\limits_{k\to\infty}\tau_k=\infty$;2) $I_k(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续,$I_k(0)=0$,$k\in\mathbf{N}$;

3) $A(t)$ 在 $0\leqslant t<\infty$ 上连续,$C(t,s)$ 在 $0\leqslant s\leqslant t<\infty$ 上连续,且 $f(s)=\int_s^{\infty}|C(u,s)|\mathrm{d}u$ 在 $0\leqslant t<\infty$ 上存在且连续。

记 $PC([0,a],\mathbf{R})=\{\phi:[0,a]\to\mathbf{R},0\leqslant a\leqslant+\infty$,在 τ_k 为左连续且右极限存在,$k\in\mathbf{N}$,其余各点连续;$a=0$ 时,ϕ 为 $\mathbf{R}$ 中一点$\}$。下文简记为 $PC[0,a]$,对 $\phi\in PC[0,a]$,定义其范数 $\|\phi\|=\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant a}|\phi(s)|$。

定义 1 任意给定初始函数 $t_0\geqslant 0$,$\phi\in PC[0,t_0]$,$\phi(t_0{}^+)=x_0$,称 $x(t)=x(t,t_0,\phi)\in PC[0,+\infty]$ 为(1)式过(t_0,ϕ)的解。当 $t\in[0,t_0]$ 时,$x(t)=\phi(t)$,$x(t_0{}^+)=x_0$;当 $t>t_0$ 时,满足(1)式。

下面的引理是将 Gronwall 不等式推广到脉冲情形。

引理 1[8] (脉冲型 Gronwall 不等式)$m,p\in PC[\mathbf{R}^+,\mathbf{R}^+]$,$b_k\geqslant 0$ 满足 $m(t)\leqslant m(t_0{}^+)+\int_{t_0}^t p(s)m(s)\mathrm{d}s+$

* 收稿日期:2007-09-26 修回日期:2007-10-29
资助项目:重庆市教委科学技术研究项目(No. KJ070806);重庆师范大学自然科学基金项目(No. 06XLB025)
作者简介:杨志春(1971-),男,重庆江津人,副教授,博士,研究方向为微分方程与控制理论。

$\sum_{t_0<\tau_k<t} b_k m(\tau_k), t > t_0$,则有 $m(t) \leqslant m(t_0{}^+)\exp(\int_{t_0}^{t} p(s)\mathrm{d}s) \prod_{t_0<\tau_k<t}(1+b_k)$。

2 主要结果

为了获得 Volterra 型脉冲积分微分方程解的存在唯一性,需要考察下面的系统

$$x' = A(t)x + \int_0^t C(t,s)x(s)\mathrm{d}s, t > 0 \tag{2}$$

定理1 设(2)式满足条件1)～3),任意给定初始函数 $t_0 \geqslant 0, \phi \in PC[0,t_0], \phi(t_0{}^+) = x_0$,则(2)式在 (t_0,∞) 上存在唯一解 $x(t)$ 满足 $x(t) \in C((t_0,\infty),\mathbf{R})$,且 $x(t) = \phi(t), t \in [0,t_0], x(t_0^+) = x_0$。

证明 对任意 $A > t_0 \geqslant 0$,设 $g(t) = \int_0^{t_0}[\int_{t_0}^{t} C(u,s)\mathrm{d}u]\phi(s)\mathrm{d}s$,它在 $[t_0,A]$ 上关于 t 连续,$D(t,s) = A(s) + \int_s^t C(u,s)\mathrm{d}u$ 存在且在 $t_0 \leqslant s \leqslant t \leqslant A$ 上连续,则当 $t_0 \leqslant s \leqslant t \leqslant A$ 有 $|x_0 + g(t)| \leqslant L, |D(t,s)| \leqslant M$。在 $[0,A]$ 上构造下列函数序列

$$x_1(t) = \begin{cases}\phi(t), 0 \leqslant t \leqslant t_0 \\ x_0 + g(t), t_0 < t \leqslant A\end{cases}, \quad x_{n+1}(t) = \begin{cases}\phi(t), 0 \leqslant t \leqslant t_0 \\ x_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)x_n(s)\mathrm{d}s + \int_{t_0}^{t}\int_0^u C(u,s)x_n(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}u, t_0 < t \leqslant A\end{cases} \tag{3}$$

交换(3)式中二次积分项的积分次序,整理可得 $x_{n+1}(t) = \begin{cases}\phi(t), 0 \leqslant t \leqslant t_0, \\ x_0 + g(t) + \int_{t_0}^{t} D(t,s)x_n(s)\mathrm{d}s, t_0 < t \leqslant A\end{cases}, n \in \mathbf{N}$。

当 $t_0 < t \leqslant A$ 时,$|x_2(t) - x_1(t)| \leqslant \int_{t_0}^{t}|D(t,s)||x_0 + g(s)|\mathrm{d}s \leqslant LM(t - t_0)$,假设当 $t_0 < t \leqslant A$ 时,$|x_k(t) - x_{k-1}(t)| \leqslant \dfrac{LM^{k-1}(t-t_0)^{k-1}}{(k-1)!}$ 成立,则 $|x_{k+1}(t) - x_k(t)| \leqslant \int_{t_0}^{t}|D(t,s)||x_k(s) - x_{k-1}(s)|\mathrm{d}s \leqslant \int_{t_0}^{t}\dfrac{MLM^{k-1}(s-t_0)^{k-1}}{(k-1)!}\mathrm{d}s = \dfrac{LM^k(t-t_0)^k}{k!}$。因此,对一切 $n = 1,2,\cdots$,都有 $|x_{n+1}(t) - x_n(t)| \leqslant \dfrac{LM^n(t-t_0)^n}{n!}$,$0 \leqslant t \leqslant A$。注意到 $x_n(t) = x_1(t) + \sum_{i=1}^{n-1}[x_{i+1}(t) - x_i(t)]$,利用函数序列的 Weierstrass 收敛定理,连续函数序列 $\{x_n(t)\}$ 在 $t_0 < t \leqslant A$ 上一致收敛。设 $\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x(t)$,则当 $0 \leqslant t \leqslant t_0$ 时,$x(t) = \phi(t), x(t_0^+) = x_0$ 当 $t_0 < t \leqslant A$ 时,$x(t) \in C((t_0,A),\mathbf{R})$,且对(3)式取极限,有 $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)x(s)\mathrm{d}s + \int_{t_0}^{t}\int_0^u C(u,s)x(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}u$,$t_0 < t \leqslant A$。

对 t 取导数,可知 $x(t)$ 在 $t_0 < t \leqslant A$ 上满足(3)式,由于 A 任意性,可知定理1中的存在性成立。 证毕

定理2 设(1)式满足条件1)～3),且 $I_k(x)$ 满足 Lipschitz 条件 $|I_k(x) - I_k(y)| \leqslant b_k|x - y|, x,y \in \mathbf{R}$,则对任意给定初始函数 $t_0 \geqslant 0, \phi \in PC[0,t_0], \phi(t_0{}^+) = x_0$,(1)式在 $(t_0,\infty]$ 上存在唯一解 $x(t)$,且满足 $x(t) = \phi(t), t \in [0,t_0], x(t_0^+) = x_0$。

证明 任意给定初始函数 $t_0 \geqslant 0, \phi \in PC[0,t_0], \phi(t_0{}^+) = x_0$。由定理1知,(1)式存在唯一解 $x_1(t)$,满足 $x_1(t) \in C((t_0,\infty),\mathbf{R})$,且 $x_1(t) = \phi(t), t \in [0,t_0], x_1(t_0^+) = x_0$。

考虑新的初始函数 $\phi_1(t) = x_1(t), t \in [0,\tau_1], \phi_1(\tau_1^+) = x_1(\tau_1) + I_1(x_1(\tau_1))$,显然 $\phi_1 \in PC[0,\tau_1]$。由定理1,(1)式存在唯一解 $x_2(t)$,满足 $x_2(t) \in C((\tau_1,\infty),\mathbf{R})$,且 $x_2(t) = \phi_1(t), t \in [0,\tau_1], x_2(\tau_1^+) = \phi_1(\tau_1^+)$。

再考虑第二个初始函数 $\phi_2(t) = x_2(t), t \in [0,\tau_2], \phi_2(\tau_2^+) = x_2(\tau_2) + I_2(x_2(\tau_2))$,显然 $\phi_2 \in PC[0,\tau_2]$。由定理1,(1)式存在唯一解 $x_3(t)$,满足 $x_3(t) \in C((\tau_2,\infty),\mathbf{R})$,且 $x_3(t) = \phi_2(t), t \in [0,\tau_2], x_3(\tau_2^+) =$

$\phi_2(\tau_2^+)$。重复上述过程,可得(1)式的一系列解 $\{x_n(t)\}$,令 $x(t)=\begin{cases}\phi(t),0\leqslant t\leqslant t_0\\ x_1(t),t_0<t\leqslant\tau_1\\ x_2(t),\tau_1<t\leqslant\tau_2\\ \cdots\cdots\\ x_n(t),\tau_{n-1}<t\leqslant\tau_n\end{cases}$,$n=1,2,\cdots$,根据 $\{x_n(t)\}$ 的构造可知,分段连续函数 $x(t)$ 在 (t_0,∞) 上满足(1)式,且其解表示为,当 $t\in[0,t_0]$ 时,$x(t)=\phi(t)$,$x(t_0^+)=x_0$ 当 $t>t_0$ 时,$x(t)=x_0+\int_{t_0}^t A(s)x(s)\mathrm{d}s+\int_{t_0}^t\int_0^u C(u,s)x(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}u+\sum_{t_0<\tau_k<t}I_k(x(\tau_k))$。

下面证明唯一性,设 $x(t)$,$y(t)$ 是给定初始条件的任意两个解,则当 $t\in[0,t_0]$ 时,$x(t)=y(t)=\phi(t)$,$x(t_0^+)=y(t_0^+)$ 当 $t>t_0$ 时,由 I_k 满足 Lipschitz 条件,有

$$|x(t)-y(t)|\leqslant\int_{t_0}^t|D(t,s)||x(s)-y(s)|\mathrm{d}s+\sum_{t_0<\tau_k<t}|I_k(x(\tau_k))-I_k(y(\tau_k))|\leqslant$$
$$\int_{t_0}^t[|A(s)|+f(s)]|x(s)-y(s)|\mathrm{d}s+\sum_{t_0<\tau_k<t}b_k|x(\tau_k)-y(\tau_k)|$$

由引理 1,$|x(t)-y(t)|\leqslant c\exp\{\int_{t_0}^t[|A(s)|+f(s)]\mathrm{d}s\}\prod_{t_0<\tau_k<t}(1+b_k)$,$c=0$,即 $x(t)=y(t)$,所以结论成立。　　证毕

定理 3　设 $\sup_{k\in\mathbf{N}}\{\tau_k-\tau_{k-1}\}<\infty$,$A(t)$,$f(t)$ 为有界函数,且定理 2 中的条件成立。如果

$$|x+I_k(x)|\leqslant c_k|x|,\sup_{k\in\mathbf{N}}\{\ln c_k+\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k}[|A(s)|+f(s)]\mathrm{d}s\}<0\tag{4}$$

那么(1)式的零解是指数稳定的。

证明　由(1)式,当 $t\in(\tau_{k-1},\tau_k]$,$k=1,2,\cdots$,有 $|x(t)|\leqslant|x(\tau_{k-1}^+)|+\int_{\tau_{k-1}}^t[|A(s)|+|f(s)|]|x(s)|\mathrm{d}s$,当引理 1 中 $b_k=0$,$|x(t)|\leqslant|x(\tau_{k-1})|\exp\{\int_{\tau_{k-1}}^t[|A(s)|+f(s)]\mathrm{d}s\}$,$t\in(\tau_{k-1},\tau_k]$,$k=1,2,\cdots$,另一方面,$|x(\tau_k^+)|=|x(\tau_k^-)+I_k(x(\tau_k^-))|\leqslant c_k|x(\tau_k^-)|$,$k=1,2,\cdots$,不难由归纳法,可得

$$|x(t)|\leqslant|x(t_0^+)|\exp\{\int_{t_0}^t[|A(s)|+f(s)]\mathrm{d}s\}\prod_{t_0<\tau_k<t}c_k,t>t_0\tag{5}$$

设 $T=\sup_{k\in\mathbf{N}}\{\tau_k-\tau_{k-1}\}>0$,由(4)式中第二个式子,存在数 $a>0$,使得

$$c_k\leqslant\exp\{\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k}-[|A(s)|+f(s)]\mathrm{d}s-a\}\leqslant\exp\{\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k}[-|A(s)|-f(s)-\frac{a}{T}]\mathrm{d}s\}$$

结合(5)式,当 $t\in(\tau_{k-1},\tau_k]$,$k=1,2,\cdots$,有

$$|x(t)|\leqslant|x(t_0^+)|\exp\{\int_{t_0}^t[|A(s)|+f(s)]\mathrm{d}s\}\prod_{t_0<\tau_k<t}\exp\{\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k}[-|A(s)|-f(s)-\frac{a}{T}]\mathrm{d}s\}\leqslant$$
$$|x(t_0^+)|\exp\{\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k}[|A(s)|+f(s)+\frac{a}{T}]\mathrm{d}s\}\exp\{-\frac{a}{T(t-t_0)}\}\leqslant|x(t_0^+)|\exp(MT+a)\exp\{-\frac{a}{T(t-t_0)}\}$$

其中 $M\geqslant|A(t)|+f(t)$,结论成立。　　证毕

下面的例子说明脉冲对系统稳定性的影响。

例　考虑一具有脉冲效应和时间核函数的神经网络模型[9]

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=-a(t)x+\int_0^t K(t-s)x(s)\mathrm{d}s,t\neq\tau_k\\ \Delta x=x(\tau_k^+)-x(\tau_k^-)=b_kx(\tau_k^-),t=\tau_k\end{cases}\tag{6}$$

取 $a(t)=\sin t$,$K(t-s)=\dfrac{1}{1+(t-s)^2}$,$t\geqslant s\geqslant 0$,可以验证不含脉冲($b_k=0$)的系统(6)是失稳的。由于

$|-a(s)|+\int_s^{\infty}|K(u-s)|\mathrm{d}u \leqslant \frac{\pi}{2}$，要保证(4)式成立，只须选择脉冲跳跃满足($\lambda$ 为某个常数)

$$\frac{\ln|1+b_k|}{\tau_k-\tau_{k-1}} \leqslant \lambda < -\frac{\pi}{2} \tag{7}$$

根据定理 3，不稳定的连续系统在脉冲扰动(7)的作用下，系统(6)是指数稳定的。

参考文献：

[1] BURTON T A. Stability and Periodic Solution of Ordinary and Functional Differential Equations[M]. New York: Academic Press, 1985.

[2] 李寿佛. Banach 空间中非线性刚性 Volterra 泛函微分方程稳定性分析[J]. 中国科学 A, 2005, 35(3): 286-301.

[3] 万阿英. Volterra 积分微分方程周期正解的一个新的存在性理论[J]. 数学物理学报, 2005, 25A(3): 367-363.

[4] 王慕秋, 王联, 杜雪堂. 关于 Volterra 型积分微分方程的稳定性[J]. 应用数学学报, 1992, 15(2): 184-193.

[5] 程亚焕, 李冬梅. 二维时变 Volterra 互惠系统的生存分析[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2006, 29(5): 552-554.

[6] RAMA MOHANA RAO M, SRIVASTAVA S K. Stability of Volterra Integro-differential Equations with Impulsive Effect[J]. J Math Anal Appl, 1992, 163: 47-59.

[7] 申建华. 脉冲积分微分方程的几个渐近稳定型结果[J]. 数学年刊, 1996, 17A(6): 759-764.

[8] LAKSHMIKANTHAM V, BAINOV D D, SIMEONOV P S. Theory of Impulsive Differential Equations[M]. Singapore: World Scientific, 1989.

[9] GROSSBERG S. Nonlinear Neural Networks: Principles, Nechanisms, and Architectures[J]. Neural Networks, 1988, 1(1): 17-61.

Existence and Stability of Solution for a Class of Impulsive Volterra Integro-differential Equations

YANG Zhi-chun

(College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: This paper investigates the existence and uniqueness of solution to a class of impulsive Volterra integro-differential equations. Firstly, we give the parameters conditions, the related definition and impulsive-type Gronwall inequality impulsive Volterra integro-differential equations. Next, the existence of solution to the non-impulsive Volterra integro-differential equations with impulsive initial conditions is obtained by using Weierstrass´criterion. Based on the result, we study the existence and uniqueness of the impulsive integro-differential equations via iterative procedures and impulsive Gronwall inequality. Then, a sufficient condition ensuring to exponential stability is obtained in the impulsive Volterra integro-differential equations by utilizing the Gronwall inequality again and the analysis technique. Lastly, an example is given to illustrate that an impulsive systems may become exponentially stable even when the corresponding continuous systems is unstable, which shows the stability of the equation can be handled by impulsive effects.

Key words: impulsive intergro-differential equations; existence; uniqueness; ability; Gronwall inequality

(责任编辑　欧红叶)